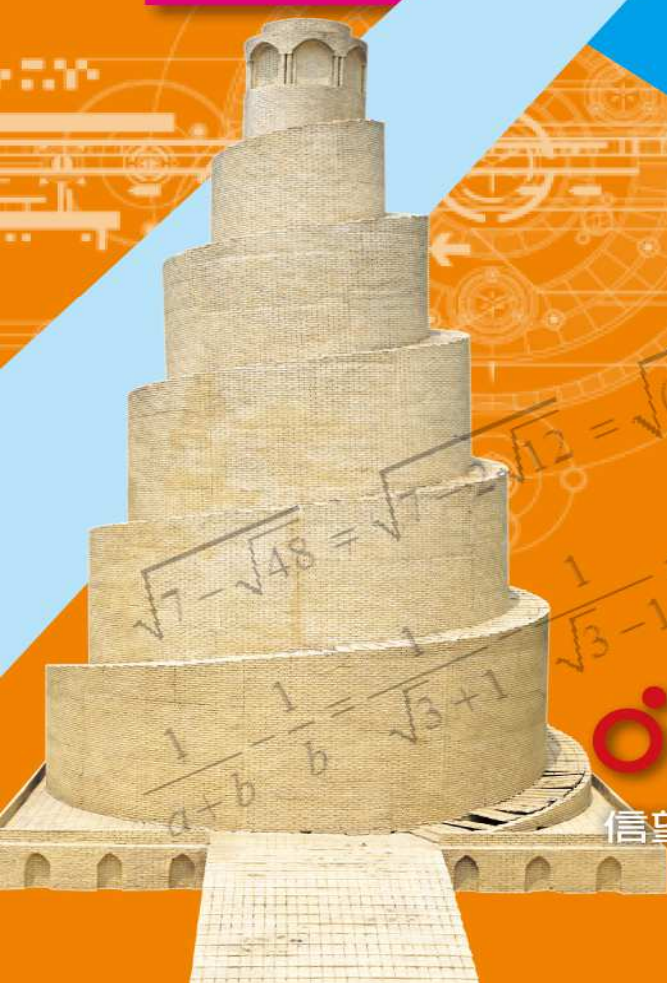


高中數學

進階
講義

差角公式

陳清海 老師



信望愛文教基金會



ok314 差角公式

主題一、正弦、餘弦的和角公式與差角公式

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta.$$

【例題 1】

利用和角公式與差角公式，求下列各值

(1) $\cos 15^\circ$.

(2) $\sin 105^\circ$.

Ans : (1) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$, (2) $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

【詳解】

$$\begin{aligned}(1) \quad \cos 15^\circ &= \cos(45^\circ - 30^\circ) \\ &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ + \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2) \quad \sin 105^\circ &= \sin(45^\circ + 60^\circ) \\ &= \sin 45^\circ \cos 60^\circ + \cos 45^\circ \sin 60^\circ \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} .\end{aligned}$$

【類題 1】

利用和角公式與差角公式，求下列各值

(1) $\cos 75^\circ$.

(2) $\sin 15^\circ$.

Ans : (1) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, (2) $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

【詳解】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \cos 75^\circ &= \cos(45^\circ + 30^\circ) \\
 &= \cos 45^\circ \cos 30^\circ - \sin 45^\circ \sin 30^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} . \\
 (2) \quad \sin 15^\circ &= \sin(45^\circ - 30^\circ) \\
 &= \sin 45^\circ \cos 30^\circ - \cos 45^\circ \sin 30^\circ \\
 &= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} .
 \end{aligned}$$

【例題 2】

求下列各值：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\sin 82^\circ \cos 38^\circ + \cos 82^\circ \sin 38^\circ . \\
 (2) \quad &\cos 17^\circ \cos 28^\circ - \sin 17^\circ \sin 28^\circ .
 \end{aligned}$$

$$\text{Ans : (1) } \frac{\sqrt{3}}{2}, (2) \frac{\sqrt{2}}{2}$$

【詳解】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sin 82^\circ \cos 38^\circ + \cos 82^\circ \sin 38^\circ &= \sin(82^\circ + 38^\circ) = \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} . \\
 (2) \quad \cos 17^\circ \cos 28^\circ - \sin 17^\circ \sin 28^\circ &= \cos(17^\circ + 28^\circ) = \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} .
 \end{aligned}$$

【類題 2】

求下列各值：

$$\begin{aligned}
 (1) \quad &\sin 38^\circ \cos 68^\circ - \cos 38^\circ \sin 68^\circ . \\
 (2) \quad &\cos 175^\circ \cos 25^\circ + \sin 175^\circ \sin 25^\circ .
 \end{aligned}$$

$$\text{Ans : (1) } -\frac{1}{2}, (2) -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

【詳解】

$$\begin{aligned}
 (1) \quad \sin 38^\circ \cos 68^\circ - \cos 38^\circ \sin 68^\circ &= \sin(38^\circ - 68^\circ) = \sin(-30^\circ) = -\frac{1}{2} . \\
 (2) \quad \cos 175^\circ \cos 25^\circ + \sin 175^\circ \sin 25^\circ &= \cos(175^\circ - 25^\circ) = \cos 150^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2} .
 \end{aligned}$$

【例題 3】

已知 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$, 且 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, $\sin \beta = \frac{24}{25}$,

求下列各值：

(1) $\sin(\alpha + \beta)$.

(2) $\cos(\alpha + \beta)$.

Ans : (1) $\frac{44}{125}$, (2) $-\frac{117}{125}$

【詳解】

因為 α 是第一象限角, 且 $\cos \alpha = \frac{3}{5}$, 所以 $\sin \alpha = \frac{4}{5}$.

因為 β 是第二象限角, 且 $\sin \beta = \frac{24}{25}$, 所以 $\cos \beta = -\frac{7}{25}$.

利用和角公式, 得

$$(1) \quad \sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta = \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{24}{25} = \frac{44}{125} .$$

$$(2) \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta = \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{7}{25}\right) - \frac{4}{5} \cdot \frac{24}{25} = -\frac{117}{125} .$$

【類題 3】

已知 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $180^\circ < \beta < 270^\circ$, 且

$\sin \alpha = \frac{3}{5}$, $\cos \beta = -\frac{1}{3}$, 求下列各值：

(1) $\sin(\alpha - \beta)$.

(2) $\cos(\alpha - \beta)$.

Ans : (1) $\frac{-3-8\sqrt{2}}{15}$, (2) $\frac{4-6\sqrt{2}}{15}$

【詳解】

因為 α 是第二象限角, 且 $\sin \alpha = \frac{3}{5}$,

所以 $\cos \alpha = -\frac{4}{5}$.

