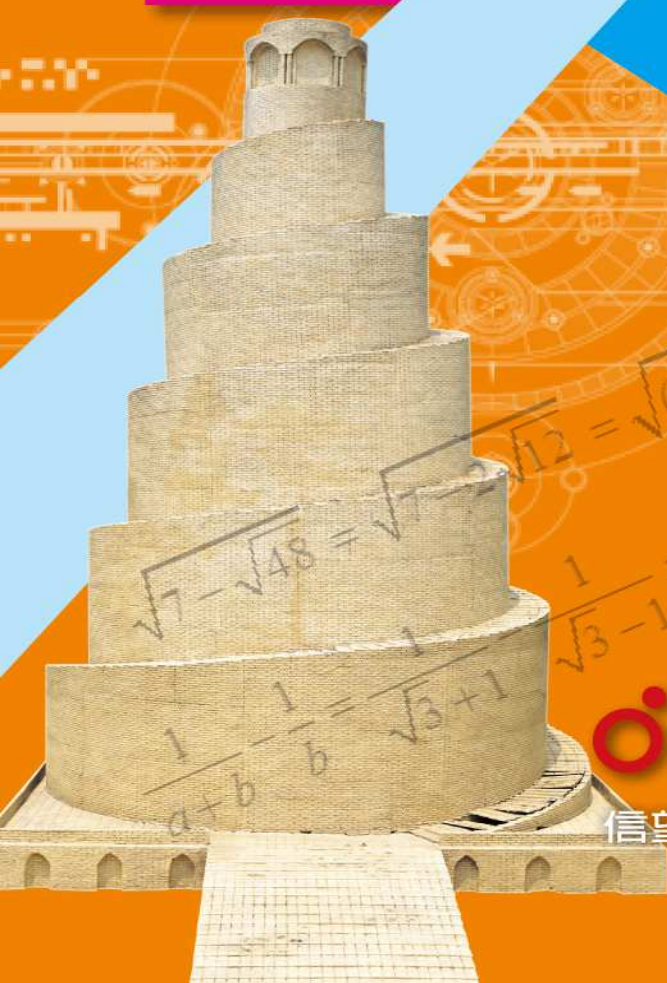


高中數學

進階
講義

空間中的平面

陳清海 老師



信望愛文教基金會

ok42 空間中的平面與直線

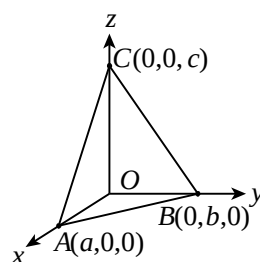
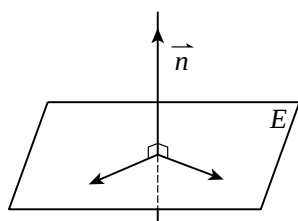
ok421 空間中的平面

主題一、平面方程式

1. 法向量及其性質：

當非零向量 $\vec{n}$ 所在的直線與平面 E 垂直時，

我們稱 $\vec{n}$ 為平面 E 的一個法向量，如下左圖所示。



法向量具有兩個重要性質：

- (1) 平面 E 的法向量並不是唯一的，但是這些法向量都互相平行。
- (2) 平面 E 的法向量與 E 上的所有向量皆垂直。

2. 點法式：

通過點 $A(x_0, y_0, z_0)$ ，且以非零向量 $\vec{n} = (a, b, c)$ 為法向量之平面 E 的方程

式為 $E: a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ 或 $ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$ 。

當平面 E 的法向量為 (a, b, c) 時，可以假設其方程式為 $ax + by + cz = d$ ，

再由其他條件求得 d 值。

3. 截距式：

當我們知道平面 E 與三坐標軸的交點為 $A(a, 0, 0)$ ， $B(0, b, 0)$ ， $C(0, 0, c)$ ，

其中 $abc \neq 0$ 時， E 的方程式為 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ 。

【例題 1】

求通過點 $A(3, 2, 1)$ ，且以 $(1, -2, 3)$ 為法向量的平面方程式。

Ans : $x - 2y + 3z = 2$

【詳解】

利用點法式，得平面方程式為

$$1(x - 3) + (-2)(y - 2) + 3(z - 1) = 0,$$

整理得 $x - 2y + 3z = 2$ 。

【類題 1】

設 $A(2, -2, 1)$ ， $B(1, 2, 3)$ 是空間中兩點。

已知直線 AB 和平面 E 垂直於 B 點，求平面 E 的方程式。

Ans : $x - 4y - 2z = -13$

【詳解】

因為直線 AB 和平面 E 垂直，

所以 $\overrightarrow{AB} = (-1, 4, 2)$ 是平面 E 的一個法向量，

又因為 E 通過點 $B(1, 2, 3)$ ，

所以由點法式得 $(-1)(x - 1) + 4(y - 2) + 2(z - 3) = 0$ ，

整理得 $-x + 4y + 2z = 13$ 或 $x - 4y - 2z = -13$ 。

【例題 2】

求通過點 $A(2, 0, -1)$ ，且和平面 $E_1: 4x - y + 2z = 1$ 平行之平面 E_2 的方程式。

Ans : $4x - y + 2z = 6$

【詳解】

因為 E_1 與 E_2 平行，所以它們的法向量都平行，

又因為 $(4, -1, 2)$ 是 $E_1: 4x - y + 2z = 1$ 的一個法向量，

所以，也是 E_2 的一個法向量，

因此可令 E_2 的方程式為 $4x - y + 2z = d$ 。

將 $A(2, 0, -1)$ 代入此式，得

$$d = 4 \cdot 2 - 0 + 2 \cdot (-1) = 6,$$

故 E_2 的方程式為 $4x - y + 2z = 6$ 。

【類題 2】

已知平面 $E_1: 2x - by + cz = d$ 和 $E_2: 6x + 3y + 9z = 3$ 平行，
且 E_1 通過點 $(2, -3, 1)$ ，求 b, c, d 的值。

