

數學 基礎講義

函數性質的判定

信望愛文教基金會 · 數學種子教師團隊

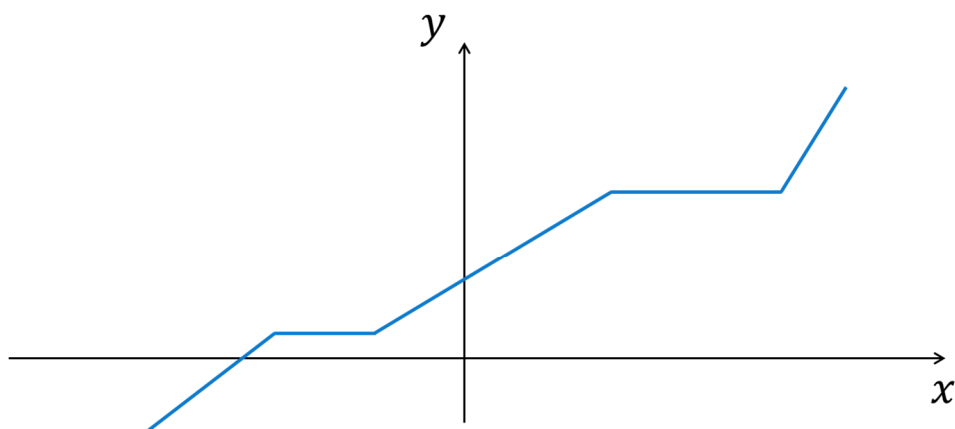


函數性質的判定

1. 函數的遞增、遞減

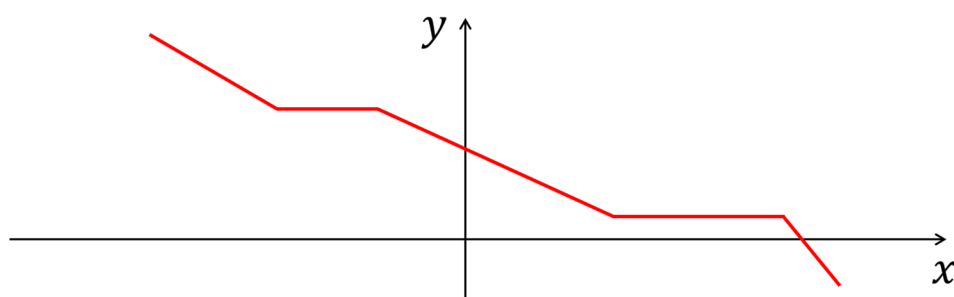
1-1 遞增

若 $x_2 > x_1$ ，則 $f(x_2) \geq f(x_1)$ ，符合上述條件之函數，稱為**遞增函數**。



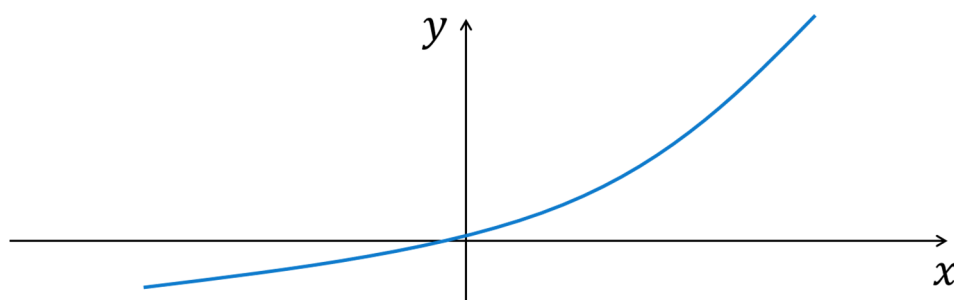
1-2 遞減

若 $x_2 > x_1$ ，則 $f(x_2) \leq f(x_1)$ ，符合上述條件之函數，稱為**遞減函數**。



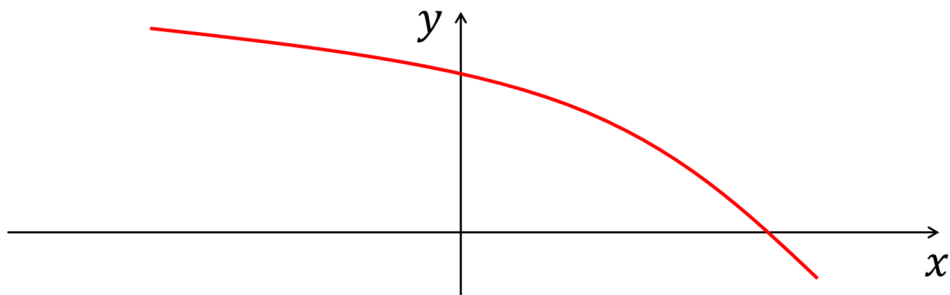
1-3 嚴格遞增

若 $x_2 > x_1$ ，則 $f(x_2) > f(x_1)$ ，符合上述條件之函數，稱為**嚴格遞增函數**。



1-4 嚴格遞減

若 $x_2 > x_1$ ，則 $f(x_2) < f(x_1)$ ，符合上述條件之函數，稱為**嚴格遞減函數**。



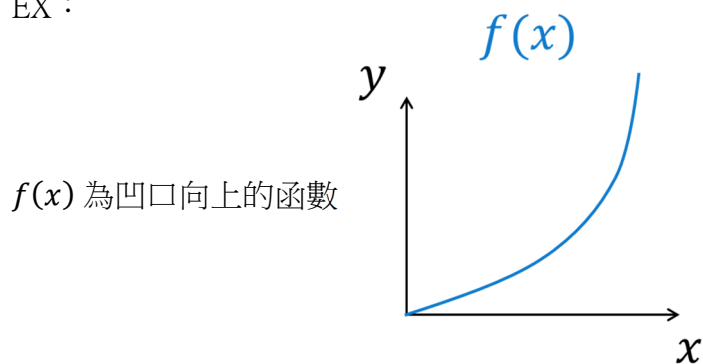
