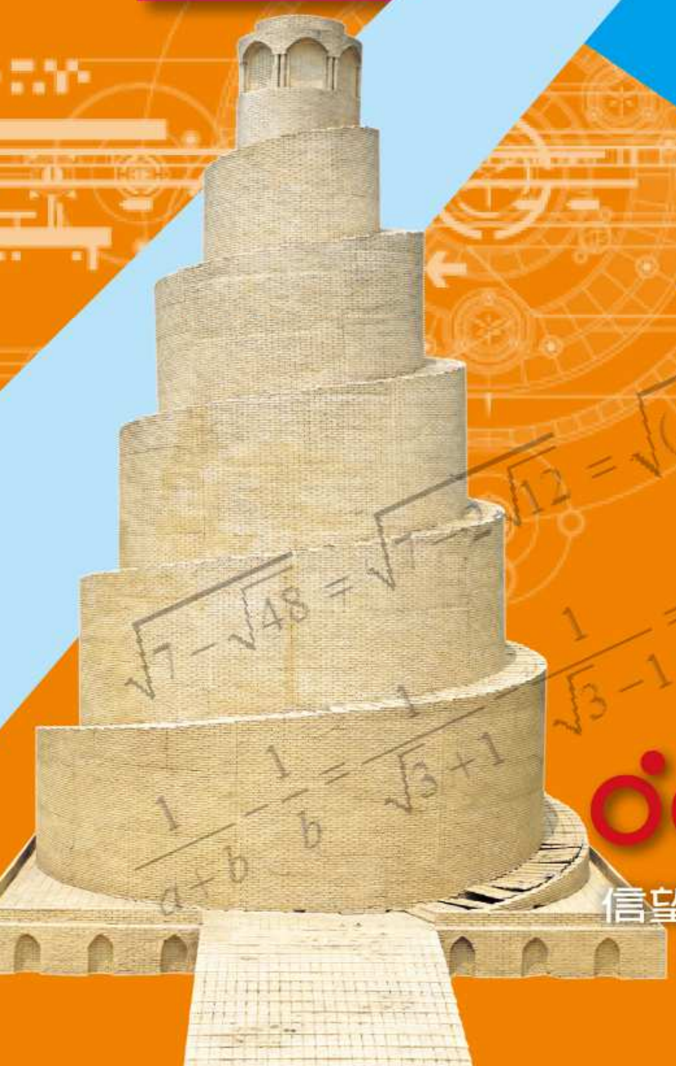
數學 1 進階講義

除法原理

景美女中・莊瑋倫老師



信望愛文教基金會

2-2-3　除法原理

除法原理

1. 設 $f(x)$ 、 $g(x)$ 均為多項式，且 $g(x)\neq 0$ ，則恰有二多項式 $q(x)$ 及 $r(x)$ 滿足 $f(x)=q(x)\cdot g(x)+r(x)$ ，其中 $\deg[r(x)]<\deg[g(x)]$ 或 $r(x)=0$ 。
   即

   被除式=（ 除式×商式 ）＋餘式　　餘式的次數要小於除式的次數或餘式為 0
   $\Leftrightarrow f(x)\div g(x)=Q(x)\ldots\ldots r(x)$

2. 多項式的除法：
   (1)長除法(直式)
   Ex： $f(x)=3x^3+2x^2+1$ 除以 $x-2$ 的商式及餘式？
   Ans： $Q(x)=3x^2+8x+16$ ， $r(x)=33$
   (2)綜合除法(橫式改良)
   Ex： $f(x)=3x^3+2x^2+1$ 除以 $x-2$ 的商式及餘式？

   Ans：
$$
\begin{array}{cccc|c}
3 & +2 & +0 & +1 & 2 \\
 & +(2\times 3) & +(2\times 8) & +(2\times 16) & \\
\hline
3 & +8 & +16 & \boxed{+33} &
\end{array}
$$

3. 綜合除法的應用：求近似值
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots\cdots+a_1x+a_0$$
$$=b_n(x-a)^n+b_{n-1}(x-a)^{n-1}+\cdots+b_1(x-a)+b_0\text{ ，其中 }a_n=b_n$$

注意事項

1. 使用分離係數法時，缺項請補零。
2. 餘式的次數要小於除式的次數或餘式為 0。

例題 1

(1)求 $4x^4+5x^2+3x-2$ 除以 $2x-1$ 的商式及餘式

(2)求 $27x^3-6x^2-13x-4$ 除以 $3x+2$ 的商式及餘式

Ans：

(1)

$$\begin{array}{rrrrr|l} 4 & +0 & +5 & +3 & -2 & \frac{1}{2} \\ & +2 & +1 & +3 & +3 & \\ \hline 4 & +2 & +6 & +6 & +1 & \\ 2 & +1 & +3 & +3 & & \end{array}$$