Ans: $b = -1, c = 3, d = 4$

【詳解】

因為 E_1 與 E_2 平行，所以它們的法向量都平行，

因此 E_1 的法向量 $\vec{n}_1 = (2, -b, c)$ 與

E_2 的法向量 $\vec{n}_2 = (6, 3, 9)$ 平行，

即 $(6, 3, 9) = t(2, -b, c)$ ，

解得 $t = 3, b = -1, c = 3$ 。

因為 E_1 通過點 $(2, -3, 1)$ ，

所以將其代入 $2x + y + 3z = d$ ，得 $d = 4$ 。

故 $b = -1, c = 3, d = 4$ 。

【例題 3】

求通過 $A(1, 3, 2), B(2, 4, 1), C(3, 7, 1)$ 三點之平面 E 的方程式。

Ans: $3x - y + 2z = 4$

【詳解】

由 A, B, C 三點的坐標可得

$$\vec{AB} = (1, 1, -1), \quad \vec{AC} = (2, 4, -1),$$

且 $\vec{AB}$ 與 $\vec{AC}$ 的外積為 $\vec{AB} \times \vec{AC} = (3, -1, 2)$ 。

因為外積 $\vec{AB} \times \vec{AC}$ 與 $\vec{AB}, \vec{AC}$ 均垂直，

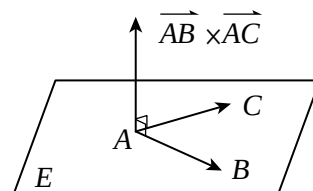
所以 $(3, -1, 2)$ 是平面 E 的一個法向量，

並令 E 的方程式為 $3x - y + 2z = d$ 。

因為 E 通過點 $(1, 3, 2)$ ，

所以 $d = 3 \cdot 1 - 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 4$ ，

故平面 E 的方程式為 $3x - y + 2z = 4$ 。



【類題 3】

求通過 $A(1, 3, 2)$, $B(2, 3, 1)$, $C(3, 1, 2)$ 三點之平面 E 的方程式。

Ans : $x + y + z = 6$

【詳解】

由 A, B, C 三點的坐標可得

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -1), \quad \overrightarrow{AC} = (2, -2, 0),$$

且 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的外積為

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-2, -2, -2) = (-2)(1, 1, 1).$$

因為外積 $\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 均垂直,

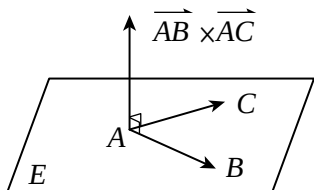
所以 $(1, 1, 1)$ 是平面 E 的一個法向量,

並令 E 的方程式為 $x + y + z = d$.

因為 E 通過點 $(1, 3, 2)$, 所以

$$d = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 = 6,$$

故平面 E 的方程式為 $x + y + z = 6$.

**【例題 4】**

已知通過 $A(2, 0, 0)$, $B(0, -1, 0)$, $C(0, 0, 3)$ 三點之平面 E 的方程式為 $ax + by + cz = 24$, 求 a, b, c 的值。

Ans : $a = 12, b = -24, c = 8$

【詳解】

由 A, B, C 三點的坐標可得

$$\overrightarrow{AB} = (-2, -1, 0), \quad \overrightarrow{AC} = (-2, 0, 3),$$

且 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{AC}$ 的外積為

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (-3, 6, -2) = (-1) \cdot (3, -6, 2).$$

因為外積 $\vec{AB} \times \vec{AC}$ 與 $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ 均垂直,

所以 $(3, -6, 2)$ 是平面 E 的一個法向量,

並令 E 的方程式為 $3x - 6y + 2z = d$.

因為 E 通過點 $(2, 0, 0)$, 所以

$$d = 3 \cdot 2 - 6 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 6,$$

因此平面 E 的方程式為

$$3x - 6y + 2z = 6 \text{ 或 } 12x - 24y + 8z = 24,$$

即 $a = 12, b = -24, c = 8$.

【解二】

由平面的截距式,

$$\text{可得平面 } E \text{ 的方程式為 } \frac{x}{2} + \frac{y}{-1} + \frac{z}{3} = 1,$$

兩邊同乘以 24 可化成 $12x - 24y + 8z = 24$,

即 $a = 12, b = -24, c = 8$.

【類題 4-1】

已知平面 E 通過 $A(12, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, -2)$ 三點,
而且 $D(2, 1, k)$ 也是 E 上的一點, 求 k 的值.

Ans : -1

【詳解】

因為平面通過 x, y, z 軸上的三點

$A(12, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, -2)$,

所以可得平面 E 的方程式為 $\frac{x}{12} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$,

又因為 $D(2, 1, k)$ 也是 E 上的一點,

所以代入 $\frac{x}{12} + \frac{y}{3} + \frac{z}{-2} = 1$, 得 $\frac{2}{12} + \frac{1}{3} + \frac{k}{-2} = 1$,

解得 $k = -1$.

【類題 4-2】

已知平面 E 的 3 個截距均相等, 且通過點 $(2, 3, 6)$, 求 E 的方程式.

Ans : $\frac{x}{11} + \frac{y}{11} + \frac{z}{11} = 1$

【詳解】

設平面 E 的 3 個截距均為 a .

由截距式可設 E 的方程式為 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$.

將 $(2, 3, 6)$ 代入 $\frac{x}{a} + \frac{y}{a} + \frac{z}{a} = 1$, 解得 $a = 11$,

因此 E 的方程式為 $\frac{x}{11} + \frac{y}{11} + \frac{z}{11} = 1$.

【例題 5】

設 $A(3, 2, 1)$, $B(5, -4, 3)$, 求 $\overline{AB}$ 的垂直平分面方程式 (簡稱 $\overline{AB}$ 的中垂面) .

Ans : $x - 3y + z = 9$

【詳解】

設 E 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分面 .

因為 E 通過 $\overline{AB}$ 的中點 $(4, -1, 2)$,

又 $\overrightarrow{AB} = (2, -6, 2) = 2(1, -3, 1)$ 為 E 的法向量,

所以可設 E 的方程式為 $x - 3y + z = d$.

將 $(4, -1, 2)$ 代入得 $d = 9$,

故 E 的方程式為 $x - 3y + z = 9$.

【類題 5】

設 $A(3, 1, 2)$, $B(1, b, c)$, 且 $\overline{AB}$ 的垂直平分面 E 的方程式為 $4x - 4y + 2z = d$, 求 b, c, d 的值 .

Ans : $b = 3, c = 1, d = 3$

【詳解】

設 E 為 $\overline{AB}$ 的垂直平分面 .

因為 $\overrightarrow{AB} = (-2, b-1, c-2)$ 與 E 的法向量 $(4, -4, 2)$ 平行,

即 $(4, -4, 2) = t(-2, b-1, c-2)$,

所以解得 $t = -2, b = 3, c = 1$,

並得 B 點的坐標為 $(1, 3, 1)$.