1-5 遞增遞減與導函數值

- i. 遞增 $\rightarrow$ 斜率 $\geq 0 \rightarrow$ 導函數 $f'(x) \geq 0$
- ii. 遞減 $\rightarrow$ 斜率 $\leq 0 \rightarrow$ 導函數 $f'(x) \leq 0$
- iii. 嚴格遞增 $\rightarrow$ 斜率 $> 0 \rightarrow$ 導函數 $f'(x) > 0$
- iv. 嚴格遞減 $\rightarrow$ 斜率 $< 0 \rightarrow$ 導函數 $f'(x) < 0$

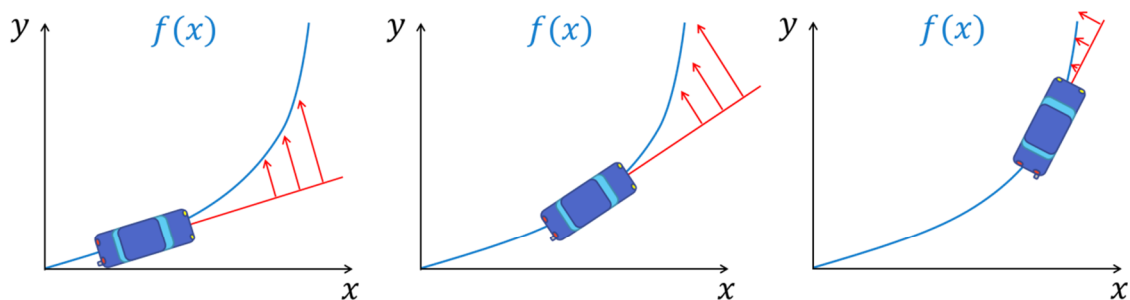
2. 函數的凹向性

函數的凹向性與遞增遞減不同，遞增遞減強調的是隨著自變數 x 的改變對應函數值 y 的大小關係。而凹向性是在表現函數值改變的趨勢。

EX：



像是從空中鳥瞰一台車，這台車正在左轉彎。



2-1 凹口向上

若函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 內的二階導函數 $f''(x) \geq 0$ ，則稱 $f(x)$ 在 (a, b) 內凹口向上。

