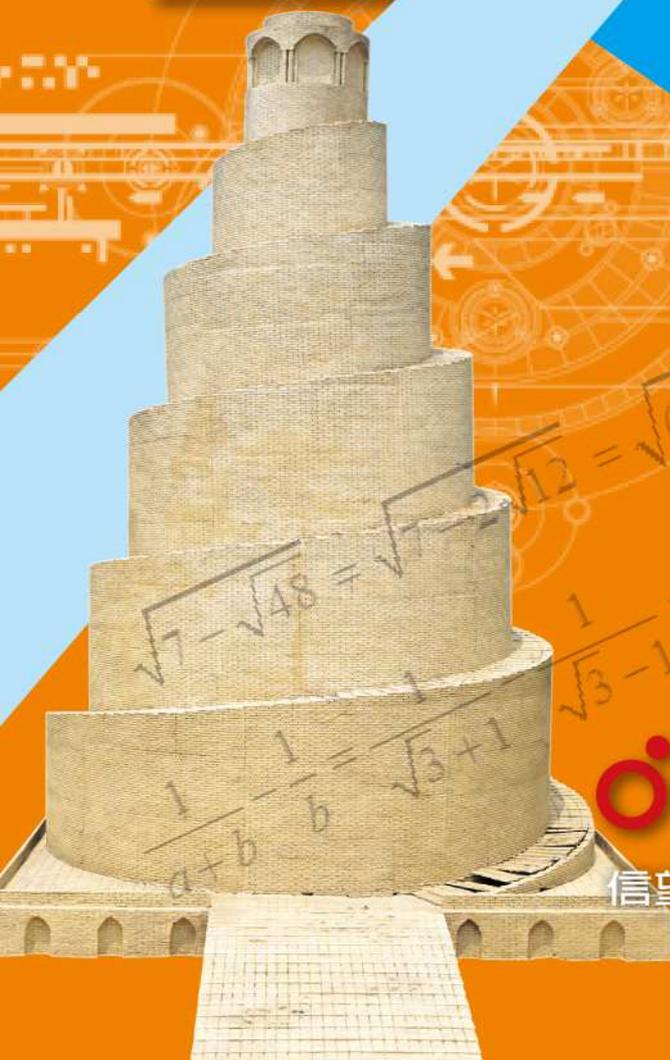


數學 2

進階
講義

相異物的組合&分堆分組

淡水商工 · 蔡旭伶 老師



信望愛文教基金會



$\frac{3}{4}$



5-3-1 相異物的組合

5-3-3 分堆分組

定理敘述

1. 從 n 件相異物中選取 m 件之組合數為 C_m^n ，定義 $C_m^n = \frac{P_m^n}{m!}, 0 \leq m \leq n$ 。

$$C_m^n = \frac{P_m^n}{m!} = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

2. 巴斯卡定理： $C_k^n = C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1}$ ， $1 \leq k \leq n-1$

定理證明或說明

1. 從 n 件相異物中選取 m 件的排列數為 P_m^n ，但 m 件一組不考慮其排列順序，即 $m!$ 種排列順序是相同的，故組合數 $C_m^n = \frac{P_m^n}{m!}$ 。

$$\begin{aligned} 2. C_{k-1}^{n-1} + C_k^{n-1} &= \frac{(n-1)!}{(k-1)![(n-1)-(k-1)]!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} + \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!(n-k)} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!k(n-k-1)!} \\ &= \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \left(\frac{1}{n-k} + \frac{1}{k} \right) = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k-1)!} \cdot \frac{n}{(n-k)k} \\ &= \frac{n(n-1)!}{(k-1)!k(n-k-1)!(n-k)} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = C_k^n \end{aligned}$$

注意事項

$C_m^n = C_{n-m}^n$ 。(從 n 件相異物中取出 m 個之組合數與取出 $n-m$ 個之組合數相同)



關鍵字

組合、巴斯卡定理

例題 1

已知 $C_{4r+3}^{18} = C_{9-2r}^{18}$ ，求正整數 r 的值。

Ans :

- ① $4r+3=9-2r$ ， $6r=6$ ， $r=1$ ② $4r+3+9-2r=18$ ， $2r=6$ ， $r=3$ 。

例題 2

(1) 求 $C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{18}$ 的值 (2) 求 $C_0^2 + C_1^3 + C_2^4 + \cdots + C_{16}^{18}$ 的值。

Ans :

(1) 利用 $C_2^2 = C_3^3 = 1$ 及巴斯卡定理 $C_3^3 + C_2^3 = C_3^4$ ， $C_3^4 + C_2^4 = C_3^5$ 類推

$$\begin{aligned} C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{18} &= C_3^3 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{18} = C_3^4 + C_2^4 + \cdots + C_2^{18} \\ &= C_3^5 + C_2^5 + C_2^6 + \cdots + C_2^{18} = \cdots = C_3^{18} + C_2^{18} = C_3^{19} = 969 \end{aligned}$$

(2) 利用 $C_0^2 = C_2^2, C_1^3 = C_2^3, \dots, C_6^{18} = C_2^{18}$

$$C_0^2 + C_1^3 + C_2^4 + \cdots + C_{16}^{18} = C_2^2 + C_2^3 + C_2^4 + \cdots + C_2^{18} = 969。$$

例題 3

某次數學考試共有十道題目，規定從這十題中選做六題。

(1) 共有多少種選法？ (2) 若規定前三題一定要做，共有多少種選法？

Ans :

(1) $C_6^{10} = 210$ (2) 前三題必做，再從後七題選三題湊成六題， $C_3^7 = 35$ 。

例題 4

從男生 6 人，女生 5 人中選出 5 人組成委員會：

(1) 2 名男生 3 名女生的選法有多少種？ (2) 男女生都至少兩名的選法有多少種？

Ans :