因為 β 是第三象限角，且 $\cos \beta = -\frac{1}{3}$ ，

所以 $\sin \beta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 。

利用差角公式，得

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin(\alpha - \beta) &= \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta \\ &= \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{-3 - 8\sqrt{2}}{15} . \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) \quad \cos(\alpha - \beta) &= \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta \\ &= \left(-\frac{4}{5}\right) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + \frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right) = \frac{4 - 6\sqrt{2}}{15} . \end{aligned}$$

【例題 4】

$\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A = -\frac{3}{5}$ ， $\cos B = \frac{12}{13}$ ，求 $\cos C$ 的值。

Ans : $\frac{56}{65}$

【詳解】

$$\cos A = -\frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5} ,$$

$$\cos B = \frac{12}{13} \Rightarrow \sin B = \frac{5}{13}$$

$$\begin{aligned} \cos C &= \cos[180^\circ - (A + B)] \\ &= -\cos(A + B) \\ &= -(\cos A \cos B - \sin A \sin B) \\ &= -\left(-\frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} - \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{13}\right) = \frac{56}{65} . \end{aligned}$$

【類題 4】

$\triangle ABC$ 中，已知 $\cos A = \frac{3}{5}$ ， $\cos B = -\frac{5}{13}$ ，求 $\sin C$ 的值。

Ans : $\frac{16}{65}$

【詳解】

$$\cos A = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin A = \frac{4}{5},$$

$$\cos B = -\frac{5}{13} \Rightarrow \sin B = \frac{12}{13}$$

$$\begin{aligned}\sin C &= \sin[180^\circ - (A+B)] \\ &= \sin(A+B) \\ &= \sin A \cos B + \cos A \sin B \\ &= \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{5}{13}\right) + \frac{3}{5} \cdot \frac{12}{13} = \frac{16}{65}.\end{aligned}$$

【例題 5】

設 $\sin \alpha + \sin \beta = \frac{3}{2}$, $\cos \alpha + \cos \beta = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 試求 $\cos(\alpha - \beta)$ 的值.

Ans : $\frac{1}{2}$

【詳解】

$$(\sin \alpha + \sin \beta)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \sin \beta + \sin^2 \beta = \frac{9}{4},$$

$$(\cos \alpha + \cos \beta)^2 = \cos^2 \alpha + 2 \cos \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{3}{4},$$

兩式相加, 得 $1 + 2 \cos(\alpha - \beta) + 1 = 3 \Rightarrow \cos(\alpha - \beta) = \frac{1}{2}$.

【類題 5】

設 $\sin \alpha + \cos \beta = \frac{4}{3}$, $\cos \alpha + \sin \beta = \frac{2}{3}$, 試求 $\sin(\alpha + \beta)$ 的值.

Ans : $\frac{1}{9}$

【詳解】

$$(\sin \alpha + \cos \beta)^2 = \sin^2 \alpha + 2 \sin \alpha \cos \beta + \cos^2 \beta = \frac{16}{9},$$

$$(\cos\alpha + \sin\beta)^2 = \cos^2\alpha + 2\cos\alpha\sin\beta + \sin^2\beta = \frac{4}{9}.$$

$$\text{兩式相加, 得 } 1 + 2\sin(\alpha + \beta) + 1 = \frac{20}{9} \Rightarrow \sin(\alpha + \beta) = \frac{1}{9}.$$

主題二、正切的和角公式與差角公式

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta},$$

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}.$$

其中 $\tan\alpha$, $\tan\beta$, $\tan(\alpha \pm \beta)$ 皆有定義。

【例題 6】

求下列之值：

(1) $\tan 75^\circ$.

(2) $\frac{\tan 58^\circ - \tan 28^\circ}{1 + \tan 58^\circ \tan 28^\circ}$.

Ans : (1) $2 + \sqrt{3}$, (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

【詳解】

$$\begin{aligned} (1) \quad \tan 75^\circ &= \tan(45^\circ + 30^\circ) \\ &= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \\ &= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} \\ &= \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{(\sqrt{3} - 1)(\sqrt{3} + 1)} = \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} \end{aligned}$$

$$=2+\sqrt{3}.$$

$$(2) \quad \frac{\tan 58^\circ - \tan 28^\circ}{1 + \tan 58^\circ \tan 28^\circ} = \tan(58^\circ - 28^\circ)$$

$$= \tan 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【類題 6】

求下列之值：

(1) $\tan 15^\circ$.

(2) $\frac{\tan 18^\circ + \tan 42^\circ}{1 - \tan 18^\circ \tan 42^\circ}$.

Ans : (1) $2 - \sqrt{3}$, (2) $\sqrt{3}$

【詳解】

$$(1) \quad \tan 15^\circ = \tan(45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{(\sqrt{3} + 1)(\sqrt{3} - 1)} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 - \sqrt{3}.$$

$$(2) \quad \frac{\tan 18^\circ + \tan 42^\circ}{1 - \tan 18^\circ \tan 42^\circ} = \tan(18^\circ + 42^\circ)$$

$$= \tan 60^\circ = \sqrt{3}.$$

【例題 7】

$\triangle ABC$ 中，已知 $\tan A = 1$, $\tan B = -2$, 求 $\tan C$ 的值 .

Ans : $\frac{1}{3}$

【詳解】

利用正切的和角公式，得

$$\begin{aligned}\tan C &= \tan(180^\circ - (A+B)) \\ &= -\tan(A+B) \\ &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= -\frac{1+(-2)}{1-1 \times (-2)} = \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

【類題 7】

$\triangle ABC$ 中， $\tan A = \frac{1}{2}$ ， $\tan B = \frac{1}{3}$ ，求 $\angle C$ 。

Ans : -1

【詳解】

$$\begin{aligned}\tan C &= \tan(180^\circ - (A+B)) \\ &= -\tan(A+B) \\ &= -\frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} \\ &= -\frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}} = -1,\end{aligned}$$

所以 $\angle C = 135^\circ$ 。

【例題 8】

$\triangle ABC$ 不為直角三角形，試證：

$$\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C.$$

【證明】

因為 $A+B+C=180^\circ$ ，

即 $A+B=180^\circ-C$ ，

所以 $\tan(A+B) = \tan(180^\circ - C)$

$$\text{得 } \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B} = -\tan C,$$

亦即 $\tan A + \tan B = -\tan C + \tan A \tan B \tan C$

故有 $\tan A + \tan B + \tan C = \tan A \tan B \tan C$.

