

選修數學

進階
講義

上

複數的極式

大同高中·陳盈穎老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\equiv$

16-3-2 複數的極式



定理敘述

1. 複數極式

(1) 定義：用長度和角度表示複數在複數平面上的位置，稱為極式

$$z = a + bi = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

$$(a) r = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

(b) θ 稱為 z 的幅角，有無限多個，當 $0 \leq \theta < 2\pi$ 時 θ 稱為 z 的主幅角，以 $\text{Arg}(z) = \theta$ 表示

(2) 特徵：

(a) 實部為餘弦(cos)，虛部為正弦(sin)

(b) 以“+”號連接

(c) cos 跟 sin 的角度相等

2. 複數極式的運算：需化為極式(如上述特徵)方可使用

$$\text{設 } z_1 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad z_2 = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$(1) \text{乘法： } z_1 \times z_2 = r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)]$$

$$(2) \text{除法： } \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)]$$



定理證明或說明

◆ 複數極式的運算

$$(1) \text{乘法： } z_1 \times z_2 = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

$$\begin{aligned} &= r_1 r_2 [(\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\sin \theta_1 \cos \theta_2 + \cos \theta_1 \sin \theta_2)] \\ &= r_1 r_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

$$(2) \text{除法： } \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{z_2 \overline{z_2}} = \frac{z_1 \overline{z_2}}{|z_2|^2} = \frac{1}{r_2^2} \times r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \times r_2(\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2))$$

$$= \frac{r_1}{r_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2)], \quad \text{其中 } \overline{z_2} = r_2[\cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2)]$$



注意事項

複數極式的運算需化為極式方可使用

關鍵字

極式

例題 1

$z = \sin \frac{7\pi}{12} + i \cos \frac{7\pi}{12}$ ，則 $\text{Arg}(z) =$ _____

Ans : $\frac{11\pi}{12}$

解： $z = \sin \frac{7\pi}{12} + i \cos \frac{7\pi}{12} = \cos(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12}) + i \sin(\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{12})$
 $= \cos(-\frac{\pi}{12}) + i \sin(-\frac{\pi}{12}) = \cos(\frac{11\pi}{12}) + i \sin(\frac{11\pi}{12})$

例題 2

複數 $1 + \cos 60^\circ - i \sin 60^\circ$ 的極式為 _____

Ans : $\sqrt{3}(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$

解： $1 + \cos 60^\circ - i \sin 60^\circ = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \sqrt{(\frac{3}{2})^2 + (-\frac{\sqrt{3}}{2})^2} (\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i) = \sqrt{3}(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)$

例題 3

$z = (-5 + 12i)(\cos \theta + i \sin \theta)$ 為一正實數，其中 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，則 θ 為第幾象限角？

(A) 一 (B) 二 (C) 三 (D) 四

Ans : (C)

解：設複數 $-5 + 12i = 13(\cos \phi + i \sin \phi)$ ，其中主幅角 ϕ 為第二象限角

$$\therefore z = (-5 + 12i)(\cos \theta + i \sin \theta) = 13(\cos(\phi + \theta) + i \sin(\phi + \theta))$$

因為 z 為正實數 $\Rightarrow \phi + \theta = 2\pi$ ，故 θ 為第三象限角

例題 4

複數 z_1 、 z_2 在複數平面上分別表 A 、 B 兩點， O 為原點，且 $|z_1| = 3$ 、 $|z_2| = 4$ ， $|z_1 - z_2| = 5$ ，
試求 $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : $\frac{\pi}{2}$

解：因為 $|z_1| = 3$ 、 $|z_2| = 4$ ， $|z_1 - z_2| = 5$ ，得 $\overline{OA} = 3$ ， $\overline{OB} = 4$ ， $\overline{AB} = 5$

所以 $\angle AOB = \frac{\pi}{2}$ ，故所求 $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \angle AOB = \frac{\pi}{2}$

例題 5

設複數 $z = \frac{4(\cos 127^\circ + i \sin 127^\circ)(\sqrt{3} - i)}{(\sin 53^\circ + i \cos 53^\circ)} = a + bi$ ， $a, b \in \mathbb{R} \Rightarrow (a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : $(4\sqrt{3}, 4)$