2-2 凹口向下

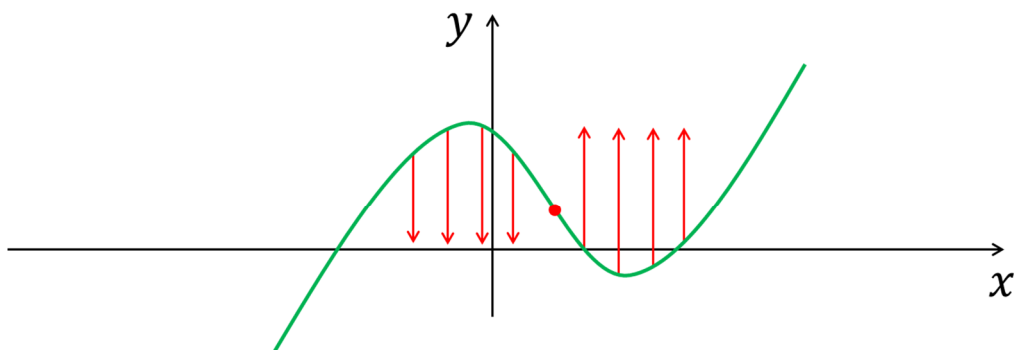
若函數 $f(x)$ 在區間 (a, b) 內的二階導函數 $f''(x) \leq 0$ ，則稱 $f(x)$ 在 (a, b) 內凹口向下。

3. 反曲點

函數圖形經某一點後凹口方向發生改變，則該點稱之為反曲點。

定義：

若 $f''(a) = 0$ 且在 $x > a$ 與 $x < a$ 的時候，凹口方向互不相同，則稱 $(a, f(a))$ 點為函數 $f(x)$ 的反曲點。



4. 多項式函數繪圖

利用遞增、遞減、凹向性與反曲點等函數性質來描繪出函數圖形。

遞增 $\rightarrow f'(x) \geq 0$

遞減 $\rightarrow f'(x) \leq 0$

凹口向上 $\rightarrow f''(x) \geq 0$

凹口向下 $\rightarrow f''(x) \leq 0$

反曲點 $\rightarrow f''(x) = 0$

則一階導函數 $f'(x)$ 與二階導函數 $f''(x)$ 所對應圖形表格如下。

$f'(x)$	+		+		-		-	
$f''(x)$	+		-		+		-	
圖形								

EX：觀察函數 $f(x) = x^3 + 3x^2 - 9x - 2$ 並繪出圖形。

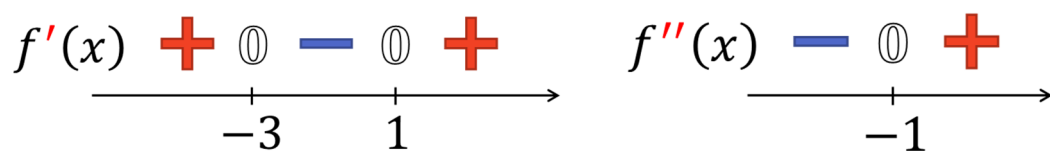
$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot x^2 + 2 \cdot 3x^1 - 9x^0 + 0 \\ &= 3x^2 + 6x - 9 = 3(x+3)(x-1) \end{aligned}$$

當 $x = -3, 1$ 時 $f'(x) = 0$ 。

$$\begin{aligned} f''(x) &= 2 \cdot 3x^1 + 6x^0 + 0 \\ &= 6x + 6 = 6(x+1) \end{aligned}$$