【類題 8】

求 $\tan 32^\circ + \tan 13^\circ + \tan 32^\circ \tan 13^\circ$ 的值 .

Ans : 1

【詳解】

$$32^\circ + 13^\circ = 45^\circ ,$$

$$\Rightarrow \tan(32^\circ + 13^\circ) = \tan 45^\circ ,$$

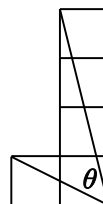
$$\Rightarrow \frac{\tan 32^\circ + \tan 13^\circ}{1 - \tan 32^\circ \tan 13^\circ} = 1 ,$$

$$\Rightarrow \tan 32^\circ + \tan 13^\circ = 1 - \tan 32^\circ \tan 13^\circ ,$$

$$\Rightarrow \tan 32^\circ + \tan 13^\circ + \tan 32^\circ \tan 13^\circ = 1 .$$

【例題 9】

右圖是由五個全等的正方形拼接而成，求 $\tan \theta$ 的值 .



Ans : $\frac{7}{6}$

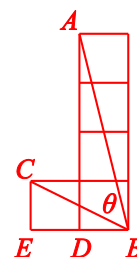
【詳解】

如圖， $\tan \angle ABD = 4$ ， $\tan \angle CBE = \frac{1}{2}$ ，

所以

$$\tan \theta = \tan(\angle ABD - \angle CBE)$$

$$= \frac{4 - \frac{1}{2}}{1 + 4 \cdot \frac{1}{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{7}{3} .$$



【類題 9】

右圖是由三個全等的正方形所形成，求下列之值：

(1) $\tan \alpha$, $\tan \beta$, $\tan \gamma$.

(2) $\tan(\alpha + \beta)$.

(3) $\alpha + \beta + \gamma$.



Ans : (1) $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan \beta = \frac{1}{2}$, $\tan \gamma = 1$, (2) 1, (3) 90°

【詳解】

(1) $\tan \alpha = \frac{1}{3}$, $\tan \beta = \frac{1}{2}$, $\tan \gamma = 1$.

(2) $\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{1}{3} + \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{3} \times \frac{1}{2}} = \frac{\frac{5}{6}}{\frac{5}{6}} = 1$.

(3) 因為 $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$, 得 $0 < \alpha + \beta < \pi$,

且由 $\tan(\alpha + \beta) = 1$ 可得知 $\alpha + \beta = \frac{\pi}{4}$,

又 $\gamma = \frac{\pi}{4}$, 所以 $\alpha + \beta + \gamma = \frac{\pi}{2}$.

主題三、倍角公式

1. 二倍角公式：

(1) $\sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta$.

(2) $\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \sin^2 \theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 2\cos^2 \theta - 1$.

(3) $\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta}$.

2. 三倍角公式：

(1) $\sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta$. (記法：三上富士山上)

(2) $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta$. (記法：塊三 = 四塊三減三塊 (台語))

【例題 10】

設 θ 為第二象限角，且 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ，

試求 $\sin 2\theta$ ， $\cos 2\theta$ 與 $\tan 2\theta$ 的值。

Ans : $\frac{24}{7}$

【詳解】

因為 θ 為第二象限角，且 $\cos\theta = -\frac{3}{5}$ ，

所以 $\sin\theta = \frac{4}{5}$ ， $\tan\theta = -\frac{4}{3}$

利用二倍角公式，得

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \cdot \frac{4}{5} \cdot \left(-\frac{3}{5}\right) = -\frac{24}{25},$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta = 1 - 2 \cdot \frac{16}{25} = -\frac{7}{25},$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \frac{2\left(-\frac{4}{3}\right)}{1-\left(-\frac{4}{3}\right)^2} = \frac{-\frac{8}{3}}{-\frac{7}{9}} = \frac{24}{7}.$$

【類題 10】

設 θ 為第三象限角，且 $\tan\theta = 2$ ，

試求 $\sin 2\theta$ ， $\cos 2\theta$ 與 $\tan 2\theta$ 的值。

Ans : $-\frac{4}{3}$

【詳解】

因為 θ 為第三象限角，且 $\tan\theta = 2$ ，

所以 $\sin\theta = -\frac{2}{\sqrt{5}}$ ， $\cos\theta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

利用二倍角公式，得

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = \frac{4}{5},$$

$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2 \theta = 1 - 2 \cdot \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = -\frac{3}{5},$$

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan \theta}{1 - \tan^2 \theta} = \frac{2 \cdot 2}{1 - 2^2} = -\frac{4}{3}.$$

【例題 11】

已知 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{2}{5}$ ，求 $\sin 2\theta$ 的值。

Ans : $-\frac{21}{25}$

【詳解】

將原式的等號兩邊平方，得

$$(\sin \theta + \cos \theta)^2 = \frac{4}{25}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{4}{25}.$$

$$\Rightarrow 1 + \sin 2\theta = \frac{4}{25},$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = -\frac{21}{25}.$$

【類題 11】

已知 $\sin \theta - \cos \theta = \frac{1}{2}$ ，求 $\sin 2\theta$ 的值。

Ans : $\frac{3}{4}$

【詳解】

將原式的等號兩邊平方，得

$$(\sin \theta - \cos \theta)^2 = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta - 2\sin \theta \cos \theta + \cos^2 \theta = \frac{1}{4}.$$

$$\Rightarrow 1 - \sin 2\theta = \frac{1}{4},$$

$$\Rightarrow \sin 2\theta = \frac{3}{4}.$$

【例題 12】

證明三倍角公式：

$$(1) \sin 3\theta = 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta.$$

$$(2) \cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta.$$

【證明】

$$\begin{aligned} (1) \quad \sin 3\theta &= \sin(2\theta + \theta) \\ &= \sin 2\theta \cos \theta + \cos 2\theta \sin \theta \\ &= 2\sin \theta \cos^2 \theta + (1 - 2\sin^2 \theta) \cdot \sin \theta. \end{aligned}$$

將 $\cos^2 \theta$ 以 $\sin \theta$ 表示，得

$$\begin{aligned} \sin 3\theta &= 2\sin \theta (1 - \sin^2 \theta) + (1 - 2\sin^2 \theta) \cdot \sin \theta \\ &= 3\sin \theta - 4\sin^3 \theta \\ (2) \quad \cos 3\theta &= \cos(2\theta + \theta) \\ &= \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1) \cdot \cos \theta - 2\sin \theta \cos \theta \cdot \sin \theta \\ &= (2\cos^2 \theta - 1) \cdot \cos \theta - 2(1 - \cos^2 \theta) \cdot \cos \theta \\ &= 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta. \end{aligned}$$