解： $z = \frac{4(\cos 127^\circ + i \sin 127^\circ)(\sqrt{3} - i)}{(\sin 53^\circ + i \cos 53^\circ)} = \frac{4(\cos 127^\circ + i \sin 127^\circ) \times 2(\cos 330^\circ + i \sin 330^\circ)}{\cos 37^\circ + i \sin 37^\circ}$
 $= 8(\cos(127^\circ + 330^\circ - 37^\circ) + i \sin(127^\circ + 330^\circ - 37^\circ))$
 $= 8(\cos 420^\circ + i \sin 420^\circ) = 4\sqrt{3} + 4i$

故所求 $(a, b) = (4\sqrt{3}, 4)$

例題 6

$\text{Arg}(z + 3i) = 70^\circ$ 、 $\text{Arg}(z - 3i) = 340^\circ \Rightarrow |z| = \underline{\hspace{2cm}}$

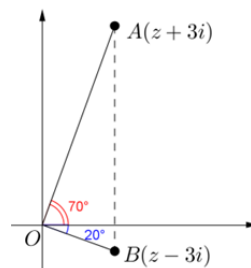
Ans : 3

解：如圖，設在複數平面中兩點 $A(z + 3i)$ ， $B(z - 3i)$ ，原點 O

則 $z = \frac{(z + 3i) + (z - 3i)}{2}$ 為 $\overline{AB}$ 中點

$\angle AOB = 70^\circ + 20^\circ = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 6$

得所求 $|z| = \frac{1}{2} \overline{AB} = 3$





溫故知新

習題 1

$-1+i$ 之極式為_____

習題 2

設 $z_1 = 2+ai$, $z_2 = 2b+(2-b)i$, $a, b \in R$, 若 $|z_1| = \sqrt{3}|z_2|$ 且 $\text{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 3

複數 $1+2i$ 、 $1+3i$ 的主幅角分別為 θ_1 、 θ_2 , 則 $\theta_1 + \theta_2 = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 4

ΔABC 中 , $(\cos A + i \sin A)(\cos B + i \sin B)(\cos C + i \sin C) = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 5

若複數 z 滿足等式 $z(\sin 50^\circ + i \cos 50^\circ) = 2(\cos 50^\circ + i \sin 50^\circ)$, 則 z 之極式為_____

習題 6

$\text{Arg}(z+2) = 160^\circ$ 、 $\text{Arg}(z-2) = 70^\circ \Rightarrow |z| = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 7

【學測 101】

設 O 為複數平面上的原點 , 並令點 A, B 分別代表非零複數 z, w 。若 $\angle AOB = 90^\circ$, 則下列哪些選項必為負實數 ?

- (1) $\frac{z}{w}$ (2) zw (3) $(zw)^2$ (4) $\frac{z^2}{w^2}$ (5) $(z\bar{w})^2$ (其中 $\bar{w}$ 為 w 的共軛複數)

習題 8

【指考甲 98】

複數 $z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}$ 、 $z_2 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$ 與它們的乘積 $z_1 z_2$ 在複數平面上對應的點分別為 P 、 Q 與 R 。則 $\angle QPR$ 等於下列哪一個選項 ? (1) $\frac{\pi}{12}$ (2) $\frac{\pi}{10}$ (3) $\frac{\pi}{9}$ (4) $\frac{\pi}{8}$ (5) $\frac{\pi}{6}$

習題 9

【學測 91】

令複數 $z = 2\left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}\right)$ 且 $z \cdot i = 2(\cos a\pi + i \sin a\pi)$ ，則實數 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

習題 10

【學測 92】

若 $(4 + 3i)(\cos \theta + i \sin \theta)$ 為小於 0 的實數，則 θ 是第幾象限角？

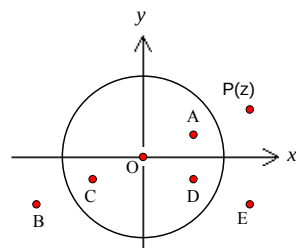
(1) 第一象限角 (2) 第二象限角 (3) 第三象限角 (4) 第四象限角 (5) 條件不足，無法判斷

習題 11

【學測補 92】

如右圖，複數 z 在平面上對應的點 P 在單位圓 O 的外部，問複數 $\frac{1}{z}$ 對應的點大概是哪一點？

(1) A (2) B (3) C (4) D (5) E



習題 12

【指考乙 92】

如圖所示在坐標平面上， $\triangle OAB$ 為一正三角形，其中點 A 的坐標為 $(1, 2)$ ，點 B 為 (b_1, b_2) 。試問下列何者為真？