又因為 E 通過 $\overline{AB}$ 的中點,

由 $A(3, 1, 2), B(1, 3, 1)$

可得 $\overline{AB}$ 的中點為 $(2, 2, \frac{3}{2})$,

代入 E 的方程式 $4x - 4y + 2z = d$, 得 $d = 3$.

故 $b = 3, c = 1, d = 3$.

【例題 6】

已知平面 E 通過點 $(1, 1, -2)$, 且與兩平面 $E_1: x + 2y - z = 1$, $E_2: x - y + z = 2$ 均垂直, 求 E 的方程式.

Ans: $x - 2y - 3z = 5$

【詳解】

設平面 E 的法向量為 $\vec{n}$.

因為 E 與 E_1, E_2 均垂直,

所以 $\vec{n}$ 與 E_1, E_2 的法向量

$\vec{n}_1 = (1, 2, -1), \vec{n}_2 = (1, -1, 1)$ 均垂直,

即 $\vec{n} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$.

計算 $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = (1, -2, -3)$,

因為 $\vec{n} \parallel \vec{n}_1 \times \vec{n}_2$,

所以可令 $\vec{n} = (1, -2, -3)$,

並設 E 的方程式為 $x - 2y - 3z = d$.

將 $(1, 1, -2)$ 代入, 得 $d = 5$,

故 E 的方程式為 $x - 2y - 3z = 5$.

【類題 6】

求通過 $A(1, 0, 1), B(2, 2, 2)$ 兩點, 且與平面 $F: 2x + y + 2z = 3$ 垂直之平面 E 的方程式.

Ans: $x - z = 0$

【詳解】

設平面 E 的法向量為 $\overrightarrow{n}$.

因為平面 E 通過 A, B 兩點, 所以 $\overrightarrow{n} \perp \overrightarrow{AB} = (1, 2, 1)$,

又 E 與 F 垂直, 因此 $\overrightarrow{n}$ 與 F 的法向量 $\overrightarrow{n_F} = (2, 1, 2)$ 垂直 .

即 $\overrightarrow{n} // \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{n_F} = (1, 2, 1) \times (2, 1, 2) = (3, 0, -3) = 3(1, 0, -1)$.

令 $\overrightarrow{n} = (1, 0, -1)$, 並設 E 的方程式為 $x - z = d$.

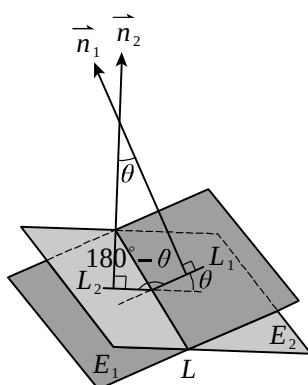
將 $A(1, 0, 1)$ 代入, 得 $d = 0$,

故 E 的方程式為 $x - z = 0$.

主題二、兩平面的夾角

設平面 E_1 , E_2 的法向量分別為 $\vec{n}_1$, $\vec{n}_2$. 若兩法向量 $\vec{n}_1$ 與 $\vec{n}_2$ 的夾角為 θ ,

則平面 E_1 與 E_2 的夾角為 θ 與 $180^\circ - \theta$, 而且 $\cos\theta = \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|}$.



【例題 7】

求兩平面 $E_1: 2x - y - z = 4$ 和 $E_2: x - 2y + z = 8$ 的夾角。

Ans: 60° 與 120°

【詳解】

設 θ 為平面 E_1 的法向量 $\vec{n}_1 = (2, -1, -1)$ 與

平面 E_2 的法向量 $\vec{n}_2 = (1, -2, 1)$ 的夾角。

$$\text{因為 } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2 \times 1 + (-1) \times (-2) + (-1) \times 1}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \times \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 1^2}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

所以 θ 等於 60° ,

因此兩平面的夾角為 60° 與 $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ 。

【類題 7】

求兩平面 $E_1: 2x + 3y + 6z = 10$ 和 $E_2: 3x - 6y + 2z = 5$ 的夾角。

Ans: 90°

【詳解】

設 θ 為平面 E_1 的法向量 $\vec{n}_1 = (2, 3, 6)$

與平面 E_2 的法向量 $\vec{n}_2 = (3, -6, 2)$ 的夾角。

$$\text{因為 } \cos \theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \frac{2 \times 3 + 3 \times (-6) + 6 \times 2}{\sqrt{2^2 + 3^2 + 6^2} \times \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 2^2}} = 0,$$

所以 θ 為 90° ，即兩平面互相垂直。

【例題 8】

為了提高接收的效率，太陽能板在接收太陽光時，板面一直保持和太陽光垂直。現在設定空間坐標，將地面設為 xy 平面，發現經過點 $A(\sqrt{2}, 5, 5)$ 的太陽光射到太陽能板 E 上的點 $B(0, 4, 4)$ ，求

(1) 平面 E 的方程式。

(2) 平面 E 與地面之夾角 θ 的值。

Ans : (1) $\sqrt{2}x + y + z = 8$, (2) 60° 與 120°

【詳解】

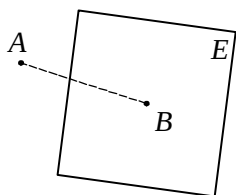
(1) 因為平面 E 和太陽光垂直，

所以 $\overrightarrow{BA} = (\sqrt{2}, 1, 1)$ 是 E 的一個法向量。

令 E 的方程式為 $\sqrt{2}x + y + z = d$,

將點 $B(0, 4, 4)$ 代入，得 $d = 8$,

故 E 的方程式為 $\sqrt{2}x + y + z = 8$.



(2) 因為 xy 平面的方程式為 $z = 0$, 其法向量為 $(0, 0, 1)$,

又 $(\sqrt{2}, 1, 1)$ 是平面 $\sqrt{2}x + y + z = 8$ 的一個法向量，所以

$$\cos \theta = \frac{(0, 0, 1) \cdot (\sqrt{2}, 1, 1)}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{2} ,$$

解得 $\theta = 60^\circ$.

因此平面 E 與地面夾角為 60° 與 $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$.

