

數學 1 進階講義

指數方程式&指數不等式的應用 問題

景美女中・李冠達老師



信望愛文教基金會

3-5-4 指數方程式的應用問題

3-5-6 指數不等式的應用問題

注意事項

1. 應用問題的解題關鍵在於下列步驟：
釐清題意→假設適當未知數→列出方程式(或不等式)→解出所求
2. 請注意題目敘述中的「增加 a 倍」與「增加為 a 倍」的不同。

關鍵字

指數方程式、指數不等式。

例題 1

小美有新台幣存款 10 萬元，已知年利率 10%，每年複利一次，試問 4 年後可得利息多少元？本利和多少元？

Ans：

小美四年後的本利和為

$$\begin{aligned}100000 \times (1+10\%)^4 &= 100000 \times 1.1^4 \\ &= 146410 \text{ (元)}\end{aligned}$$

可得利息為 $146410 - 100000 = 46410$ (元)

例題 2

實驗室中，有一個培養細菌的容器，其細菌數目每隔一分鐘就增加一倍，若放入一個細菌，30 分鐘後容器就充滿了細菌（設總數為 N 個）。如果一開始放入八個細菌，試求最少經過多少分鐘，容器便會充滿細菌。

Ans：

假設經過 t 分鐘後，容器便會充滿細菌

$$\begin{aligned}N &= 1 \times 2^{30} = 8 \times 2^t \\ 2^{30} &= 2^{t+3}\end{aligned}$$

解出 $t = 27$

因此，如果一開始放入八個細菌，經過 27 分鐘後，容器便會充滿細菌。

例題 3

假設有一項新試驗中，細菌數目 1 日後增加 a 倍且 2 日後細菌為 64 個，4 日後其數為 1024 個，試求 a 的值為何？

Ans：

假設原有細菌數為 n 個，

因為細菌變化為增加 a 倍，亦即變成原本的 $(1+a)$ 倍，

$$\begin{cases} n(1+a)^2 = 64 \\ n(1+a)^4 = 1024 \end{cases} \quad \text{解得 } (1+a)^2 = 16 = 4^2$$

解出 $a = 3$ 。

另外，亦可得知原有細菌數為 4 個。

例題 4

設一放射性物質的半衰期為 t 年（即經過 t 年，其質量減為原來質量的一半），如果此放射性物質，目前質量為 M_0 公克，則 x 年後質量為 $M(x) = M_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{x}{t}}$ 。現有一未知放射性物質經 800 年後，其質量減為原來的 $\frac{1}{16}$ ，試求其半衰期為多少年？

Ans：

假設其半衰期為 t 年，依題意：

$$M_0 \times \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{800}{t}} = \frac{1}{16} \times M_0$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{800}{t}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4$$

$$\frac{800}{t} = 4$$

$$t = 200$$

因此，其半衰期為 200 年。

例題 5

研究指出學生學習一段時間 t 後，可以得到學習量函數為 $f(t) = a(1 - 10^{-bt})$ ，這裡的常數 a 與 b 跟學生反應學習的科目相關。今小燕一星期可以熟背 100 個英文單字，兩星期可以熟背 150 個英文單字，試求小燕三星期可以熟背幾個英文單字？

Ans：

根據學習量函數為 $f(t) = a(1 - 10^{-bt})$ ，

列出 $f(1) = a(1 - 10^{-b}) = 100$

$$f(2) = a(1 - 10^{-2b}) = 150$$

兩式除後可得 $\frac{(1 - 10^{-b})}{(1 - 10^{-2b})} = \frac{100}{150}$

$$\Rightarrow \frac{(1 - 10^{-b})}{(1 - 10^{-b})(1 + 10^{-b})} = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow (1 + 10^{-b}) = \frac{3}{2}$$

$$\Rightarrow 10^{-b} = \frac{1}{2}$$

代回 $f(1) = a(1 - 10^{-b}) = 100$ 解得 $a = 200$

因此， $f(3) = 200 \times [1 - (\frac{1}{2})^3] = 175$

例題 6

設 A、B 兩菌原有的數目相等，今實驗室發現 A、B 兩菌混合在一起後，A 菌 1 日後成為原來的 $\frac{1}{2}$ 倍，B 菌 1 日後成為原來的 $\frac{1}{4}$ 倍，試求第幾日後，A 菌是 B 菌的 2000 倍以上（含 2000 倍）？

Ans：

因為 A、B 兩菌原有的數目相等，所以假設 A、B 兩菌原有的數目為 a ，

則第 n 日後，A、B 兩菌數目分別變為 $a(\frac{1}{2})^n$ 、 $a(\frac{1}{4})^n$

依題意列出不等式， $a(\frac{1}{2})^n \geq 2000 \times a(\frac{1}{4})^n$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2})^n \geq 2000 \times (\frac{1}{2})^{2n}$$

$$\Rightarrow 2^n \geq 2000$$

因為 $2^{10} = 1024 < 2000 < 2^{11} = 2048$

故取 $n = 11$

故第 11 日後，A 菌是 B 菌的 2000 倍以上（含 2000 倍）。



習題 1

於某次實驗中，細菌 1 日後增加 k 倍，且已知三日後，細菌數為 200000 個，五天後，細菌數為 1800000 個，試求 k 之值。

習題 2

根據實驗，某種細菌原有的數目為 n ，經過 t 天後細菌的數目變成 $n \cdot a^t$ ，已知 3 天後、6 天後細菌的數目依序為 5×10^6 、 4×10^7 ，試求：

(1) a 的值？ (2) 10 天後細菌的數目為何？

習題 3

周杰於五年前投入十萬元投資美元，當時臺幣與美元之匯率為 33（即 1 美元可換 33 元臺幣），經 5 年後贖回，此期間平均每年投資報酬率為 4%，但贖回時臺幣升值，臺幣與美元之匯率為 30（即 1 美元可換 30 元臺幣），試求贖回時周杰淨賺臺幣多少元？（已知 $1.04^5 \approx 1.2167$ ）

習題 4

小芳身體不舒服，需依照醫生指示服藥，假設在服藥後 k 小時，殘留在胃裡的藥量尚有 $G(k) = 450 \times (0.64)^k$ 毫克，根據此關係回答下面兩個問題：

- (1) 經過 1.5 小時後藥量殘存多少毫克？
(2) 自 k 小時到 $k+1$ 小時內吸收的藥量，與 k 小時後殘留藥量的比值為何？

習題 5

若放射性物質重量變為原來的一半所需的時間稱為該物質的半衰期。現有某一放射性物質，在經過 2 年後重量剩下 16 克，而經過 6 年後則重量剩下 1 克。試問若重量剩下不到 $\frac{1}{1000}$ 則至少需要多少年？



解答與解析

習題 1 : $k = 2$

習題 2 : (1) $a = 2$ (2) 6.4×10^8

習題 3 : 臺幣 10609 元

習題 4 : (1) 230.4 毫克 (2) $\frac{9}{25}$

習題 5 : 至少需要 16 年。