

# 數學 2

進階  
講義

## 相異物的直線排列

淡水商工 · 姚盈孜 老師



信望愛文教基金會

## 5-2-1 相異物的直線排列

### 定理敘述

1.  $n$  個相異物排成一列的方法數為  $n!$ 。
2.  $n$  個相異物從中，任取  $r$  個排成一列的排列數為  $P_r^n = \frac{n!}{(n-r)!}$ 。

### 定理證明或說明

1.  $n$  個相異物排成一列的排列數為  $1 \times 2 \times \cdots \times n = n!$ 。
2. 從  $n$  個相異物中，任取  $r$  個排成一列的排列數為
$$P_r^n = \overbrace{n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times (n-(r-1))}^{r \text{個}} = \frac{n!}{(n-r)!}。$$

### 注意事項

1.  $0! = 1$ 。
2.  $P_r^n$  須滿足  $n \geq r$ 。

### 關鍵字

階乘、直線排列、錯排

#### 例題 1

求下列各題中  $n$  之值：

- (1)  $P_2^n = 72$ 。
- (2)  $P_3^n = 12 \times P_2^{n-2}$ 。

Ans :

- (1) 由  $P_2^n = 72$  可得  $n(n-1) = 72$ ，展開整理因式分解後得  $n = 9$  或  $-8$ （負不合）

故  $n = 9$ 。

- (2) 由  $P_3^n = 12 \times P_2^{n-2}$  可得  $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) = 12 \cdot (n-2) \cdot (n-3)$ ，  
因為  $n-2 \geq 2$ ，得  $n \geq 4$ ，因此  $n-2 \neq 0$ ，故可將  $n-2$  消去，  
得  $n \cdot (n-1) = 12 \cdot (n-3)$ ，展開整理因式分解後得  $n = 9$  或  $4$ 。

### 例題 2

從 0、1、2、3、4、5 中取 3 個不重複的數字排成 3 位數，共有幾種排法？

Ans：

(6 個數字任取 3 個) - (取到 0 且 0 排首位)，

$$\begin{array}{ccc} \square, \square, \square & 0, \square, \square \\ \underset{6}{\square}, \underset{5}{\square}, \underset{4}{\square} & \underset{5}{\square}, \underset{4}{\square} \end{array}$$

故答案為  $6 \times 5 \times 4 - 5 \times 4 = 100$ 。

### 例題 3

4 男 4 女排成一列，試問下列的排法數：

- (1) 女生皆不相鄰。
- (2) 男女相間隔。
- (3) 男生皆相鄰且女生皆相鄰。

Ans：

- (1) 女生皆不相鄰，所以先排男生再將女生從中插入間隔，

男生 4 人排成一列，排列數為  $4!$ ，

再將女生插入間格， $\_ \text{男} \_ \text{男} \_ \text{男} \_ \text{男} \_$ ，所以乘上  $5 \times 4 \times 3 \times 2$ ，

故答案為  $4! \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 = 2880$ 。

- (2) 只有「男女男女男女男女」及「女男女男女男女男」兩種排法，

而男生四人及女生四人排上去都是  $4!$  種排法，

故答案為  $2 \times 4! \times 4! = 1052$ 。

- (3) 將男、女生各視為一組， $\textcircled{\text{男男男男}}$  與  $\textcircled{\text{女女女女}}$ ，

兩組做直線排列為  $2!$ ，

男生可交換，故乘上 $4!$ ，

女生也可交換，再乘上 $4!$ ，

因此答案為 $2! \times 4! \times 4! = 1152$ 。

#### 例題 4

甲、乙、丙、丁、戊、己共六人排成一列，試問下列的排法數：

- (1) 甲、乙、丙相鄰，丁、戊不相鄰。
- (2) 甲不排首，乙不排末。
- (3) 甲不排首，乙不排第二，丙不排第三。

Ans :

- (1) 丁、戊不相鄰，先排其他人，

而甲、乙、丙要相鄰，則將甲、乙、丙看成一組，

故先排（甲乙丙）、己，排列數為 $2!$ ，

甲乙丙可交換，乘上 $3!$ ，

最後將丁、戊兩人插入在不同間格內，注意不能插入在甲乙丙之間，

所以再乘上 $3 \times 2$ ，

故答案為 $2! \times 3! \times 3 \times 2 = 72$ 。

- (2) 全 - 甲排首 - 乙排末 + 甲首且乙末，

若甲排首，則剩下 5 人作直線排列，故排列數為 $5!$ ，

乙排末與甲排首相同，

甲首且乙末，則剩中間 4 人作排列，故排列數為 $4!$ ，

所以答案為 $6! - 5! - 5! + 4! = 504$ 。

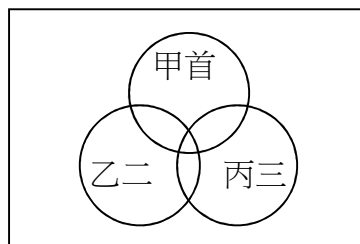
- (3) 全 - 甲首 - 乙二 - 丙三 + 甲首乙二 + 乙二丙三 + 甲首丙三 - 甲首乙二丙三，