【類題 8】

為了提高接收的效率，太陽能板在接收太陽光時，板面一直保持和太陽光垂直．現在設定空間坐標，將地面設為 xy 平面，經過一段時間，太陽能板的板面與地面的夾角是 45° ，此時太陽光通過點 $C(3, 8, t)$ (t 是一個正數) 射到板面上的點 $B(0, 4, 4)$ ，求 t 的值．

Ans : 9

【詳解】

因為板面和太陽光垂直，

所以 $\overrightarrow{BC} = (3, 4, t - 4)$ 是 E 的一個法向量，

而 xy 平面的方程式為 $z = 0$,

其法向量為 $(0, 0, 1)$ ，因此

$$\frac{|(3, 4, t - 4) \cdot (0, 0, 1)|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (t - 4)^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \cos 45^\circ ,$$

即 $\frac{|t-4|}{\sqrt{25+(t-4)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ ，解得 $t=9$ 或 -1 。

又因為 $t > 0$ ，所以 $t=9$ 。

主題三、點到平面的距離公式

1. 點 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $E: ax + by + cz = d$ 的距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 - d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.
2. 兩平行平面 $E_1: ax + by + cz = d_1$ 和 $E_2: ax + by + cz = d_2$ 的距離為 $\frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$.

【例題 9】

求點(3, 2, 3)到平面 $x + 2y - 2z = 4$ 的距離。

Ans : 1

【詳解】

利用點到平面的距離公式，得到距離為

$$\frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 - 2 \cdot 3 - 4|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{|-3|}{3} = 1.$$

【類題 9-1】

已知點(1, 1, -1)到平面 $4x - 4y - 7z = d$ 的距離為 2，求 d 的值。

Ans : 25 或 -11

【詳解】

利用點到平面的距離公式，得

$$\frac{|4 \cdot 1 - 4 \cdot 1 - 7 \cdot (-1) - d|}{\sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-7)^2}} = \frac{|7 - d|}{9} = 2,$$

解得 $d = 25$ 或 -11 。

【類題 9-2】

已知點 $A(2, 3, 1)$ 到平面 $E: 3x - 2y + 4z = k$ 的距離為點 $B(-2, 3, 1)$ 到平面 E 之距離的 3 倍，求 k 的值。

Ans : -5 或 -14

【詳解】

利用點到平面的距離公式，得

$$\frac{|3 \cdot 2 - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - k|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}} = 3 \times \frac{|3 \cdot (-2) - 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - k|}{\sqrt{3^2 + (-2)^2 + 4^2}},$$

解得 $k = -5$ 或 -14 。

【例題 10】

求兩平行平面 $E_1: x + y - 4z = 1$ 和 $E_2: x + y - 4z = 7$ 的距離。

Ans : $\sqrt{2}$

【詳解】

利用兩平行平面的距離公式，
得平面 E_1 與 E_2 的距離為

$$\frac{|1-7|}{\sqrt{1^2+1^2+(-4)^2}} = \frac{6}{3\sqrt{2}} = \sqrt{2} .$$

【類題 10】

已知兩平行平面 $E_1: 3x-2y-6z=1$ 和 $E_2: 3x-2y-6z=k$ 的距離為 1，
求 k 的值。

Ans : 8 或 -6

【詳解】

利用兩平行平面的距離公式，
得平面 E_1 與 E_2 的距離為

$$\frac{|1-k|}{\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}} = \frac{|1-k|}{7} = 1 ,$$

即 $|1-k|=7$ ，解得 $k=8$ 或 -6 。

【例題 11】

求兩相交平面 $E_1: 3x+y+2z=3$ ， $E_2: x+2y+3z=3$ 的角平分面方程式。

Ans : $2x-y-z=0$ 與 $4x+3y+5z=6$

【詳解】

因為角平分面上的點到兩平面的距離相等，
所以由距離公式得

$$\frac{|3x+y+2z-3|}{\sqrt{3^2+1^2+2^2}} = \frac{|x+2y+3z-3|}{\sqrt{1^2+2^2+3^2}} ,$$

解得 $3x+y+2z-3 = \pm(x+2y+3z-3)$ ，

故得角平分面方程式為

$2x-y-z=0$ 與 $4x+3y+5z=6$ 。

【類題 11】

求兩相交平面 $E_1: x+2y+2z=1$ ， $E_2: 3x+4y=2$ 的角平分面方程式。

Ans : $14x+22y+10z=11$ 與 $4x+2y-10z=1$

【詳解】

因為角平分面上的點到兩平面的距離相等，
所以由距離公式得

$$\frac{|x+2y+2z-1|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}} = \frac{|3x+4y-2|}{\sqrt{3^2+4^2}},$$

解得 $5(x+2y+2z-1) = \pm 3(3x+4y-2)$,

故得角平分面方程式為

$14x+22y+10z=11$ 與 $4x+2y-10z=1$.

重要精選考題

基礎題

1. 關於平面 $E: 3x + 4y + 5z = 6$ ，選出正確的選項：

- (1) 點 $(1, -3, 3)$ 在平面 E 上
- (2) 點 $(3, -2, 1)$ 在平面 E 上
- (3) 向量 $(3, 4, 5)$ 是平面 E 上的一個法向量
- (4) 向量 $(-6, -8, -10)$ 是平面 E 上的一個法向量
- (5) 原點到平面 E 的最短距離為 6。

Ans : (1)(2)(3)(4)

【詳解】

- (1) 因為 $(1, -3, 3)$ 代入 $3x + 4y + 5z$ 得
 $3 \cdot 1 + 4 \cdot (-3) + 5 \cdot 3 = 6$ ，所以在 E 上。
- (2) 因為 $(3, -2, 1)$ 代入 $3x + 4y + 5z$ 得
 $3 \cdot 3 + 4 \cdot (-2) + 5 \cdot 1 = 6$ ，所以在 E 上。
- (3) 向量 $(3, 4, 5)$ 為平面 E 上的一個法向量。
- (4) 向量 $(-6, -8, -10)$ 與 $(3, 4, 5)$ 平行，
為平面 E 上的一個法向量。
- (5) 原點到平面 E 的最短距離為

$$\frac{|3 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 0 - 6|}{\sqrt{3^2 + 4^2 + 5^2}} = \frac{6}{5\sqrt{2}} \neq 6。$$

由上面的討論可知：

正確的選項為(1)(2)(3)(4)。

2. 求通過點 $(4, 3, 2)$ ，且與 z 軸垂直的平面方程式。

Ans : $z = 2$

【詳解】

因為 z 軸的一個方向向量 $(0, 0, 1)$ 為此平面的法向量，
所以可設平面的方程式為 $z = d$ 。

將 $(4, 3, 2)$ 代入得 $d = 2$ ，

故平面方程式為 $z = 2$ 。

3. 若點 $A(1, 2, 1)$ 對於平面 $ax + by + cz = 2$ 的對稱點為 $B(2, 0, 2)$, 則 a, b, c 的值為何?

