

數學 基礎講義

積分的意義

信望愛文教基金會 · 數學種子教師團隊



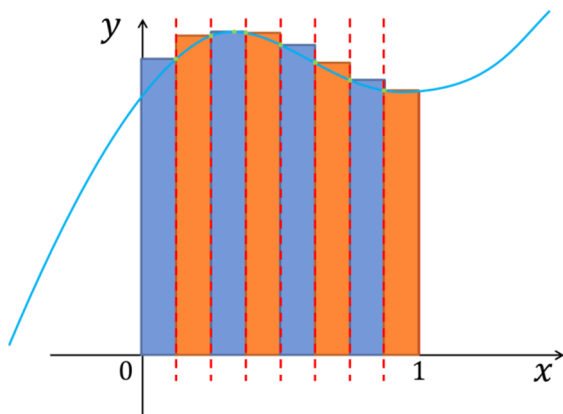
信望愛文教基金會

積分的意義

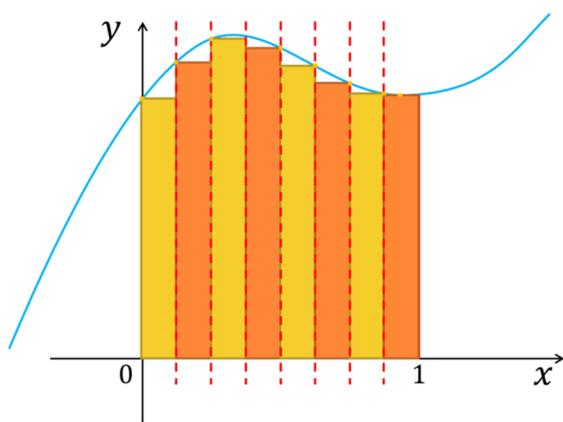
1. 黎曼和

設 R 是由 $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 1$ 和 $x = 0$ 、 $x = 1$ 及 x 軸所圍成的區域。

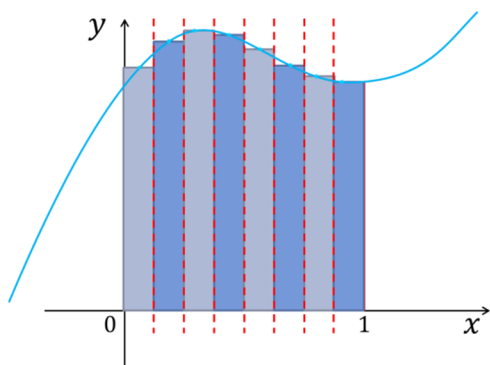
上和：



下和：



黎曼和：



1-1 上和(上黎曼和)

將區間 $[a, b]$ 分成 n 等分，取每一分中 $f(x)$ 的最大值為高，則所形成 n 個長方形的面積和，稱之為上和，記為 U_n 。

1-2 下和(下黎曼和)

將區間 $[a, b]$ 分成 n 等分，取每一分中 $f(x)$ 的最小值為高，則所形成 n 個長方形的面積和，稱之為下和，記為 L_n 。

1-3 黎曼和

將區間 $[a, b]$ 分成 n 等分，形成分割點 $a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ ，

取一個數值 $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ，

則以 $(x_i - x_{i-1})$ 為底 $f(t_i)$ 為高的長方形面積和記為： $\sum_{i=1}^n f(t_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$
稱之為『 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上對於分割點 $x_0, x_1, \dots, x_n$ 的黎曼和』。

1-4 黎曼和的性質

- 上和 $U_n \geq$ 黎曼和 $\geq$ 下和 L_n
- 利用黎曼和求函數圖形與 x 軸所圍成面積時，若函數圖形在 x 軸下方，則黎曼和求出面積值也為負。

2. 定積分

若 $f(x)$ 是定義在區間 $[a, b]$ 的連續函數，且將 $[a, b]$ 分成 n 等分後，其上和 U_n 與下和 L_n 的極限值相等 $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n$ ，

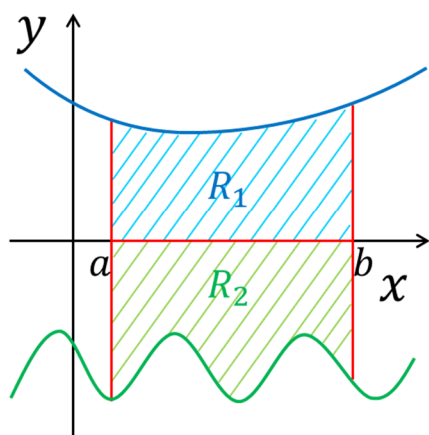
此極限值稱為『 $f(x)$ 由 a 到 b 的定積分』，記為 $\int_a^b f(x) dx$ 。