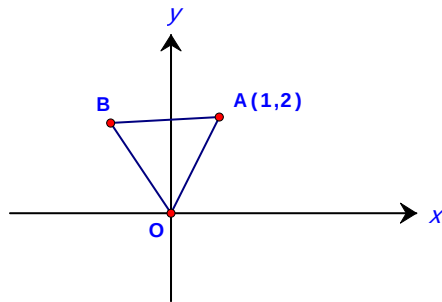
(1) $b_1 + ib_2 = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)(1 + 2i)$

(2) $b_1 + ib_2 = (\cos 60^\circ - i \sin 60^\circ)(1 + 2i)$

(3) $(b_1, b_2) = (-1, 2)$

(4) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$



解答與解析

習題 1： $\sqrt{2}\left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4}\right)$

習題 2： $\left(\frac{4-6\sqrt{6}}{9}, \frac{2\sqrt{6}-6}{9}\right)$

習題 3 : $\frac{3\pi}{4}$

習題 4 : -1

習題 5 : $2(\cos 10^\circ + i \sin 10^\circ)$

習題 6 : 2

習題 7 : (4)(5)

解：依題意得 $\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = 90^\circ$ 或 $\text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = 270^\circ$ ，又負實數之主幅角為 180°

$$(1) \text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = 90^\circ \text{ 或 } \text{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = 270^\circ$$

$$(2) \text{Arg}(zw) \text{ 不一定為 } 180^\circ$$

$$(3) \text{Arg}[(zw)^2] \text{ 不一定為 } 180^\circ$$

$$(4) \text{Arg}\left(\frac{z^2}{w^2}\right) = 180^\circ$$

$$(5) \text{Arg}[(\bar{z}\bar{w})^2] = \text{Arg}\left[\left(\frac{\bar{z}}{\bar{w}}\right)^2\right] = 180^\circ$$

故選(4)(5)

習題 8 : (4)

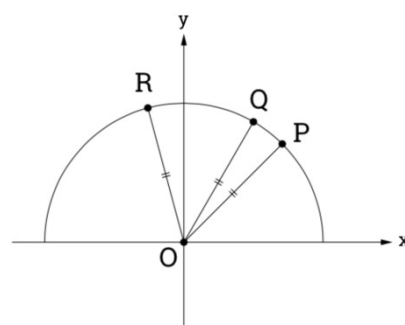
$$\text{解： } z_1 z_2 = \cos \frac{7\pi}{12} + i \sin \frac{7\pi}{12}$$

$$\text{如圖， } \angle POQ = \frac{\pi}{12}, \angle POR = \frac{\pi}{3},$$

$$\text{且 } \overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = 1$$

$$\text{所以 } \angle OPQ = \frac{11\pi}{24}, \angle POR = \frac{\pi}{3}$$

$$\Rightarrow \angle QPR = \frac{11\pi}{24} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{8}, \text{ 故選(4)}$$



習題 9 : $\frac{9}{14}$

$$\text{解： } z \cdot i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right) \cdot i = 2 \left(\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7} \right) \cdot \left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{9\pi}{14} + i \sin \frac{9\pi}{14} \right)$$

$$\Rightarrow a = \frac{9}{14}$$

習題 10 : (2)

解：設複數 $4 + 3i = 5(\cos \phi + i \sin \phi)$ ，其中主幅角 ϕ 為第一象限角

$$\therefore z = (4 + 3i)(\cos \theta + i \sin \theta) = 5(\cos(\phi + \theta) + i \sin(\phi + \theta))$$

因為 z 為負實數 $\Rightarrow \phi + \theta = \pi$ ，故 θ 為第二象限角

故選(2)

習題 11 : (4)

$$\text{解：設 } z = r(\cos \theta + i \sin \theta) \Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

$$\text{由圖知 } r > 1 \Rightarrow \frac{1}{r} < 1$$

故選(4)

習題 12 : (1)(4)

解：若將此坐標平面視為複數平面，

由 $\triangle OAB$ 為一正三角形，得 $\angle AOB = 60^\circ$

$$\text{所以 } b_1 + ib_2 = (\cos 60^\circ + i \sin 60^\circ)(1 + 2i)$$

$$\text{若將點 } B \text{ 視為點 } A \text{ 旋轉 } 60^\circ, \text{ 得 } \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 60^\circ & -\sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

故選(1)(4)