Ans : $a = 2, b = -4, c = 2$

【詳解】

因為點 $A(1, 2, 1)$ 對於平面 $ax + by + cz = 2$ 的對稱點為 $B(2, 0, 2)$,

所以 $\overrightarrow{AB} = (1, -2, 1)$ 為平面的法向量,

可設平面的方程式為 $x - 2y + z = d$.

又因為平面通過 $\overline{AB}$ 的中點 $(\frac{3}{2}, 1, \frac{3}{2})$,

所以將其代入 $x - 2y + z = d$ 可得 $d = 1$,

即方程式為 $x - 2y + z = 1$ 或 $2x - 4y + 2z = 2$.

故 $a = 2, b = -4, c = 2$.

4. 在空間中, 連接點 $P(2, 1, 3)$ 與點 $Q(4, 5, 5)$ 的線段 PQ 之垂直平分面方程式為何?

Ans : $x + 2y + z = 13$

【詳解】

設 E 為 $\overline{PQ}$ 的垂直平分面.

因為 E 通過 $\overline{PQ}$ 的中點 $(3, 3, 4)$,

又 $\overrightarrow{PQ} = (2, 4, 2) = 2(1, 2, 1)$ 為 E 的法向量,

所以可設 E 的方程式為 $x + 2y + z = d$.

將 $(3, 3, 4)$ 代入得 $d = 13$.

故 E 的方程式為 $x + 2y + z = 13$.

5. 已知平面 E 的 x 截距為 2, y 截距為 3, 且通過點 $(2, 3, 6)$, 求 E 的方程式.

Ans : $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} = 1$

【詳解】

設平面 E 的 z 截距為 a .

由截距式可設 E 的方程式為 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{a} = 1$.

將 $(2, 3, 6)$ 代入 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{a} = 1$ ，解得 $a = -6$ 。

因此的方程式為 $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} - \frac{z}{6} = 1$ 。

【另解】

E 的 x 截距為 2，即 E 通過 $A(2, 0, 0)$ ，

E 的 y 截距為 3，即 E 通過 $B(0, 3, 0)$ ，

又 $C(2, 3, 6)$ ，得

$$\overrightarrow{AB} = (0, 3, 6), \quad \overrightarrow{AC} = (2, 0, 6),$$

E 的法向量為

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (18, 12, -6) = 6(3, 2, -1),$$

設 $E: 3x + 2y - z = d$ ，

$A(2, 0, 0)$ 代入得 $d = 6$ ，

故 $E: 3x + 2y - z = 6$ 。

6. 已知兩平面 $E_1: x - y - z = 3$ 和 $E_2: x + by + z = 1$ 所夾的銳角 θ 為 60° ，求 b 的值。

Ans: $\pm\sqrt{6}$

【詳解】

由題意可知：

兩平面 $E_1: x - y - z = 3$ 和 $E_2: x + by + z = 1$ 的法向量

分別為 $(1, -1, -1)$ 與 $(1, b, 1)$ ，且

$$\cos \theta = \frac{(1, -1, -1) \cdot (1, b, 1)}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-1)^2} \times \sqrt{1^2 + b^2 + 1^2}} = \pm \cos 60^\circ = \pm \frac{1}{2}.$$

將上式整理為 $\frac{-b}{\sqrt{3} \times \sqrt{b^2 + 2}} = \pm \frac{1}{2}$ ，

將兩邊平方整理得 $b^2 = 6$ ，解得 $b = \pm\sqrt{6}$ 。

7. 已知平面 E 與平面 $2x + 2y + z = 1$ 平行，且 $A(1, 3, 1)$ ， $B(-2, 3, 2)$ 兩點與 E 的距離相等，求 E 的方程式。

Ans: $4x + 4y + 2z = 13$

【詳解】

因為平面 E 與平面 $2x + 2y + z = 1$ 平行，

所以可設 E 方程式為 $2x + 2y + z = d$.

因為 $A(1, 3, 1)$, $B(-2, 3, 2)$ 兩點與 E 的距離相等, 所以

$$\frac{|2 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 - d|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{|2 \cdot (-2) + 2 \cdot 3 + 2 - d|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}},$$

即 $|9 - d| = |4 - d|$, 可得 $9 - d = 4 - d$ 或 $9 - d = d - 4$,

解得 $9 = 4$ (不合) 或 $d = \frac{13}{2}$.

故平面 E 的方程式為 $2x + 2y + z = \frac{13}{2}$.

8. 已知空間中四點 $(0, 0, 3)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 3, 3)$ 與 $(0, a, 0)$ 共平面, 求 a 的值 .

Ans : -3

【詳解】

因為平面通過 $(0, 0, 3)$, $(1, 0, 0)$ 與 $(0, a, 0)$ 三點,

所以可設平面方程式為 $\frac{x}{1} + \frac{y}{a} + \frac{z}{3} = 1$.

將 $(1, 3, 3)$ 代入 $\frac{x}{1} + \frac{y}{a} + \frac{z}{3} = 1$, 得 $\frac{3}{a} = -1$, 解得 $a = -3$.

【另解】

設 $A(0, 0, 3)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 3, 3)$, $D(0, a, 0)$, 則

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -3), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 3, 0), \quad \overrightarrow{AD} = (0, a, -3),$$

其所夾的平行六面體體積為

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & a & -3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -9 - 3a = 0 \Rightarrow a = -3.$$

【另解】

設 $A(0, 0, 3)$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 3, 3)$, $D(0, a, 0)$, 則

$$\overrightarrow{AB} = (1, 0, -3), \quad \overrightarrow{AC} = (1, 3, 0),$$

平面 ABC 的法向量

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = (9, -3, 3) = 3(3, -1, 1),$$

故平面 ABC 的方程式為 $E: 3x - y + z = 3$,

$D(0, a, 0)$ 代入得 $a = -3$ 。

9. 已知 $O(0, 0, 0)$, $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 4)$ 為空間中四點，求四面體 $O-ABC$ 以 ABC 為底面時，其高的長度。

Ans : $\frac{4}{3}$

【詳解】

由 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 2, 0)$, $C(0, 0, 4)$

可得平面 ABC 的方程式為

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{2} + \frac{z}{4} = 1, \text{ 即 } 2x + 2y + z = 4.$$

因為四面體 $O-ABC$ 以 ABC 為底面時，

其高的長度為原點 O 到平面 ABC 的距離，

$$\text{所以高為 } \frac{|2 \cdot 0 + 2 \cdot 0 + 0 - 4|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{4}{3}.$$

進階題

10. 設 P 為第一卦限上的一點。若點 P 到三個坐標平面及平面 $x + y + z = 6$ 的距離皆相同，則點 P 的坐標為何？

Ans : $(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ 或 $(3 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3})$