3. 定積分性質

1. $\int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a)$, c 為任意常數。
2. $\int_a^b [f(x) + g(x)] \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx$
3. $\int_a^b c \cdot f(x) \, dx = c \cdot \int_a^b f(x) \, dx$, c 為任意常數。
4. $\int_a^b f(x) \, dx = \int_a^c f(x) \, dx + \int_c^b f(x) \, dx$, c 屬於區間 (a, b) 。

4. 定積分與面積

設連續函數 $f(x)$ 、 $g(x)$ 分別與 $x = a$ 、 $x = b$ 及 x 軸依序圍成 R_1 、 R_2 兩區域。

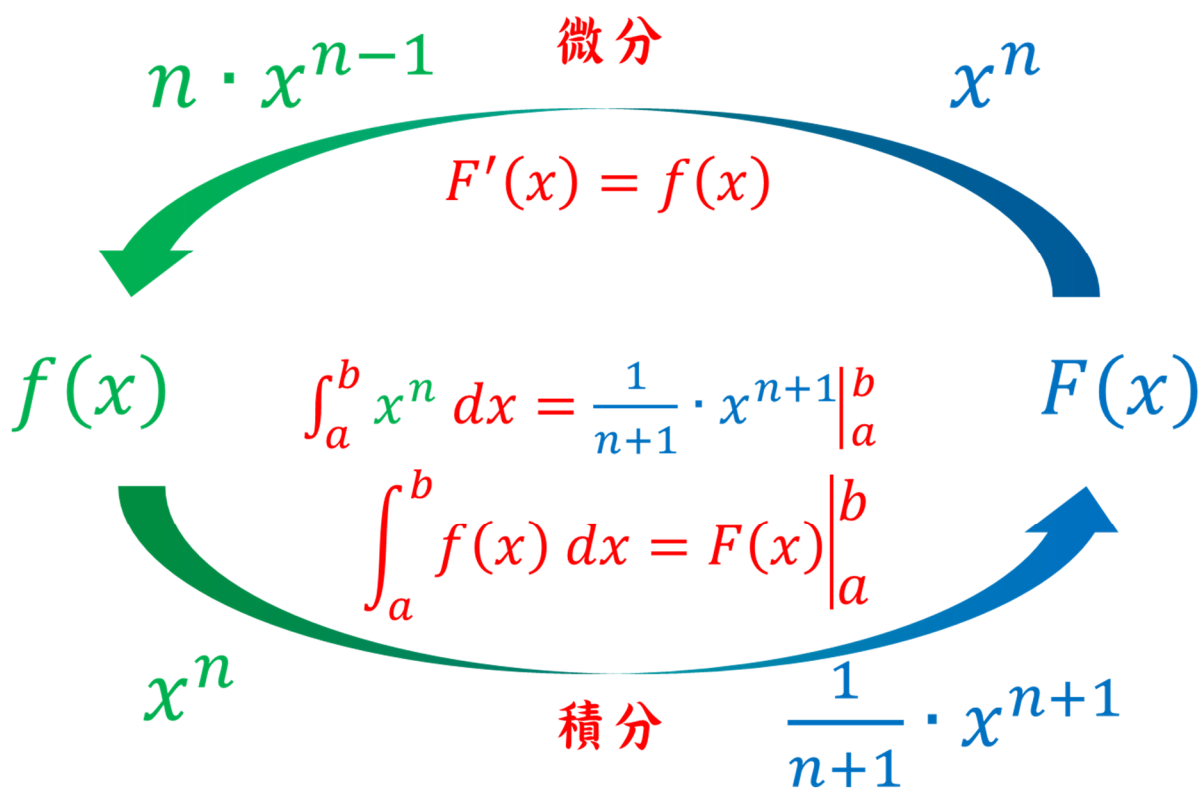


$$\int_a^b f(x) \, dx = R_1 \text{ 的面積}$$

$$\int_a^b g(x) \, dx = -(R_2 \text{ 的面積})$$

5. 微積分基本定理

若 $f(x)$ 為連續函數，令函數 $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ，則 $F(x)$ 為可微分函數，且 $F'(x) = f(x)$ 。