【類題 12】

利用三倍角公式，求 $\frac{\sin 36^\circ}{\sin 12^\circ} - \frac{\cos 36^\circ}{\cos 12^\circ}$ 的值。

Ans : 2

【詳解】

$$\frac{\sin 36^\circ}{\sin 12^\circ} - \frac{\cos 36^\circ}{\cos 12^\circ}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{3\sin 12^\circ - 4\sin^3 12^\circ}{\sin 12^\circ} - \frac{4\cos^3 12^\circ - 3\cos 12^\circ}{\cos 12^\circ} \\
 &= 3 - 4\sin^2 12^\circ - 4\cos^2 12^\circ + 3 \\
 &= 6 - 4 = 2.
 \end{aligned}$$

【例題 13】

求 $\sin 18^\circ$ 的值。

Ans : $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

【詳解】

令 $\theta = 18^\circ$ ，得 $5\theta = 90^\circ$ ，即 $2\theta = 90^\circ - 3\theta$ 。

等號兩邊取正弦，

得 $\sin 2\theta = \sin(90^\circ - 3\theta) = \cos 3\theta$ 。

利用二倍角及三倍角公式可把此式化為

$$2\sin\theta\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta.$$

因為 $\cos\theta = \cos 18^\circ \neq 0$ ，

所以將等號兩邊同除以 $\cos\theta$ 後，得

$$2\sin\theta = 4\cos^2\theta - 3 \Rightarrow 2\sin\theta = 4(1 - \sin^2\theta) - 3.$$

整理得 $4\sin^2\theta + 2\sin\theta - 1 = 0$ 。

解上列二次方程式，得

$$\sin\theta = \frac{-2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{4}.$$

因為 $\sin\theta = \sin 18^\circ > 0$ ，

$$\text{所以 } \sin 18^\circ = \frac{-1 + \sqrt{5}}{4} = \frac{\sqrt{5}-1}{4}.$$

【類題 13】

求 $\cos 36^\circ$ 的值。

Ans : $\frac{\sqrt{5}+1}{4}$

【詳解】

令 $\theta = 36^\circ$ ，得 $5\theta = 180^\circ$ ，即 $2\theta = 180^\circ - 3\theta$ 。

等號兩邊取正弦，得

$$\sin 2\theta = \sin(180^\circ - 3\theta) = \sin 3\theta.$$

利用二倍角及三倍角公式可把此式化為

$$2\sin\theta\cos\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

因為 $\sin\theta \neq 0$ ，所以將等號兩邊同除以 $\sin\theta$ 後，得

$$2\cos\theta = 3 - 4\sin^2\theta \Rightarrow 2\cos\theta = 3 - 4(1 - \cos^2\theta).$$

整理得 $4\cos^2\theta - 2\cos\theta - 1 = 0$.

解上列二次方程式，得

$$\cos\theta = \frac{2 \pm \sqrt{4+16}}{8} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{4} \quad (\text{負不合}),$$

$$\cos 36^\circ = \frac{1 + \sqrt{5}}{4}.$$

【例題 14】

右圖是由三個直角三角形堆疊而成的圖形，且 $\overline{OD} = 8$ ， $\angle DOC = 30^\circ$ ， $\angle COB = \angle BOA = 15^\circ$ ，試求 $\overline{AB}$ 長。

Ans : $\sqrt{3}$

【詳解】

$$\overline{OC} = \overline{OD} \cos 30^\circ = 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3},$$

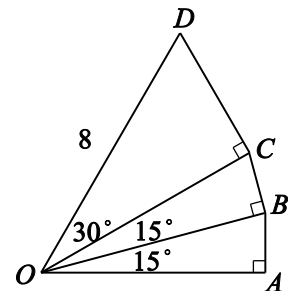
$$\overline{OB} = \overline{OC} \cos 15^\circ, \quad \overline{AB} = \overline{OB} \sin 15^\circ,$$

所以

$$\overline{AB} = \overline{OC} \cos 15^\circ \cdot \sin 15^\circ$$

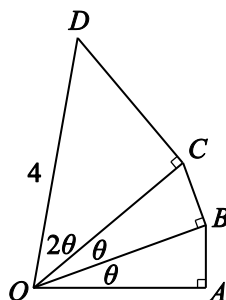
$$= \frac{1}{2} \overline{OC} \sin 30^\circ$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$



【類題 14】

下圖是由三個直角三角形堆疊而成的圖形，且 $\overline{OD} = 4$ ， $\angle COB = \angle BOA = \theta$ ， $\angle DOC = 2\theta$ ，求 $\overline{AB}$ 長。



Ans : $\sin 4\theta$

【詳解】

$$\overline{AB} = \overline{OB} \sin \theta$$

$$= (\overline{OC} \cos \theta) \sin \theta$$

$$= (\overline{OD} \cos 2\theta) \cos \theta \sin \theta$$

因為 $\overline{OD} = 4$ ，所以

$$\overline{AB} = 4 \cos 2\theta \cos \theta \sin \theta = 2 \cos 2\theta \sin 2\theta = \sin 4\theta .$$

主題四、半角公式

$$1. \quad \sin \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} .$$

$$2. \quad \cos \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} .$$

$$3. \quad \tan \frac{\theta}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{1 + \cos \theta}} .$$

其中等號右邊取正或取負，分別由

$\sin \frac{\theta}{2}$ ， $\cos \frac{\theta}{2}$ 及 $\tan \frac{\theta}{2}$ 為正或負決定。

【例題 15】

求 $\sin 22.5^\circ$ 的值。

$$\text{Ans : } \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$$

【詳解】

因為 22.5° 為第一象限角，

所以 $\sin 22.5^\circ$ 為正數。利用半角公式，得：

$$\sin 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}.$$

【類題 15】

求 $\cos 22.5^\circ$ 與 $\tan 22.5^\circ$ 的值。

$$\text{Ans : } \cos 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}, \quad \tan 22.5^\circ = \sqrt{2}-1$$

【詳解】

因為 22.5° 為第一象限角，

所以 $\cos 22.5^\circ$ 及 $\tan 22.5^\circ$ 均為正數。

利用半角公式，得：

$$\cos 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1+\cos 45^\circ}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2},$$

$$\tan 22.5^\circ = \sqrt{\frac{1-\cos 45^\circ}{1+\cos 45^\circ}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{(2-\sqrt{2})^2}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-1.$$