【詳解】

因為點 P 到三個坐標平面的距離一樣，

且 P 為第一卦限上的一點，

所以可設此距離為 d ，並得點 P 的坐標為 (d, d, d) 。

因為點 P 到平面 $x + y + z = 6$ 的距離也為 d ，所以

$$\frac{|d + d + d - 6|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2}} = d,$$

將兩邊平方整理得： $(3d - 6)^2 = 3d^2$ ，

整理得 $d^2 - 6d + 6 = 0$ ，解得 $3 \pm \sqrt{3}$ 。

故 P 點的坐標為

$$(3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3}) \text{ 或 } (3 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3}).$$

11. 空間中，已知平面 E 通過點 $(3, 0, 0)$ ， $(0, 4, 0)$ 及 z 軸正向上一點 $(0, 0, a)$ ，且平面 E 與 xy 平面的夾角為 45° ，求 a 的值。

Ans : $\frac{12}{5}$

【詳解】

由題意可設平面 E 的方程式為 $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} + \frac{z}{a} = 1$ ，

並得 E 的一個法向量為 $(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{a})$ ，

或改為 $12 \cdot (\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{a}) = (4, 3, \frac{12}{a})$ 。

因為 xy 平面的一個法向量為 $(0, 0, 1)$ ，所以

$$\frac{(0, 0, 1) \cdot (4, 3, \frac{12}{a})}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \times \sqrt{4^2 + 3^2 + (\frac{12}{a})^2}} = \pm \cos 45^\circ = \pm \frac{\sqrt{2}}{2},$$

兩邊平方得 $2(\frac{12}{a})^2 = 25 + (\frac{12}{a})^2$ ，

解得 $a = \pm \frac{12}{5}$ （因為 $a > 0$ ，所以 $-\frac{12}{5}$ 不合），

故 $a = \frac{12}{5}$ 。

12. 設 a, b 為實數。如果空間中某一平面通過 $(a, 0, 0)$ ， $(0, b, 0)$ ， $(0, 0, 3)$ ，

$(1, 2, 3)$ 這些點，則下列哪些選項是正確的？

(1) a, b 有可能都是正數。

(2) a, b 有可能是一個正數一個負數。

(3) a, b 有可能都是負數。

(4) a, b 有可能只有一個等於 0。 【98 指甲】

Ans : (2)

【詳解】

(1) 若 a, b 皆不為 0，則

由截距式可令平面方程式為 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ，

將 $(1, 2, 3)$ 代入得 $\frac{1}{a} + \frac{2}{b} = 0$,

故 a, b 必為一正一負。

(2) 若 $a=0, b \neq 0$, 則由 $(0, 0, 0), (0, b, 0), (0, 0, 3)$

可得此平面方程式為 $x=0$,

但它不通過 $(1, 2, 3)$, 故不合。

(3) 若 $b=0, a \neq 0$, 則由 $(a, 0, 0), (0, 0, 0), (0, 0, 3)$

可得此平面方程式為 $y=0$,

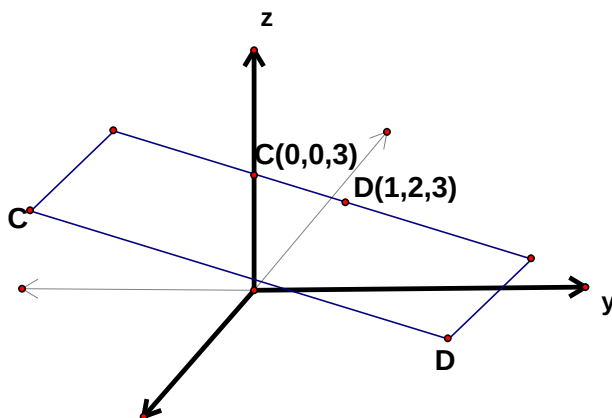
但它不通過 $(1, 2, 3)$, 故不合。

(4) 若 $a=0, b=0$, 則此平面通過

$(0, 0, 0), (0, 0, 3), (1, 2, 3)$

由上討論可知, a 與 b 可能一正一負, 或 $a=b=0$ 。

【備註】開啟下圖, 您可觀察 $\overline{CD}$ 與 x 軸, y 軸的相交情況, 您是否有空間概念?



13. 設 $O(0, 0, 0)$ 為坐標空間中某長方體的一個頂點, 且知 $(2, 2, 1), (2, -1, -2), (3, -6, 6)$ 為此長方體中與 O 相鄰的三頂點. 若平面 $E: x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分, 其中包含頂點 O 的那一部分是個正立方體, 則 b, c, d 的值為何? 【97 學測】

Ans: $b=-2, c=2, d=9$

【詳解】

如右圖,

$$\overline{OA} = \sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2} = 3, \quad \overline{OB} = \sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-2)^2} = 3,$$

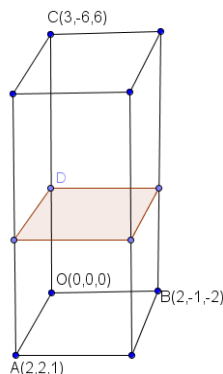
$$\overline{OC} = \sqrt{3^2 + (-6)^2 + 6^2} = 9, \quad \overline{OD} = \frac{1}{3}\overline{OC} = \frac{1}{3} \times 9 = 3,$$

故 $D(1, -2, 2)$,

平面 E 的法向量 $= \overrightarrow{OD} = (1, -2, 2)$, 且過 $D(1, -2, 2)$,

故 $E: x - 2y + 2z = 1 + 4 + 4 = 9$,

即 $b = -2, c = 2, d = 9$ 。



14. 坐標空間中 xy 平面上有一正方形，其頂點為 $O(0,0,0)$, $A(8,0,0)$,

$B(8,8,0)$, $C(0,8,0)$ 。另一點 P 在 xy 平面的上方，且與 O, A, B, C

四點的距離皆等於 6。若 $x + by + cz = d$ 為通過 A, B, P 三點的平面，則 b, c, d 的值為何？【98 學測】

Ans: $b=0, c=2, d=8$

【詳解】

設 $P(4, 4, z)$ ，則

$$4^2 + 4^2 + z^2 = 36 \Rightarrow z^2 = 4 \Rightarrow z = 2, \text{ 即 } P(4, 4, 2)。$$