(the row $4\ +2\ +6\ +6$ is divided by 2)

$Q(x)=2x^3+x^2+3x+3$，$r=1$

(2)

$$\begin{array}{rrrr|l} 27 & -6 & -13 & -4 & -\frac{2}{3} \\ & -18 & +16 & -2 & \\ \hline 27 & -24 & +3 & -6 & \\ 9 & -8 & +1 & & \end{array}$$

(the row $27\ -24\ +3$ is divided by 3)

$Q(x)=9x^2-8x+1$，$r=-6$

例題 2

設 $f(x)$ 除以 $ax-b(a\neq 0)$ 所得之商為 $q(x)$，餘式為 r，則

(1) $f(x)$ 以 $x-\frac{b}{a}$ 除之，其商式為________，餘式為________。

(2) $xf(x)$ 以 $ax-b$ 除之，其商式為________，其餘式為________。

(3) $xf(x)$ 以 $x-\frac{b}{a}$ 除之，其餘式為________。

Ans：

(1)

$$\begin{aligned} f(x) &= (ax-b)q(x)+r \\ &= a(x-\frac{b}{a})q(x)+r \end{aligned}$$

商式=$aq(x)$，餘式=r

(2)

$$\begin{aligned} & f(x)=(ax-b)q(x)+r \\ \Rightarrow\ & xf(x)=x(ax-b)q(x)+rx \\ & = x(ax-b)q(x)+\left[\frac{r}{a}(ax-b)+\frac{br}{a}\right] \\ & = (ax-b)\left[x\cdot q(x)+\frac{r}{a}\right]+\frac{br}{a} \end{aligned}$$

商式=$x\cdot q(x)+\frac{r}{a}$，餘式=$\frac{br}{a}$

(3)

$$\begin{aligned} & f(x)=(ax-b)q(x)+r \\ \Rightarrow\ & xf(x)=(ax-b)\left[x\cdot q(x)+\frac{r}{a}\right]+\frac{br}{a} \\ & = a(x-\frac{b}{a})\left[x\cdot q(x)+\frac{r}{a}\right]+\frac{br}{a} \end{aligned}$$

餘式=$\frac{br}{a}$

例題 3

設 $xf(x)$ 除以 x^2+x+1 得餘式為 $5x+3$，則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 得餘式為______。

Ans：

由除法原理可知

$$f(x)=Q_1(x)\cdot(x^2+x+1)+(ax+b)$$

$$\begin{aligned}xf(x)&=x\cdot Q_1(x)\cdot(x^2+x+1)+(ax^2+bx)\\&=x\cdot Q_2(x)\cdot(x^2+x+1)+[(b-a)x-a]\\&=x\cdot Q_2(x)\cdot(x^2+x+1)+(5x+3)\end{aligned}$$

$$\begin{cases}b-a=5\\-a=3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=-3\\b=2\end{cases}$$

故得餘式為 $-3x+2$

例題 4

已知 $f(x)$ 、 $g(x)$ 被 x^2+2x+3 除其餘式分別為 $4x-3$ 、 $3x+2$ ，則

(1) $3f(x)+2g(x)$ 被 x^2+2x+3 除其餘式為____________

(2) $f(x)g(x)$ 被 x^2+2x+3 除其餘式為____________

Ans：

(1)由除法原理可知

$$f(x)=Q_1(x)(x^2+2x+3)+(4x-3)$$

$$g(x)=Q_2(x)(x^2+2x+3)+(3x+2)$$

$$\begin{aligned}3f(x)+2f(x)&=3Q_1(x)(x^2+2x+3)+(12x-9)+2Q_2(x)(x^2+2x+3)+(6x+4)\\&=(x^2+2x+3)\left[3Q_1(x)+2Q_2(x)\right]+(18x-5)\end{aligned}$$

餘式=$18x-5$

(2)

所求為 $(4x-3)\times(3x+2)$ 除以 x^2+2x+3 之餘式

故，餘式=$-25x-42$

例題 5

設 $f(x)=x^4-3x^3+x^2+x+20$ ，

(1)若 $f(x)=a(x-2)^4+b(x-2)^3+c(x-2)^2+d(x-2)+e$ ，

試求數對 $(a,b,c,d,e)=$________ 。

(2)求 $f(1.99)$ 之近似值至小數第二位

Ans：

(1)

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{ccccc|c}
1 & -3 & +1 & +1 & +20 & 2 \\
 & +2 & -2 & -2 & -2 & \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{cccc|c}
1 & -1 & -1 & -1 & +18 \\
 & +2 & +2 & +2 & \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{ccc|c}
1 & +1 & +1 & +1 \\
 & +2 & +6 & \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{cc|c}
1 & +3 & +7 \\
 & +2 & \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{cc}
1 & +5
\end{array}
\end{array}
$$