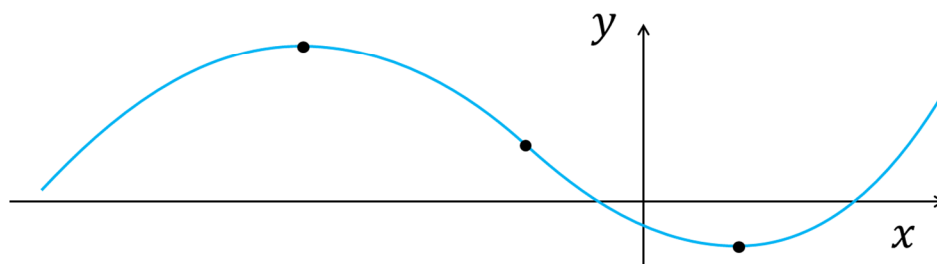
當 $x = -1$ 時 $f''(x) = 0$ 。

進而求得一階導函數 $f'(x)$ 與二階導函數 $f''(x)$ 的正負區域：



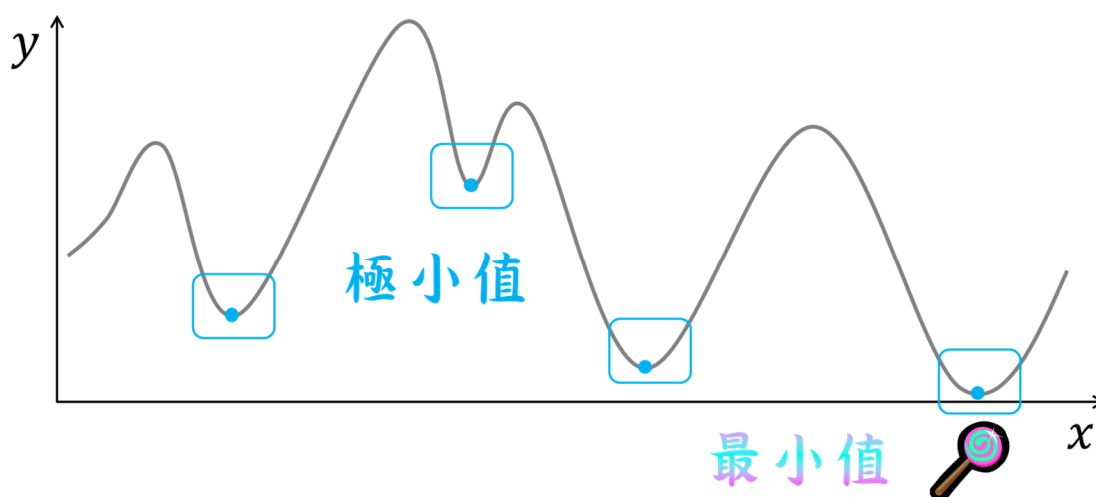
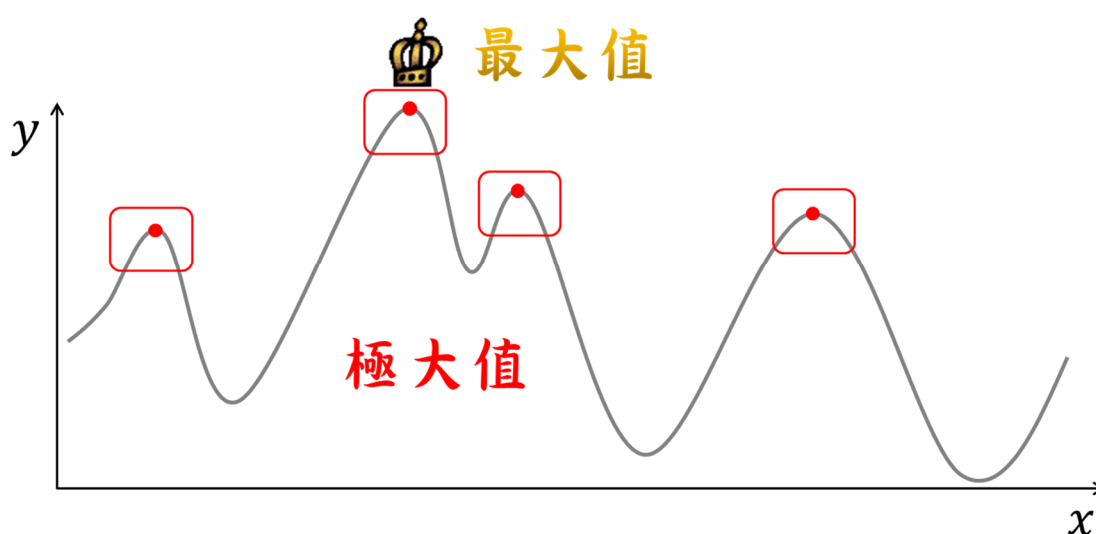
再整理表格以觀察圖形。

x		-3		-1		1	
$f(x)$		25		9		-7	
$f'(x)$	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	-	-	-	0	+	+	+



5. 多項式函數的極值

1. 最大值：
函數 $y = f(x)$ ，自變數在規定範圍內所能對應到**最大的值**，我們稱之為最大值。
2. 最小值：
函數 $y = f(x)$ ，自變數在規定範圍內所能對應到**最小的值**，我們稱之為最小值。
3. 極大值：
函數 $y = f(x)$ ，若在 $x = a$ 附近的函數值都小於 $f(a)$ ，則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 有極大值。
4. 極小值：
函數 $y = f(x)$ ，若在 $x = a$ 附近的函數值都大於 $f(a)$ ，則稱 $f(x)$ 在 $x = a$ 有極小值。