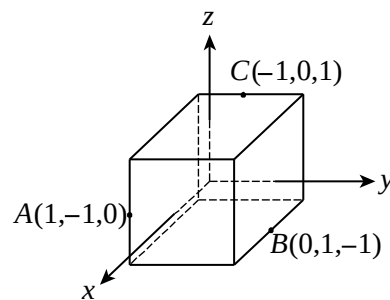
$$A(8, 0, 0) \text{ 代入 } \Rightarrow 8 = d,$$

$$B(8, 8, 0) \text{ 代入 } \Rightarrow 8 + 8b = d \Rightarrow 8b = 0 \Rightarrow b = 0,$$

$$P(4, 4, 2) \text{ 代入 } \Rightarrow 4 + 4b + 2c = d \Rightarrow 4 + 0 + 2c = 8 \Rightarrow c = 2。$$

15. 在坐標空間中，有一邊長為2、中心在原點 O 的正立方體，且各稜邊都與三坐標平面平行或垂直，如圖所示。

已知 $A(1,-1,0)$ 、 $B(0,1,-1)$ 、 $C(-1,0,1)$ 這三點都是某平面 E 和正立方體稜邊的交點。試問下列哪些點也是平面 E 和正立方體稜邊的交點？



(1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$. (2) $(-1, 1, 0)$.

(3) $(0, -1, -1)$. (4) $(-2, 1, 1)$. 【100 指甲】

Ans : (2)

【詳解】

設 $E: ax + by + cz = d$,

$A(1, -1, 0)$ 、 $B(0, 1, -1)$ 、 $C(-1, 0, 1)$ 分別代入得

$a - b = d$, $b - c = d$, $-a + c = d$,

解得 $a = b = c$, $d = 0$, 即 $E: x + y + z = 0$ 。

(1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$ 不在稜邊上。

(2) $(-1, 1, 0)$ 代入，合。

(3) $(0, -1, -1)$ 不在 E 上。

(4) $(-2, 1, 1)$ 不在稜邊上。

16. 坐標空間中，若平面 $E: ax + by + cz = 1$ 滿足以下三條件：

(1) 平面 E 與平面 $F: x + y + z = 1$ 有一夾角為 30° ，

(2) 點 $A(1, 1, 1)$ 到平面 E 的距離等於3，

(3) $a + b + c > 0$ ，

則 $a + b + c$ 的值為何？ 【100 指甲】

Ans : $\frac{1}{3}$

【詳解】

$$\frac{a+b+c}{\sqrt{3}\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots ① ,$$

$$\frac{|a+b+c-1|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = 3 \dots\dots\dots ②$$

$$\textcircled{1} \div \textcircled{2} \Rightarrow \frac{a+b+c}{|a+b+c-1|} = \frac{1}{2}, \text{ 令 } a+b+c=k>0$$

$$\Rightarrow 4k^2 = (k-1)^2$$

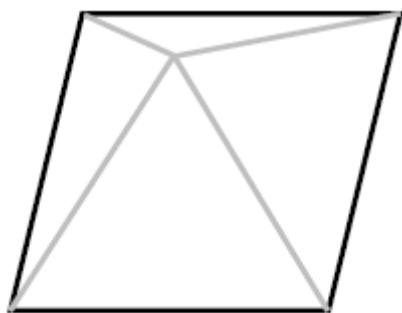
$$\Rightarrow 3k^2 + 2k - 1 = 0$$

$$\Rightarrow (3k-1)(k+1) = 0$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{3} \text{ 或 } k = -1 (\text{不合})。$$

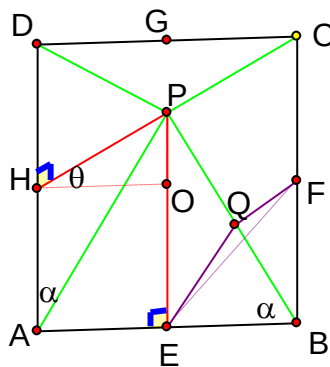
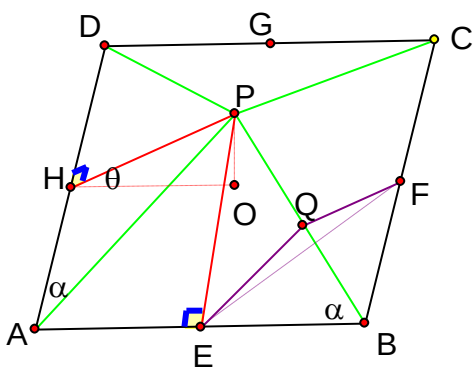
$$\text{故 } k = a+b+c = \frac{1}{3}。$$

17. 在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角 θ 的正切值 $\tan\theta$ 。若一金字塔(底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形)的每一個斜面的坡度皆為 $\frac{2}{5}$ ，如圖。則相鄰斜面的夾角的餘弦函數的絕對值為_____。(化為最簡分數)



Ans : $\frac{25}{29}$

【詳解】



前視圖

如上圖，O 為正方形 ABCD 的中心，P 為頂點。

因 $\tan\theta = \frac{2}{5}$ ，令 $\overline{OP} = 2$ ， $\overline{OH} = 5$ ，則

$$\overline{PH} = \overline{PE} = \sqrt{29}, \quad \overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{54}。$$

在 $\triangle PBE$ 中， $\angle PBE = \alpha$ ， $\sin\alpha = \frac{\overline{PE}}{\overline{PB}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{54}}$ 。

作 $\overline{EQ} \perp \overline{PB}$ 於 Q ，則 $\overline{FQ} \perp \overline{PB}$ ，且兩面角為 $\angle EQF$ 。

在 $\triangle QEF$ 中， $\overline{QE} = \overline{QF} = \overline{BE} \cdot \sin\alpha = 5 \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{54}}$ ，

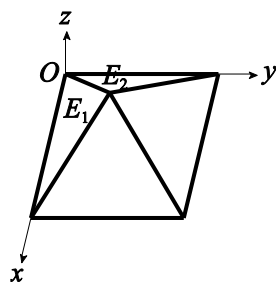
$\overline{EF} = 5\sqrt{2}$ ，利用餘弦定理得

$$\begin{aligned} \cos\angle EQF &= \frac{25 \cdot \frac{29}{54} + 25 \cdot \frac{29}{54} - (5\sqrt{2})^2}{2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{54}} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{54}}} \\ &= \frac{\frac{29}{54} \cdot 2 - 2}{2 \cdot \frac{29}{54}} = \frac{58 - 108}{58} = \frac{-25}{29} \end{aligned}$$