6. 積分公式

積分：由函數 $f(x)$ 求其反導函數 $\int f(x) dx$ 的過程，稱之為將函數 $f(x)$ 積分。

1. $f(x) = x^n$ ， n 為正整數。

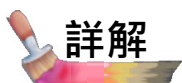
$$\int f(x) dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + c$$

2. $f(x) = k$ ， k 為常數。

$$\int k \cdot x^0 dx = k \cdot \frac{1}{0+1} x^{0+1} + c = kx + c$$

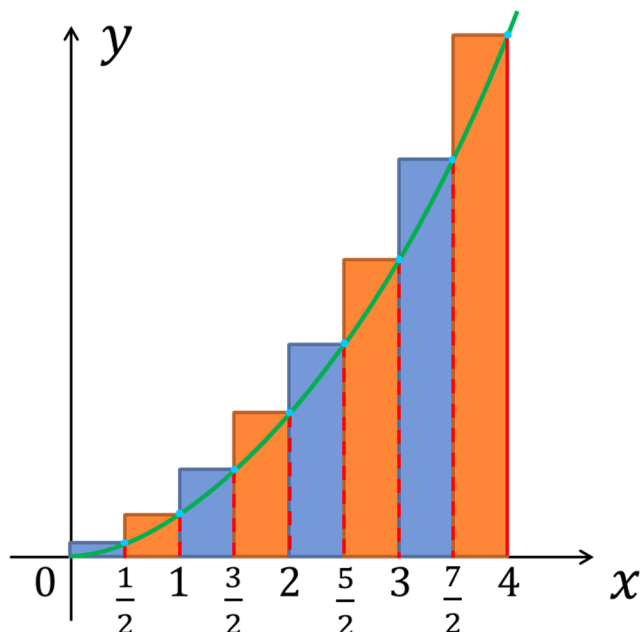
小試身手

1. 函數 $f(x) = x^2$ 的圖形與 $x = 4$ 及 x 軸所圍成的區域 R ，求將區間 $[0, 4]$ 分成 8 等分的上和 U_8 與下和 L_8 。
2. 函數 $f(x) = x^2$ 的圖形與 $x = 4$ 及 x 軸所圍成的區域 R ，利用黎曼和求其面積。
3. 函數 $f(x) = x^3$ 在區間 $[0, 4]$ 的定積分為？
4. 設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 為多項式函數，已知定積分 $\int_0^{99} f(x)dx = \alpha$ 且 $\int_0^{99} g(x)dx = \beta$ ，試求 $\int_0^{99} [4 \cdot f(x) + 3 \cdot g(x)]dx$ 的值？
5. $\int_0^3 (2x^3 + x - 5) dx = ?$
6. $f(x) = \int_1^x (6t^2 - 2t - 3) dt$ ，求 $f'(x) = ?$
7. $\int_0^1 (7x - 5)^6 dx = ?$



$$\begin{aligned}
 1. \quad U_8 &= \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{2}{2}\right) + \cdots + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{7}{2}\right) + \frac{1}{2} \cdot f\left(\frac{8}{2}\right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{7}{2}\right)^2 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 \right] \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot [1^2 + 2^2 + \cdots + 7^2 + 8^2] \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{8(8+1)(2 \cdot 8 + 1)}{6} \\
 &= \frac{1}{8} \cdot \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = \frac{3 \cdot 17}{2} = \frac{51}{2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 L_8 &= U_8 - \frac{1}{2} \cdot f(4) \\
 &= \frac{51}{2} - \frac{1}{2} \cdot 4^2 = \frac{51}{2} - \frac{16}{2} = \frac{35}{2}
 \end{aligned}$$