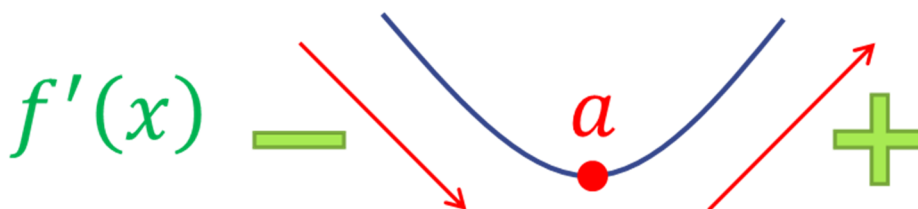
6. 判別函數的極值

設函數 $y = f(x)$ 在 $x = a$ 的附近可微分，且 $f'(a) = 0$ 。

若在 a 點附近，當 $x < a$ 時 $f'(x) > 0$ ；當 $x > a$ 時 $f'(x) < 0$ ，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 處有極大值。



若在 a 點附近，當 $x < a$ 時 $f'(x) < 0$ ；當 $x > a$ 時 $f'(x) > 0$ ，則 $f(x)$ 在 $x = a$ 處有極小值。

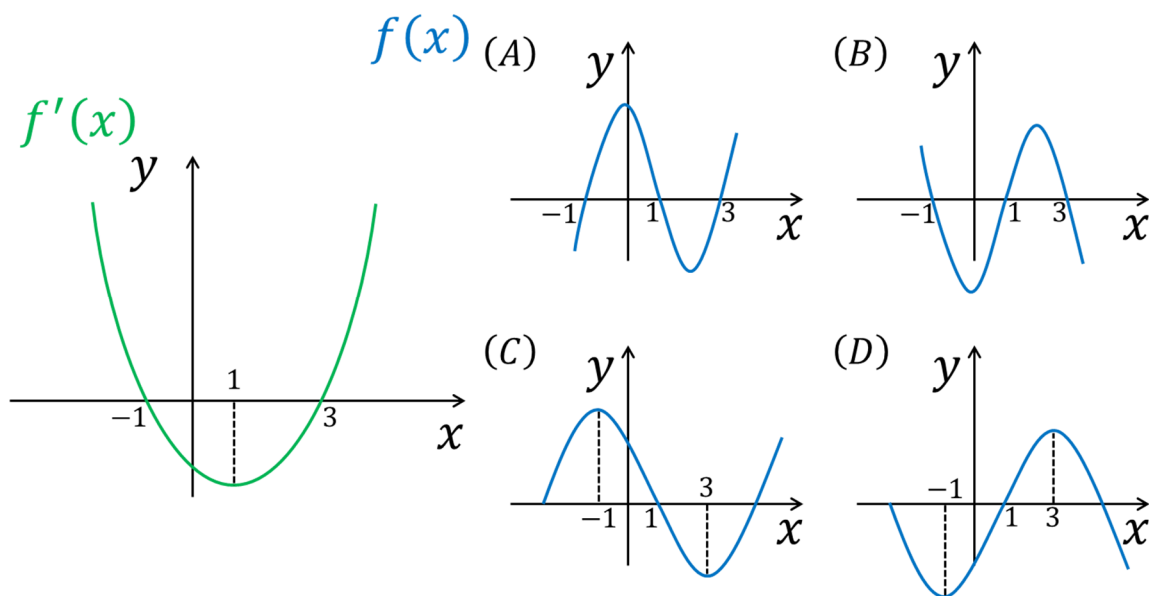


小試身手

1. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 99999$ 求出遞增、遞減的區間。
2. 函數 $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 5x - 7$ 請劃分其凹向性並找出反曲點。
3. 根據下列表格繪出此函數圖形。

x		-5		-2		1		5		8	
$f(x)$		0		7		13		-1		-6	
$f'(x)$	-	0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+

4. 根據一階導函數的圖形選出最符合的函數。



5. 設函數 $f(x) = \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x - 4$ 求 $x \in [-3, 4]$ 的極值與最大最小值。