故 $|\cos\angle EQF| = \frac{25}{29}$ 。

【另解】

建立空間坐標系，如下圖。



依題意，得兩斜面方程式為

$$E_1 : z = \frac{2}{5}y \Rightarrow E_1 : 2y - 5z = 0,$$

$$E_2 : z = \frac{2}{5}x \Rightarrow E_2 : 2x - 5z = 0.$$

利用兩法向量 $\vec{n}_1 = (0, 2, -5)$ ， $\vec{n}_2 = (2, 0, -5)$ ，得

$$|\cos \theta| = \frac{\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right|}{\left| \frac{25}{\sqrt{29} \times \sqrt{29}} \right|} = \frac{25}{29}.$$

段考試題精華

1. 求通過點 $A(1,1,1)$ ， $B(2,-4,3)$ 且與平面 $x+2y-z=7$ 垂直的平面方程式。

【師大附中】

Ans : $x + 3y + 7z = 11$

【詳解】

設此平面 E 的方程式為 $ax+by+cz=d$ ，

且 E 有一法向量 $\vec{n}=(a,b,c)$ 。

由題意可知： $\vec{AB}=(2-1,-4-1,3-1)=(1,-5,2)$ ，

$x+2y-z=7$ 的一個法向量 $(1,2,-1)$ ，

且 $\vec{n} \perp \vec{AB}$ ， $\vec{n} \perp (1,2,-1)$ 。

計算 $\vec{AB} \times (1,2,-1) = (1,3,7)$ ，可令 $\vec{n}=(1,3,7)$ ，

得 $E: x+3y+7z=d$ 。因為點 $(1,1,1)$ 在平面 E 上，

代入 $x+3y+7z=d$ 可得 $d=11$ ，

所以 E 的方程式為 $x+3y+7z=11$

2. 關於平面 $E: 2x-3y-z=6$ ，選出正確的選項：

(1) 向量 $(4,-6,-2)$ 為 E 的一個法向量。

(2) 設 A 為平面 E 外之一固定點， P 為 E 上之動點， $\vec{AP}=(a,b,c)$ ，

則 $|\vec{AP}|$ 有最小值時， $\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{1}$ 。

(3) 若平面 $F: x+2y-4z=6$ ，則 E 與 F 垂直。

(4) 點 $(1,2,-4)$ 在平面 E 上。

(5) 平面 E 與三坐標軸所圍成的四面體體積為 6。【松山高中】

Ans : (1)(3)(5)

【詳解】

由題意可知：(2, -3, -1) 是

平面 $E: 2x - 3y - z = 6$ 的一個法向量。

(1) 因為 (4, -6, -2) 與 (2, -3, -1) 平行。

所以向量 (4, -6, -2) 是 E 的一個法向量。

(2) 當 $\overrightarrow{AP}$ 與平面垂直，即與 (2, -3, -1) 平行時，

$|\overrightarrow{AP}|$ 有最小值，因此 $\frac{a}{2} = \frac{b}{-3} = \frac{c}{-1}$ 。

(3) 因為平面 $F: x + 2y - 4z = 6$ 有一法向量 (1, 2, -4)，

且 $(1, 2, -4) \cdot (2, -3, -1) = 0$ ，

即 (1, 2, -4) 與 (2, -3, -1) 垂直，因此 E 與 F 垂直。

(4) 將點 (1, 2, -4) 代入 $2x - 3y - z = 6$ 得 $0 = 6$ (不合)，

因此點 (1, 2, -4) 不在平面 E 上。

(5) 將 $2x - 3y - z = 6$ 寫成截距式 $\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} + \frac{z}{-6} = 1$ ，

可得此平面的 x, y, z 截距分別為 3, -2, -6。

此四面體的體積為 $\frac{1}{6} \cdot 3 \cdot 2 \cdot 6 = 6$ 。

故由上面的討論可知：正確的選項為 (1)(3)(5)。

3. 空間中一點 $P(-1, 3, 2)$ ，對 x 軸、 y 軸、 z 軸的投影點分別為 A, B, C 三點，

求點 P 到平面 ABC 的距離。 【北一女中】

Ans : $\frac{12}{7}$

【詳解】

4. 設平面 $x - 2y - 3z + 7 = 0$ 與 xz 平面的一夾角為 θ ，求 $\cos \theta$ 。 【中山女高】

Ans : $\pm \frac{\sqrt{14}}{7}$

【詳解】

5. 兩平面 $E_1: 3x + 6y + 6z - 1 = 0$ ， $E_2: x + 2y + 2z + 13 = 0$ 的距離為

(1) $\frac{34}{9}$. (2) $\frac{36}{9}$. (3) $\frac{38}{9}$. (4) $\frac{40}{9}$. (5) $\frac{42}{9}$. 【鳳新高中】

Ans : (4)

【詳解】

6. 已知平面 E 通過 $A(2, -1, 1)$ 且與平面 $F_1 : x + 2y - 2z = 3$, $F_2 : 2x - y + 2z = 1$ 均垂直,

(1) 求平面 E 的方程式 .

(2) 設平面 F_1 與 F_2 之夾角為 θ , 求 $\cos \theta$. (二解)

(3) 求 F_1 與 F_2 的角平分面方程式 . (二解) 【松山高中】

Ans : (1) $2x - 6y - 5z = 5$, (2) $\pm \frac{4}{9}$, (3) $x - 3y + 4z + 2 = 0$ 或 $3x + y - 4 = 0$

【詳解】

7. 在空間中, 若平面 E 通過 $A(0, 0, 0)$ 與 $B(1, 2, 3)$, 下列何者不是平面 E 的法向量?

(1) $(0, -1, 1)$. (2) $(-1, -1, 1)$. (3) $(3, 3, -3)$. (4) $(-1, 1, -1)$. (5) $(3, -3, 3)$.

【嘉義女中】

Ans : (1)(4)(5)

【詳解】

8. 設兩平面 $E_1 : 2x + y + kz = 3$ 與 $E_2 : x + y = 5$ 的銳夾角為 45° , 求實數 k 的值 .

【新竹高中】

Ans : ± 2

【詳解】

9. 設 $A(2, 0, 0)$, $B(0, 3, 0)$, $C(0, 0, 1)$. 若平面 E 通過 A, B, C 三點, 求

- (1)平面 E 的方程式 .
(2)平面 E 與坐標軸所圍成之四面體的體積 .
(3)原點 $O(0,0,0)$ 到平面 E 的距離 . 【臺中一中】

Ans : (1) $3x + 2y + 6z = 6$, (2) 1 , (3) $\frac{6}{7}$

【詳解】