$(a,b,c,d,e)=\ (1,5,7,1,18)$

(2)由上題可知 $f(x)=(x-2)^4+5(x-2)^3+7(x-2)^2+(x-2)+18$

$$
\begin{aligned}
f(1.99)&=(1.99-2)^4+5(1.99-2)^3+7(1.99-2)^2+(1.99-2)+18 \\
&=(-0.01)^4+5(-0.01)^3+7(-0.01)^2+(-0.01)+18 \\
&\approx 17.99
\end{aligned}
$$

例題 6

設 $f(x)=x^5+x^4-10x^3-10x^2+x+5$ ，試求 $f(1+\sqrt{2})=$____________ 。

Ans：

$$
\begin{array}{l}
\begin{array}{cccccc|c}
1 & +1 & -10 & -10 & +1 & +5 & 1 \\
 & +1 & +2 & -8 & -18 & -17 & \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{ccccc|c}
1 & +2 & -8 & -18 & -17 & -12 \\
 & +1 & +3 & -5 & -23 & \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{cccc|c}
1 & +3 & -5 & -23 & -40 \\
 & +1 & +4 & -1 & \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{ccc|c}
1 & +4 & -1 & -24 \\
 & +1 & +5 & \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{cc|c}
1 & +5 & +4 \\
 & +1 & \\ \hline
\end{array} \\
\begin{array}{cc}
1 & +6
\end{array}
\end{array}
$$

$$
\begin{aligned}
f(x)&=(x-1)^5+6(x-1)^4+4(x-1)^3-24(x-1)^2-40(x-1)-12 \\
f(1+\sqrt{2})&=(\sqrt{2})^5+6(\sqrt{2})^4+4(\sqrt{2})^3-24(\sqrt{2})^2-40(\sqrt{2})-12 \\
&=-36-28\sqrt{2}
\end{aligned}
$$

溫故知新

習題 1

設 $f(x)$ 為一多項式，以 $f(x)$ 除 $2x^3+3x^2+9$ 得商式 $x+2$ ，餘式 $-x+3$ ，

則 $f(x)=$__________ 。

習題 2

設 $f(x)$ 為多項式，且 $\dfrac{4x^3+3x-1}{f(x)}=2x+1-\dfrac{3}{f(x)}$ ，求 $f(x)$ =__________ 。

習題 3

以 x^2+3x+4 除 $\left(x^2+4x+2\right)^3$ 的餘式=__________ 。

習題 4

以 x^2+2x+3 除 $\left(x^2+3x+4\right)^4$ 所得的餘式=__________ 。

習題 5

設 $xf(x)$ 被 x^2+x+1 除，其餘式為 $3x+4$ ，

則 $f(x)$ 除以 x^2+x+1 所得的餘式=__________ 。

習題 6

設 $P(x)=8x^3-4x^2-12x+3=a(2x-1)^3+b(2x-1)^2+c(2x-1)+d$ ，則序對 (a,b,c,d) =__________ ， $P(0.499)$ 的近似值=__________ 。(取到小數第三位)

習題 7

化簡 $2\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)^4+\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)^3-\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)^2-11\left(\dfrac{3+\sqrt{17}}{4}\right)+5=$__________ 。

習題 8 【聯考社會組 87】

若多項式 x^3+4x^2+5x-3 除以 $f(x)$ 的商式為 $x+2$ 、餘式為 $2x-1$ ，則 $f(x)=$__________ 。

習題 9 【學測 94】

若多項式 x^2+x+2 能整除 $x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q$，則 $p=$______，$q=$______。

解答與解析

習題 1：$2x^2-x+3$

習題 2：$2x^2-x+2$

習題 3：$35x+28$

習題 4：4

習題 5：$-4x-1$

習題 6：$(1,2,-5,-3)$；-2.990

習題 7：8

習題 8：

由除法原理可知

$$x^3+4x^2+5x-3=f(x)\cdot(x+2)+(2x-1)$$
$$x^3+4x^2+3x-2=f(x)\cdot(x+2)$$
$$\Rightarrow f(x)=x^2+2x-1$$

習題 9：

$$\begin{array}{r|l}
 & x^3 \qquad -x+4 \\ \hline
x^2+x+2\ ) & x^5+x^4+x^3+px^2+2x+q \\
 & x^5+x^4+2x^3 \\ \hline
 & -x^3+px^2+2x+q \\
 & -x^3-x^2-2x \\ \hline
 & (p+1)x^2+4x+q \\
 & 4x^2+4x+8 \\ \hline
 & (p-3)x^2 \qquad +(q-8)
\end{array}$$

$\because$ 整除

$$\therefore \begin{cases} p-3=0 \\ q-8=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p=3 \\ q=8 \end{cases}$$