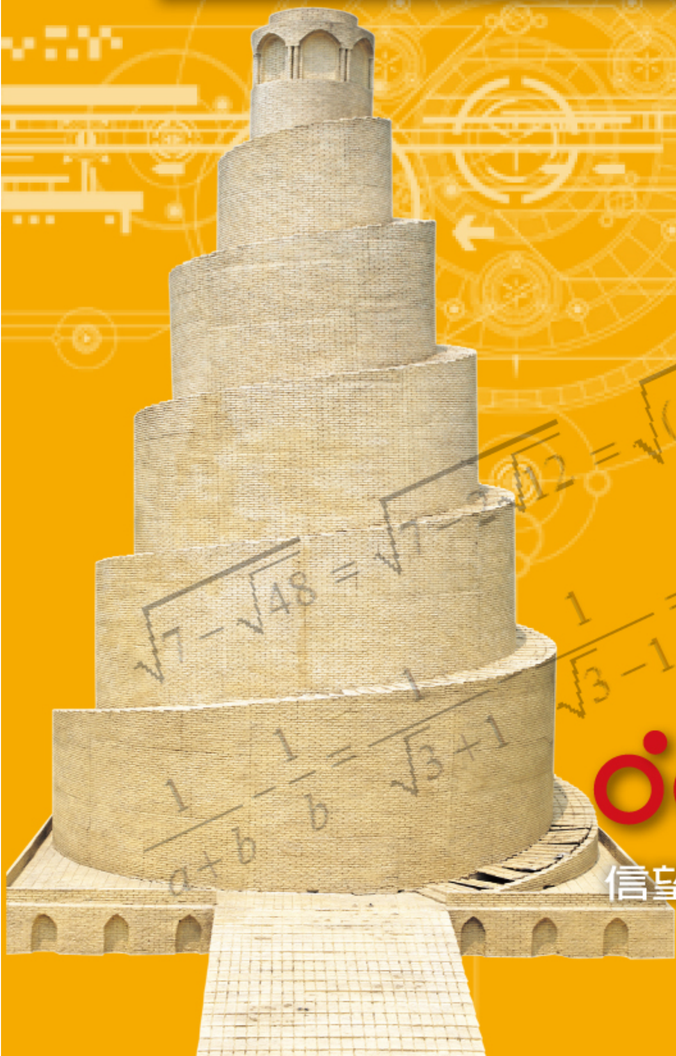
數學 基礎講義

線性方程組與矩陣

信望愛文教基金會．數學種子教師團隊



信望愛文教基金會

線性方程組與矩陣

1. 線性方程組

I. 係數矩陣：將線性方程組的係數提出，排列而成的矩陣。
例如：
有一三元線性方程組如下：

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ x-y+4z=5 \\ x+3y-2z=7 \end{cases}$$

則將該線性方程組的係數提出來排列而成的係數矩陣為：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}$$

II. 增廣矩陣：將線性方程組的係數提出，同時也將等號右邊的常數項提出，排列而成的矩陣。
例如：
有一三元線性方程組如下：

$$\begin{cases} x+2y+3z=10 \\ x-y+4z=5 \\ x+3y-2z=7 \end{cases}$$

則該線性方程組的增廣矩陣為

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \end{bmatrix}$$

2. 矩陣的列運算

I. 將某兩列對調。
II. 將任何一列乘上一個不為 0 的數。
III. 將任何一列乘上一個不為 0 的數後，加到另外一列。

3. 高斯消去法

利用上述的矩陣列運算來消去未知數係數，直到求出方程組的解，稱為高斯消去法，為線性代數的一個演算法。

範例：

定義前述之增廣矩陣的第一列為 L1、第二列為 L2、第三列為 L3

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 1 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \longrightarrow \text{L1} \\ \longrightarrow \text{L2} \\ \longrightarrow \text{L3} \end{array}$$

將 L1 乘上-1 加到 L3，同時也 L1 乘上-1 加到 L2，得到新的增廣矩陣為

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & -5 & -3 \end{bmatrix}$$

將 L2 乘上 $\frac{1}{3}$ 加到 L3，得到新的增廣矩陣為

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & -3 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & \frac{-14}{3} & \frac{-14}{3} \end{bmatrix}$$

將 L2 乘上 $\frac{-1}{3}$ ，同時將 L3 乘上 $\frac{-3}{14}$ ，得到新的增廣矩陣為

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

經過上述步驟即完成一個高斯消去法的演算流程，我們可以從最後一列找到z的解，並往上代入求得x、y的解。

4. 解的組數

若經過高斯消去法後無法得到上例的唯一一組解，則可能情況有以下兩種

I. 若經高斯消去法後得到下列情況

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最後一列出現 0=1 的矛盾情況，則此方程組無解

II. 若經高斯消去法後得到下列情況

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 10 \\ 0 & 1 & \frac{-1}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最後一列或更多列出現全都都為 0 的情況，則該方程組各方程式不完全獨立，因此無法求出單一解，為無限多解。

◆ 觀念小補充—獨立的概念

在向量空間裡，假設有 n 個向量，且任一個向量無法由其他向量線性組合而成，則稱為線性獨立。

小試身手

1. 請寫出聯立方程式$\begin{cases} x+y+3z=2 \\ x-7y+3z=14 \\ 3x+1y=7 \end{cases}$的增廣矩陣跟係數矩陣

2. 試利用高斯消去法求得下列方程組的解

$$\begin{cases} x+2y+3z=2 \\ x-y+z=1 \\ x+y-z=3 \end{cases}$$

3. 設$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & 18 \\ 2 & 3 & 9 & 10 \end{bmatrix}$經過列運算後簡化成$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \alpha \\ 0 & 1 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{bmatrix}$，則$(\alpha,\beta,\gamma)$為

4. 試討論實數 a 值對於下列聯立方程式解的影響

$$\begin{cases} x+2y+z=3 \\ 2x+y-z=1 \\ 5x+7y+2z=a \end{cases}$$

解答

1. 增廣矩陣$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -7 & 3 & 14 \\ 3 & 1 & 0 & 7 \end{bmatrix}$，係數矩陣$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -7 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{12}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-13}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{8}{5} \end{bmatrix}$

3. $(-8,5,1)$

4. $a \neq 7$，則此方程式無解

   $a=7$，$\begin{cases} x=t-\frac{7}{3} \\ y=\frac{8}{3}-t \\ z=t \end{cases}$