如圖，

故答案為 $6! - 5! - 5! - 5! + 4! + 4! + 4! - 3!$

$$= 6! - 3 \times 5! + 3 \times 4! - 3!$$

$$= 426$$





## 溫故知新

### 習題 1

若  $P_3^{n+1} : P_4^n = 3:10$ ，試求  $n$  之值。

### 習題 2

五男四女排成一列，試問下列各有幾種排法：

- (1) 男生相鄰且女生相鄰。
- (2) 男女相間隔。

### 習題 3

有  $A、B、C、D、E、F$  共 6 人排成一列，試問下列各有幾種排法：

- (1) 任意排。
- (2)  $A$  排首。
- (3)  $A$  不排首。
- (4)  $ABC$  皆相鄰。
- (5)  $ABC$  皆不相鄰。

### 習題 4

小明、小英、小傑、...共 5 人參加接力比賽，若小明不跑第一棒，小英不跑第二棒，小傑不跑最後一棒，則共有幾種跑法？

### 習題 5

將 0、1、2、3、4、5 排成一六位數，共可排出幾種六位數？

### 習題 6

【學測 95】

某地共有 9 個電視頻道，將其分配給 3 個新聞台、4 個綜藝台及 2 個體育台共三種類型。若同類型電視台的頻道要相鄰，而且前兩個頻道保留給體育台，則頻道的分配方式共有幾\_\_\_\_\_種。

某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼為 O 以外的英文大寫字母，後四碼為 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如：AA1234，AB4434 為可出現的車牌號碼；而 AO1234，AB3444 為不可出現的車牌號碼。則所有第一碼為 A 且最後一碼為 4 的車牌號碼個數為

- (1)  $25 \times 93$  (2)  $25 \times 92 \times 10$  (3)  $25 \times 900$  (4)  $25 \times 990$  (5)  $25 \times 999$ 。

棒球比賽每隊的先發守備位置有九個：投手、捕手、一壘手、二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野各一位。某一棒球隊有 18 位可以先發的球員，由教練團認定可擔任的守備位置球員數情形如下：

- (一) 投手 4 位、捕手 2 位、一壘手 1 位、二壘手 2 位、三壘手 2 位、游擊手 2 位；  
 (二) 外野手 4 位（每一位外野手都可擔任右外野、中外野或左外野的守備）；  
 (三) 另外 1 位是全隊人氣最旺的明星球員，他可擔任一壘手與右外野的守備。

已知開幕戰的比賽，確定由某位投手先發，而且與此投手最佳搭檔的先發捕手也已確定，並由人氣最旺的明星球員擔任一壘手守備，其餘六個守備位置就上述可擔任的先發球員隨意安排，則此場開幕戰共有\_\_\_\_\_種先發守備陣容。（當九個守備位置只要有一個球員不同時，就視為不同的守備陣容）

## 解答與解析

習題 1：8

習題 2：(1) 5760 (2) 2880

習題 3：(1) 720 (2) 120 (3) 600 (4) 144 (5) 144

習題 4：64

習題 5：600

習題 6：

如右圖，3 台新聞台與 4 台綜藝台可對調，

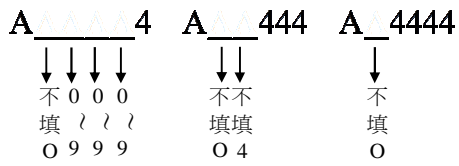
相同類型的頻道可自己交換，

故答案為  $2! \times 2! \times 3! \times 4! = 576$ 。

體<sub>1</sub>體<sub>2</sub> 新<sub>1</sub>新<sub>2</sub>新<sub>3</sub> 綜<sub>1</sub>綜<sub>2</sub>綜<sub>3</sub>綜<sub>4</sub>

習題 7 : (D)

全 - 3個4相鄰 - 4個4，如下圖



因此答案為

$$25 \times 10^3 - 25 \times 9 - 25 = 25 \times (1000 - 9 - 1) = 25 \times 990,$$

故選(4)。

習題 8 :

投手、捕手、一壘手已確定人選，

僅剩二壘手、三壘手、游擊手、右外野、中外野、左外野需選人，

二壘手 2 位選 1 位、三壘手 2 位選 1 位、游擊手 2 位選一位，

外野手 4 位選 3 位分別當右、中、左外野手，

故答案為  $2 \times 2 \times 2 \times 4 \times 3 \times 2 = 192$ 。