【例題 16】

已知 $180^\circ < \theta < 270^\circ$ 且 $\cos \theta = -\frac{3}{5}$,

求 $\sin \frac{\theta}{2}$, $\cos \frac{\theta}{2}$ 與 $\tan \frac{\theta}{2}$ 的值。

$$\text{Ans : } \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \quad \cos \frac{\theta}{2} = -\frac{\sqrt{5}}{5}, \quad \tan \frac{\theta}{2} = -2$$

【詳解】

因為 $90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$ ，所以

$$\sin \frac{\theta}{2} > 0, \quad \cos \frac{\theta}{2} < 0, \quad \tan \frac{\theta}{2} < 0.$$

利用半角公式，得

$$\sin \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos \theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$\cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1 + \cos \theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{5},$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\frac{2}{\sqrt{5}}}{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = -2.$$

【類題 16】

已知 $90^\circ < \theta < 135^\circ$ ，且 $\sin 2\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

試求 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 的值。

$$\text{Ans : } \sin \theta = \frac{\sqrt{6}}{3}, \quad \cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

【詳解】

因為 $90^\circ < \theta < 135^\circ \Rightarrow 180^\circ < 2\theta < 270^\circ$ ，

且 $\sin 2\theta = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，所以 $\cos 2\theta = -\frac{1}{3}$ ，

又 $90^\circ < \theta < 135^\circ \Rightarrow \sin \theta > 0, \quad \cos \theta < 0$ ，

利用半角公式，得

$$\sin \theta = \sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3},$$

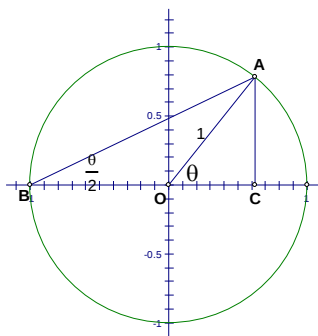
$$\cos \theta = -\sqrt{\frac{1+\cos 2\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = -\sqrt{\frac{1}{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

【例題 17】

若角 $\theta \neq (2n+1)\pi$, n 為整數, 試證: $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}$.

【證明】

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}}{2 \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \theta}{2 \cos^2 \frac{\theta}{2}} = \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}.$$



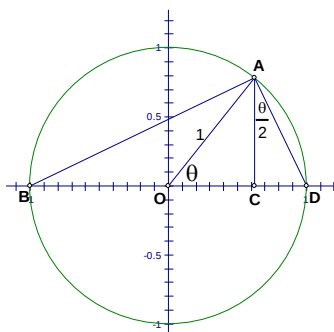
如左圖, $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{BC}} = \frac{\sin \theta}{1+\cos \theta}$ 。

【類題 17】

若角 $\theta \neq (2n+1)\pi$, n 為整數, 試證: $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1-\cos \theta}{\sin \theta}$ 。

【證明】

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sin \frac{\theta}{2}}{\cos \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \cdot \sin \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cdot \cos \frac{\theta}{2} \cdot \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{2 \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\sin \theta} = \frac{1-\cos \theta}{\sin \theta}.$$



如左圖, $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\overline{CD}}{\overline{AC}} = \frac{1-\cos \theta}{\sin \theta}$ 。

【例題 18】

求函數 $f(x) = \sin^2 2x - 3\cos^2 x$ 之最大值與最小值。

Ans : $M = \frac{1}{16}$, $m = -3$

【詳解】

利用平方關係式及餘弦的半角公式得知，

函數 $f(x)$ 可改寫為

$$f(x) = (1 - \cos^2 2x) - 3\left(\frac{1 + \cos 2x}{2}\right) = -\cos^2 2x - \frac{3}{2}\cos 2x - \frac{1}{2},$$

利用配方法，得 $f(x) = -\left(\cos 2x + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{16}$ 。故

(1) 當 $\cos 2x = -\frac{3}{4}$ 時，函數有最大值 $\frac{1}{16}$ 。

(2) 當 $\cos 2x = 1$ 時，函數有最小值 $-\left(1 + \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{1}{16} = -3$ 。

【類題 18】

設 $f(x) = 4\sin^2 x - \cos^2 2x + 1$ 且 x 為任意實數，求 $f(x)$ 的最大值。

Ans : 4

【詳解】

$$f(x) = 4 \cdot \frac{1 - \cos 2x}{2} - \cos^2 2x + 1$$

$$= -\cos^2 2x - 2\cos 2x + 3$$

$$= -(\cos 2x + 1)^2 + 4$$

當 $\cos 2x = -1$ 時，可得最大值 4。

ok314ex

基礎題

1. 求 $\cos 316^\circ \cos 74^\circ - \sin 944^\circ \cos 344^\circ$ 的值。

Ans : $\frac{\sqrt{3}}{2}$

【詳解】

$$\begin{aligned} & \cos 316^\circ \cos 74^\circ - \sin 944^\circ \cos 344^\circ \\ &= \cos 44^\circ \cos 74^\circ - \sin 224^\circ \cos 344^\circ \\ &= \cos 44^\circ \sin 16^\circ - (-\sin 44^\circ) \cos 16^\circ \\ &= \sin(44^\circ + 16^\circ) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

2. $\triangle ABC$ 中, $\sin B \cos C = \cos B \sin C$, 則 $\triangle ABC$ 為何種三角形?

Ans : 等腰三角形

【詳解】

$$\begin{aligned} & \sin B \cos C = \cos B \sin C \\ \Rightarrow & \sin B \cos C - \cos B \sin C = 0 \\ \Rightarrow & \sin(B - C) = 0 \\ \Rightarrow & B - C = 0 \\ \Rightarrow & B = C \\ & \text{故為等腰三角形。} \end{aligned}$$

3. 已知 $270^\circ < \theta < 360^\circ$, 且 $\cos \theta = \frac{3}{5}$, 求下列各式的值:

(1) $\cos 2\theta$.

(2) $\cos \frac{\theta}{2}$.

(3) $\cos 3\theta$.