詳解

1. $f(x) = 2x^3 + 4x^2 - 8x + 99999$

$$f'(x) = 3 \cdot 2x^2 + 2 \cdot 4x - 8 + 0$$

$$= 6x^2 + 8x - 8$$

$$= 2(3x - 2)(x + 2)$$



當 $x = -2, \frac{2}{3}$ 時 $f'(x) = 0$ 。

當 $x \geq \frac{2}{3}$ 或 $x \leq -2$ 時，導函數 $f'(x) \geq 0 \rightarrow$ 函數遞增

遞增區間為： $\left[\frac{2}{3}, \infty\right), (\infty, -2]$

當 $-2 \leq x \leq \frac{2}{3}$ 時，導函數 $f'(x) \leq 0 \rightarrow$ 函數遞減

遞減區間為： $[-2, \frac{2}{3}]$

2. $f(x) = \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{12}x^4 - \frac{4}{3}x^3 + 6x^2 + 5x - 7$

$$f'(x) = 5 \cdot \frac{1}{20}x^4 - 4 \cdot \frac{1}{12}x^3 - 3 \cdot \frac{4}{3}x^2 + 2 \cdot 6x^1 + 5x^0 + 0$$

$$= \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 12x + 5$$

$$f''(x) = 4 \cdot \frac{1}{4}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{3}x^2 - 2 \cdot 4x^1 + 12x^0 + 0$$

$$= x^3 - x^2 - 8x + 12$$

$$= (x - 2)^2(x + 3)$$



當 $x = -3, 2$ 時 $f''(x) = 0$ 。

當 $x \geq -3$ 時，導函數 $f''(x) \geq 0 \rightarrow$ 凹口向上

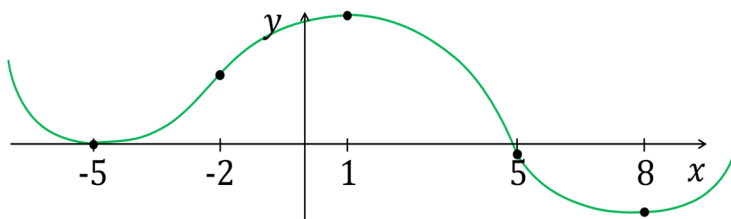
凹口向上區間為： $[-3, \infty)$

當 $x \leq -3$ 時，導函數 $f''(x) \leq 0 \rightarrow$ 凹口向下

凹口向下區間為： $(\infty, -3]$

3.

x		-5		-2		1		5		8	
$f(x)$		0		7		13		-1		-6	
$f'(x)$		0	+	+	+	0	-	-	-	0	+
$f''(x)$	+	0	+	0	-	-	-	0	+	+	+



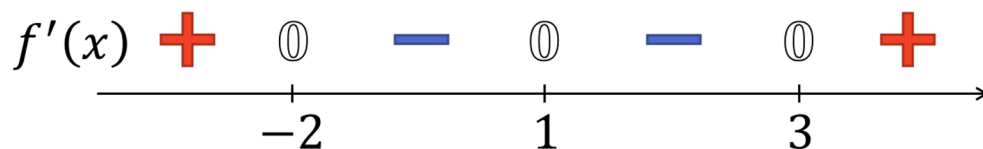
4. (C)

$$\begin{aligned}
 5. \quad f(x) &= \frac{1}{5}x^5 - \frac{3}{4}x^4 - x^3 + \frac{11}{2}x^2 - 6x - 4 \\
 f'(x) &= 5 \cdot \frac{1}{5}x^4 - 4 \cdot \frac{3}{4}x^3 - 3 \cdot x^2 + 2 \cdot \frac{11}{2}x - 6 \\
 &= x^4 - 3x^3 - 3x^2 + 11x - 6 \\
 f'(1) &= 1 - 3 - 3 + 11 - 6 = 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{r|l}
 1 & -3 & -3 & 11 & -6 \\
 & 1 & -2 & -5 & 6 \\
 \hline
 1 & -2 & -5 & 6 & 0
 \end{array}$$

$$f'(x) = (x-1)^2(x-3)(x+2)$$

當 $x = -2, 1, 3$ 時 $f'(x) = 0$ 。



當 $x = -2$ 時 $f(x)$ 有極大值 $f(-2) = 19.6$

當 $x = 3$ 時 $f(x)$ 有極小值 $f(3) = -11.65$

邊界也是極值

當 $x = -3$ 時 $f(x)$ 有極小值 $f(-3) = -18.85$

當 $x = 4$ 時 $f(x)$ 有極大值 $f(4) = 8.8$

當 $x = -2$ 時 $f(x)$ 有最大值 $f(-2) = 19.6$

當 $x = -3$ 時 $f(x)$ 有最小值 $f(-3) = -18.85$