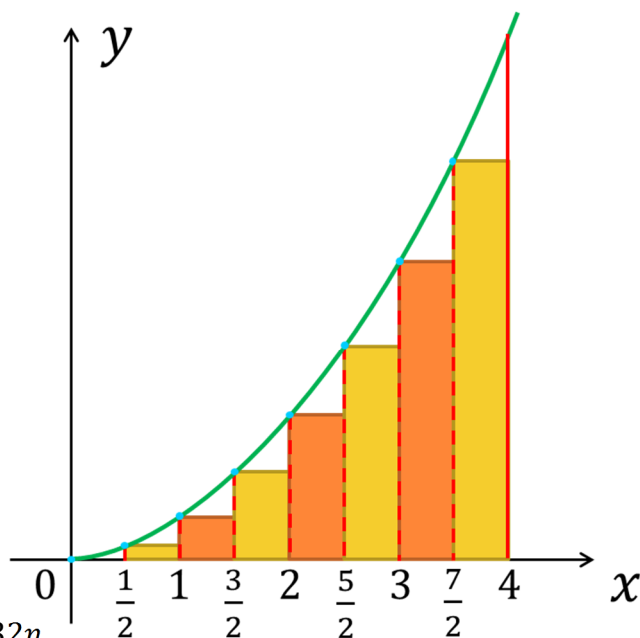


2. 黎曼和 $\sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$

$$\begin{aligned}
 f(t_i)(x_i - x_{i-1}) &= f\left(\frac{4i}{n}\right) \cdot \frac{4}{n} = \left(\frac{4i}{n}\right)^2 \cdot \frac{4}{n} \\
 &= \frac{16i^2}{n^2} \cdot \frac{4}{n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=1}^n \frac{16i^2}{n^2} \cdot \frac{4}{n} &= \frac{16}{n^2} \cdot \frac{4}{n} \cdot (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) \\
 &= \frac{16}{n^2} \cdot \frac{4}{n} \cdot \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \\
 &= \frac{16 \cdot 2 \cdot n \cdot (n+1)(2n+1)}{3n^3} \\
 &= \frac{64n^3 + 96n^2 + 32n}{3n^3}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{64n^3 + 96n^2 + 32n}{3n^3} \\
 &= \frac{64}{3}
 \end{aligned}$$



3. $\int_0^4 x^3 dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(t_i)(x_i - x_{i-1})$
- $$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f\left(\frac{4i}{n}\right)\left(\frac{4}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left(\frac{4i}{n}\right)^3 \left(\frac{4}{n}\right)$$
- $$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{256}{n^4} \cdot i^3 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{256}{n^4} \cdot (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3)$$
- $$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{256}{n^4} \cdot \frac{n^4 + 2n^3 + n^2}{4} = \frac{256}{4} = 64$$
4. 原式 $= \int_0^{99} 4 \cdot f(x) dx + \int_0^{99} 3 \cdot g(x) dx = 4 \cdot \int_0^{99} f(x) dx + 3 \cdot \int_0^{99} g(x) dx$
- $$= 4\alpha + 3\beta$$
5. $\int_0^3 (2x^3 + x - 5) dx = \int_0^3 2x^3 dx + \int_0^3 x dx - \int_0^3 5 dx$
- $$= \left(2 \cdot \frac{1}{3+1} \cdot x^{3+1}\right) \Big|_0^3 + \left(\frac{1}{1+1} \cdot x^{1+1}\right) \Big|_0^3 - (5x) \Big|_0^3$$
- $$= \frac{1}{2} x^4 \Big|_0^3 + \frac{1}{2} x^2 \Big|_0^3 - 5x \Big|_0^3 = \left(\frac{1}{2} x^4 + \frac{1}{2} x^2 - 5x\right) \Big|_0^3$$
- $$= \left(\frac{1}{2} \cdot 3^4 + \frac{1}{2} \cdot 3^2 - 5 \cdot 3\right) - 0 = 30$$
6. $f(x) = \int_1^x (6t^2 - 2t - 3) dt = \int_1^x 6t^2 dt - \int_1^x 2t dt - \int_1^x 3 dt$
- $$= \left(6 \cdot \frac{1}{2+1} \cdot t^{2+1} - 2 \cdot \frac{1}{1+1} \cdot t^{1+1} - 3t\right) \Big|_1^x = (2t^3 - t^2 - 3t) \Big|_1^x$$
- $$= (2x^3 - x^2 - 3x) - (2 \cdot 1^3 - 1^2 - 3 \cdot 1)$$
- $$= 2x^3 - x^2 - 3x + 2$$
7. $\frac{d}{dx} (7x - 5)^7 = 7 \cdot (7x - 5)^{7-1} \cdot (7 - 0)$
- $$= 49 \cdot (7x - 5)^6$$
- $$\int 49 \cdot (7x - 5)^6 dx = (7x - 5)^7$$
- $$49 \int (7x - 5)^6 dx = (7x - 5)^7$$
- $$\int (7x - 5)^6 dx = \frac{1}{49} (7x - 5)^7$$
- $$\int_0^1 (7x - 5)^6 dx = \left[\frac{1}{49} (7x - 5)^7\right] \Big|_0^1 = 1597$$