Ans : (1) $-\frac{7}{25}$, (2) $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, (3) $-\frac{117}{125}$

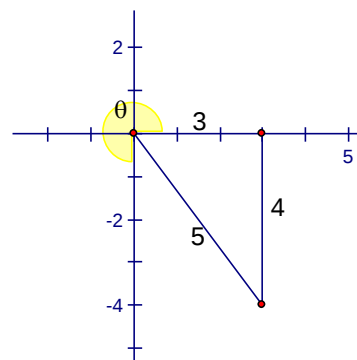
【詳解】

$$(1) \quad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1 = 2 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1 = \frac{-7}{25}.$$

$$(2) \quad \cos \frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}} = -\frac{2}{\sqrt{5}}.$$

$$(270^\circ < \theta < 360^\circ \Rightarrow 135^\circ < \frac{\theta}{2} < 180^\circ \circ)$$

$$(3) \quad \begin{aligned} \cos 3\theta &= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ &= 4 \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^3 - 3 \cdot \frac{3}{5} = -\frac{117}{125}. \end{aligned}$$



4. 設 $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$, 且 $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $\cos\beta = -\frac{3}{\sqrt{10}}$, 求

(1) $\cos(\alpha + \beta)$ 的值.

(2) $\alpha + \beta$ 的度數.

Ans : (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, (2) 315°

【詳解】

如右圖，

(1) $\cos(\alpha + \beta)$ 的值

$$= \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

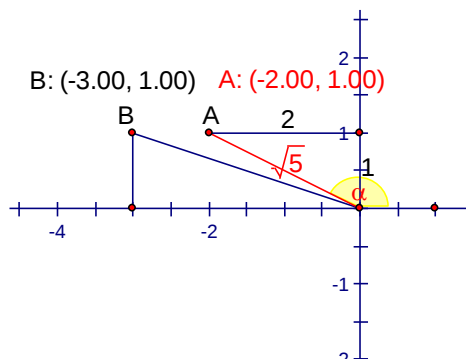
$$= \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}\right)\left(\frac{-3}{\sqrt{10}}\right) - \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$$

$$= \frac{5}{\sqrt{50}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

(2) $90^\circ < \alpha < 180^\circ$, $90^\circ < \beta < 180^\circ$

$$\Rightarrow 180^\circ < \alpha + \beta < 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 315^\circ.$$



5. 設 $\alpha + \beta = 135^\circ$, 求 $(1 - \tan\alpha)(1 - \tan\beta)$ 的值.

Ans : 2

【詳解】

$$\begin{aligned}
& (1-\tan\alpha)(1-\tan\beta) \\
&= (1-\tan\alpha)[1-\tan(135^\circ-\alpha)] \\
&= (1-\tan\alpha)\left[1-\frac{\tan 135^\circ-\tan\alpha}{1+\tan 135^\circ\tan\alpha}\right] \\
&= (1-\tan\alpha)\times\frac{1-\tan\alpha+1+\tan\alpha}{1-\tan\alpha} \\
&= 2.
\end{aligned}$$

【另解】

$$\begin{aligned}
& \alpha + \beta = 135^\circ \\
& \Rightarrow \tan(\alpha + \beta) = \tan 135^\circ = -1 \\
& \Rightarrow \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -1 \\
& \Rightarrow \tan\alpha + \tan\beta = -1 + \tan\alpha\tan\beta \\
& \Rightarrow (1 - \tan\alpha)(1 - \tan\beta) \\
& \quad = 1 - \tan\alpha - \tan\beta + \tan\alpha\tan\beta \\
& \quad = 1 + 1 = 2.
\end{aligned}$$

6. 設 $\tan\alpha$ 與 $\tan\beta$ 為方程式 $7x^2 - 8x + 1 = 0$ 的兩根，
求 $\tan\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 的值。

Ans : $\frac{1}{2}$ 或 -2

【詳解】

$\tan\alpha$ 與 $\tan\beta$ 為方程式 $7x^2 - 8x + 1 = 0$ 的兩根，

則 $\tan\alpha + \tan\beta = \frac{8}{7}$ ， $\tan\alpha \cdot \tan\beta = \frac{1}{7}$ 。故

$$\begin{aligned}
\tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = \frac{\frac{8}{7}}{1 - \frac{1}{7}} = \frac{4}{3} \\
&\Rightarrow \frac{2\tan\frac{\alpha+\beta}{2}}{1 - \tan^2\frac{\alpha+\beta}{2}} = \frac{4}{3}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot \tan^2 \frac{\alpha+\beta}{2} + 3 \tan \frac{\alpha+\beta}{2} - 2 = 0$$

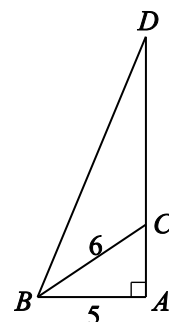
$$\Rightarrow (2 \tan \frac{\alpha+\beta}{2} - 1)(\tan \frac{\alpha+\beta}{2} + 2) = 0$$

$$\Rightarrow \tan \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{1}{2} \text{ 或 } -2.$$

【備註】忘了半角公式？

7. 如右圖，直角三角形 ABD 中， $\angle A$ 為直角， C 為 $\overline{AD}$ 邊上的點。已知 $\overline{BC}=6$ ， $\overline{AB}=5$ ， $\angle ABD=2\angle ABC$ ，求 $\overline{BD}$ 。 【99 學測】

Ans : $\frac{90}{7}$



【詳解】

設 $\angle ABC = \theta$ ，則 $\angle ABD = 2\theta$ ， $\cos \theta = \frac{5}{6}$ 。

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2 \times \frac{25}{36} - 1 = \frac{7}{18} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{5}{\overline{BD}}$$

$$\Rightarrow \overline{BD} = \frac{5 \times 18}{7} = \frac{90}{7}。$$

8. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=2$ ， $\overline{BC}=3$ 且 $\angle A=2\angle C$ ，求 $\overline{AC}$ 。 【99 學測】

Ans : $\frac{5}{2}$

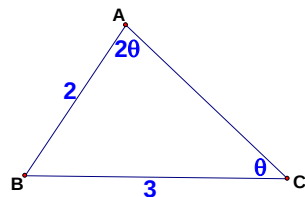
【詳解】

由正弦定理知

$$\frac{3}{\sin 2\theta} = \frac{2}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = 3 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{4}。$$



$$\text{又 } \frac{\overline{AC}}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{2}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \cdot \sin\theta = 2 \cdot \sin(\pi-3\theta) = 2\sin 3\theta = 2(3\sin\theta - 4\sin^3\theta)$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 2(3 - 4\sin^2\theta) = 6 - 8\sin^2\theta = 6 - 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 6 - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}。$$

【另解】

$$\text{利用正弦定理，} \frac{3}{\sin 2\theta} = \frac{2}{\sin\theta}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2\sin\theta \cos\theta = 3\sin\theta$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{3}{4}。$$