(1) $C_2^6 \cdot C_3^5 = 150$ (2) 二男三女 + 三男二女 $C_2^6 \cdot C_3^5 + C_3^6 \cdot C_2^5 = 150 + 200 = 350$

例題 5

有 9 本相異書本，請依下列條件求出各有多少種分法。

(1) 平分成三堆 (2) 平分給三人 (3) 一人得 5 本，一人得 2 本，一人得 2 本

(4) 一人得 4 本，一人得 3 本，一人得 2 本 (5) 甲得 5 本，乙、丙各得 2 本

(6) 甲得 4 本，乙得 3 本，丙得 2 本

Ans :

(1) $\frac{C_3^9 C_3^6 C_3^3}{3!} = 280$ (2) 先分成三堆再分給三人 $\frac{C_3^9 C_3^6 C_3^3}{3!} \cdot 3! = 1680$

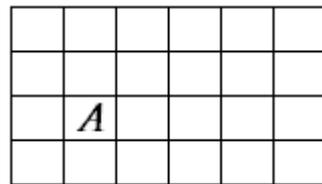
(3) $\frac{C_5^9 C_2^4 C_2^2}{2!} \cdot 3! = 2268$ (4) $C_4^9 C_3^5 C_2^2 \cdot 3! = 11340$

(5) 已經確定給誰就不用分堆再平分 $C_5^9 C_2^4 C_2^2 = 756$ (6) $C_4^9 C_3^5 C_2^2 = 1890$

例題 6

(1) 右圖中的矩形共有多少個？

(2) 右圖中包含 A 的矩形共有多少個？



Ans :

(1) 7 條直線任選 2 條，5 條橫線任取 2 條即可組成矩形，故 $C_2^7 \cdot C_2^5 = 210$

(2) 左邊 2 條線選 1，右邊 5 條線選 1，類推上 3 選 1，下 2 選 1， $C_1^2 C_1^5 C_1^3 C_1^2 = 60$



溫故知新

習題 1

設 $n \in \mathbb{N}$ ，若 $P_3^n = 3C_3^{n+1}$ ，則 $n = ?$

習題 2

已知 $C_{3r}^{20} = C_{2r+5}^{20}$ ，求正整數 r 的值。

習題 3

從男生 5 人，女生 4 人中選出 5 人組成委員會，且男女生都至少兩名的選法有多少種？

習題 4

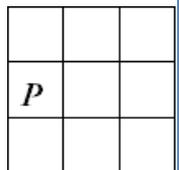
從甲、乙、丙...等 9 人中選出 5 人：(1) 有多少種選法？ (2) 甲、乙、丙三人必選，有多少種選法？ (3) 甲、乙、丙三人必選一人，有多少種選法？

習題 5

籃球三對三鬥牛賽，共有甲、乙、丙等 9 位同學參加，可分成 3 隊，有幾種分法？

習題 6

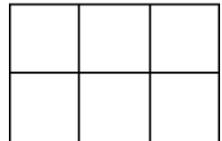
- (1) 右圖中共有多少個矩形？
 (2) 包含 P 的矩形有多少個？



習題 7

【學測 99】

有一個兩列三行的表格如右圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6(不得重複)，則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有_____種。



一乒乓球隊有 6 位選手，其中甲、乙、丙為右手持拍的選手，丁、戊為左手持拍的選手，而已為左右手皆可持拍的選手。現在要派出兩名選手參加雙打，規定由一名可以右手持拍的選手與一名可以左手持拍的選手搭配。請問共有多少種可能的搭配？(1) 7 (2) 9 (3) 11 (4) 13 (5) 15

解答與解析

習題 1 : $n = 5$

習題 2 : $r = 3$ 或 5

習題 3 : 100 種

習題 4 : (1) 126 (2) 15 (3) 45

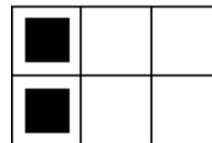
習題 5 : 280 種

習題 6 : (1) 36 個 (2) 12 個

習題 7 : 432

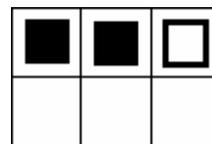
方法一：

(1) 1、2 在同一行排列 $2!$ ，有三行可選 C_1^3 ，剩下四個數字任意排列 $4!$ ，共 $2! \cdot C_1^3 \cdot 4! = 144$



(2)

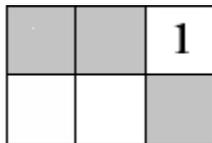
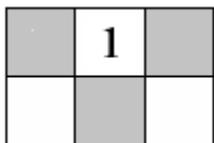
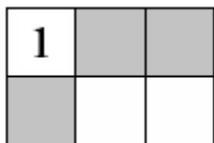
(2) 1、2 在同一列排列 P_2^3 ，有兩列可選，剩下四個數字任意排列 $4!$ ，共 $P_2^3 \cdot C_1^2 \cdot 4! = 288$ 。



總共 $144 + 288 = 432$

方法二：

1 先排好位置，再從同一行或同一列的三個位置選出一個排入 2，最後剩下四個數字任意排列，如下圖所示，共 $C_1^6 \cdot C_1^3 \cdot 4! = 432$



習題 8 : (3)

(1) 先不排己選手，由甲、乙、丙選手搭配丁、戊選手共 $3 \times 2 = 6$ 種

(2) 己選手和甲、乙、丙、丁、戊選手都可搭配，5 種

總共 $6 + 5 = 11$ 種。