利用餘弦定理，設 $\overline{AC} = x$ ，

$$\Rightarrow x^2 + 3^2 - 2x \cdot 3 \times \cos\theta = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x \cdot \frac{3}{4} + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2}，\text{或 } x = 2(\text{不合})。$$

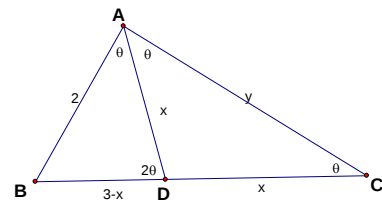
【再解】

如右圖， $\triangle BAD \sim \triangle BCA$ ，

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{3-x}{2} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow 3(3-x) = 4，3x = 2y$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{3}，y = \frac{5}{2}。$$



9. 坐標平面上 $A(2,1)$ ， $B(-3,4)$ ， $O(0,0)$ ，求 $\tan\angle AOB$ 的值。

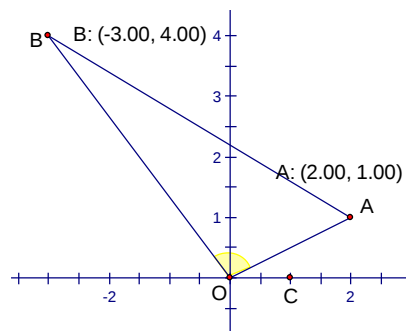
Ans : $-\frac{11}{2}$

【詳解】

如下圖，設 $\angle COB = \alpha$ ， $\angle COA = \beta$ ，

則 $\tan\alpha = -\frac{4}{3}$ ， $\tan\beta = \frac{1}{2}$ ，得

$$\begin{aligned}\tan\angle AOB &= \tan(\alpha - \beta) \\ &= \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha \tan\beta} \\ &= \frac{-\frac{4}{3} - \frac{1}{2}}{1 + (-\frac{4}{3}) \cdot \frac{1}{2}} \\ &= -\frac{11}{2}.\end{aligned}$$



【另解】

$$\overline{OA} = \sqrt{5}, \overline{OB} = 5, \overline{AB} = \sqrt{25+9} = \sqrt{34},$$

利用餘弦定理得

$$\cos\angle AOB = \frac{5+25-34}{2 \times 5 \times \sqrt{5}} = \frac{-2}{5\sqrt{5}},$$

$$\tan\angle AOB = -\frac{11}{2}.$$

【備註】您還有其他解法嗎？

10. 已知 $\sin\theta = -\frac{2}{3}$ 且 $\cos\theta > 0$ ，請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\tan\theta < 0$ (2) $\tan^2\theta > \frac{4}{9}$ (3) $\sin^2\theta > \cos^2\theta$ (4) $\sin 2\theta > 0$

(5) 標準位置角 θ 與 2θ 的終邊位在不同的象限。 【100 學測】

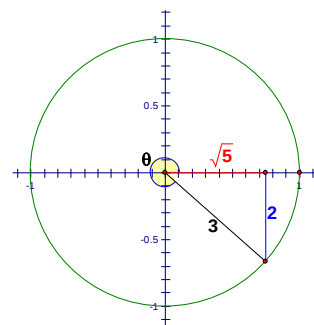
Ans：(1)(2)

【詳解】

如右圖，

$$(1) \tan\theta = \frac{-2}{\sqrt{5}} < 0,$$

$$(2) \tan^2\theta = \frac{4}{5} > \frac{4}{9},$$



$$(3) \sin^2 \theta = \frac{4}{9} < \frac{5}{9} = \cos^2 \theta ,$$

$$(4) \sin 2\theta = 2\sin \theta \cos \theta = 2 \times \frac{-2}{3} \times \frac{\sqrt{5}}{3} < 0 ,$$

$$(5) 315^\circ < \theta < 360^\circ ,$$

故 $630^\circ < 2\theta < 720^\circ$ ， θ 與 2θ 都在第四象限。

進階題

11. 設 $\tan \alpha = 3$ ， $\tan(\alpha - \beta) = 1$ ，求 $\tan \beta$ 的值。

Ans : $\frac{1}{2}$

【詳解】

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

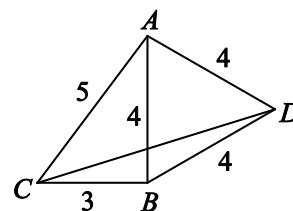
$$\Rightarrow 1 = \frac{3 - \tan \beta}{1 + 3 \times \tan \beta}$$

$$\Rightarrow 1 + 3 \tan \beta = 3 - \tan \beta$$

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{1}{2}.$$

12. 已知 $\triangle ABC$ 為直角三角形，且 $\overline{AB} = 4$ ， $\overline{BC} = 3$ ， $\overline{CA} = 5$ 。今以 $\overline{AB}$ 為一邊向外作一正三角形 ABD ，如圖所示。求 $\triangle ACD$ 的面積。

Ans : $3 + 4\sqrt{3}$



【詳解】

設 $\angle BAC = \alpha$ ，則

$$\sin \angle CAD = \sin(\angle BAC + 60^\circ)$$

$$= \sin \alpha \cos 60^\circ + \cos \alpha \sin 60^\circ$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3 + 4\sqrt{3}}{10}.$$

$\triangle ACD$ 的面積

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times 5 \times \frac{3+4\sqrt{3}}{10} = \frac{3+4\sqrt{3}}{10} .$$

13. 設 $0 < \theta < 45^\circ$ ，求證： $\sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta} = 2\cos \theta$.

【證明】

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta} \\ &= \sqrt{1+2\sin\theta\cos\theta} + \sqrt{1-2\sin\theta\cos\theta} \\ &= \sqrt{(\sin\theta+\cos\theta)^2} + \sqrt{(\sin\theta-\cos\theta)^2} \\ &= \sin\theta + \cos\theta + |\sin\theta - \cos\theta| \\ &= \sin\theta + \cos\theta + \cos\theta - \sin\theta \\ &= 2\cos\theta . \end{aligned}$$

【另證】

$$\begin{aligned} & (\sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta})^2 \\ &= 1 + \sin 2\theta + 1 - \sin 2\theta + 2\sqrt{1-\sin^2 2\theta} \\ &= 2 + 2\sqrt{\cos^2 2\theta} \\ &= 2 + 2\cos 2\theta \\ &= 2 + 2(2\cos^2 \theta - 1) \\ &= 4\cos^2 \theta , \\ & \text{故 } \sqrt{1+\sin 2\theta} + \sqrt{1-\sin 2\theta} = 2\cos \theta . \end{aligned}$$

14. 設 $\sin \theta = \frac{6}{5} \cos \frac{\theta}{2}$ ，求 $\cos \theta$ 的值 .

Ans : -1 或 $\frac{7}{25}$

【詳解】

$$\begin{aligned} \sin \theta &= \frac{6}{5} \cos \frac{\theta}{2} \Rightarrow 2\sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} = \frac{6}{5} \cos \frac{\theta}{2} \\ \Rightarrow \sin \frac{\theta}{2} &= \frac{3}{5} \text{ 或 } \cos \frac{\theta}{2} = 0 \\ \Rightarrow \cos \theta &= 1 - 2\sin^2 \frac{\theta}{2} = 1 - \frac{18}{25} = \frac{7}{25} \\ & \text{或 } \cos \theta = \cos 180^\circ = -1 . \end{aligned}$$

15. 設 $\sin\theta$ 與 $\cos 2\theta$ 為方程式 $8x^2 + 7x + k = 0$ 的兩根，求實數 k 的值。

Ans : $\frac{3}{4}$

【詳解】

由根與係數的關係知

$$\sin\theta + \cos 2\theta = -\frac{7}{8},$$

$$\Rightarrow \sin\theta + 1 - 2\sin^2\theta = -\frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow 16\sin^2\theta - 8\sin\theta - 15 = 0$$

$$\Rightarrow (4\sin\theta + 3)(4\sin\theta - 5) = 0$$

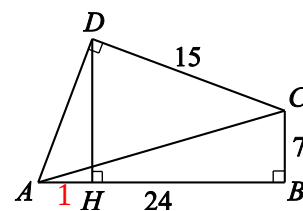
$$\Rightarrow \sin\theta = -\frac{3}{4}, \sin\theta = \frac{5}{4} \text{ (不合) }。$$

$$\Rightarrow \cos 2\theta = -\frac{7}{8} + \frac{3}{4} = -\frac{1}{8},$$

$$\sin\theta \cdot \cos 2\theta = \frac{k}{8} = \left(-\frac{3}{4}\right)\left(-\frac{1}{8}\right)$$

$$\text{解得 } k = \frac{3}{4}。$$

16. 右圖中， $\angle ABC = \angle ADC = 90^\circ$ ， $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{BC} = 7$ ， $\overline{CD} = 15$ ， $\overline{DH} \perp \overline{AB}$ ，求 $\overline{DH}$ 的長。



Ans : 16

【詳解】

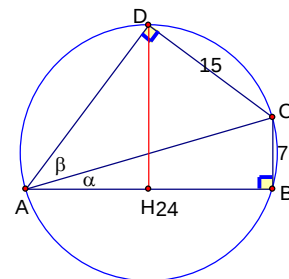
如右圖， $\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$ ，

故 A、B、C、D 四點共圓，且 $\overline{AC}$ 為直徑。

在 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB} = 24$ ， $\overline{BC} = 7$ ，得 $\overline{AC} = 25$ 。

在 $\triangle ACD$ 中， $\overline{AC} = 25$ ， $\overline{CD} = 15$ ，得 $\overline{AD} = 20$ 。

右圖中，



$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{7}{25}\times\frac{20}{25}+\frac{24}{25}\times\frac{15}{25}=\frac{4}{5},$$

$$\text{故 } \overline{DH}=\overline{AD}\sin(\alpha+\beta)=20\times\frac{4}{5}=16.$$

17. 右圖中，扇形 OAB 的半徑為 r ，圓心角 $\angle AOB=60^\circ$ 。
若 P 為圓弧 AB 上一點，且 P 到 $\overline{OA}$ 與 $\overline{OB}$ 的距離
分別為 3，5，求半徑 r 的值。

Ans : $\frac{14}{3}\sqrt{3}$

【詳解】

右圖中， $\sin\theta=\frac{3}{r}$ ， $\sin(60^\circ-\theta)=\frac{5}{r}$ 。

$$\Rightarrow r=\frac{3}{\sin\theta}=\frac{5}{\sin(60^\circ-\theta)}$$

$$\Rightarrow 3\cdot\sin(60^\circ-\theta)=5\sin\theta$$

$$\Rightarrow 3(\sin 60^\circ\cos\theta-\cos 60^\circ\sin\theta)=5\sin\theta$$

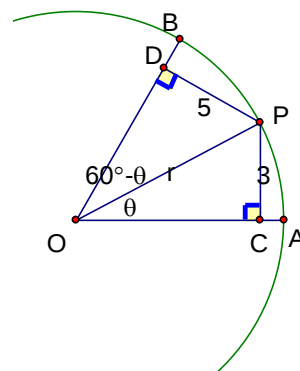
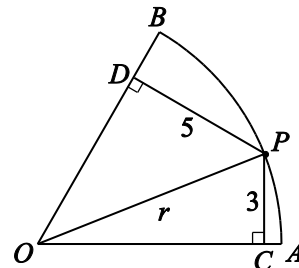
$$\Rightarrow 3\sqrt{3}\cos\theta-3\sin\theta=10\sin\theta$$

$$\Rightarrow 27\cos^2\theta=169\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow 27(1-\sin^2\theta)=169\sin^2\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{3\sqrt{3}}{14}$$

$$\Rightarrow r=\frac{3}{\frac{3\sqrt{3}}{14}}=\frac{14\sqrt{3}}{3}.$$



18. 已知 $\sin\theta-\cos\theta=\frac{1}{2}$ ，求 $\sin 3\theta+\cos 3\theta$ 的值。

Ans : $-\frac{5}{4}$

【詳解】

$$\sin\theta - \cos\theta = \frac{1}{2}, \text{ 兩邊平方}$$

$$\Rightarrow 1 - 2\sin\theta\cos\theta = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin\theta\cos\theta = \frac{3}{8}.$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sin 3\theta + \cos 3\theta &= 3\sin\theta - 4\sin^3\theta + 4\cos^3\theta - 3\cos\theta \\ &= 3(\sin\theta - \cos\theta) - 4(\sin^3\theta - \cos^3\theta) \\ &= 3(\sin\theta - \cos\theta) - 4(\sin\theta - \cos\theta)(\sin^2\theta + \sin\theta\cos\theta + \cos^2\theta) \\ &= 3 \times \frac{1}{2} - 4 \times \frac{1}{2} \times (1 + \frac{3}{8}) \\ &= -\frac{5}{4}. \end{aligned}$$

19. 已知 $\cos 2\theta = \frac{1}{3}$, 求 $\cos^6\theta - \sin^6\theta$ 的值.

Ans : $\frac{7}{27}$

【詳解】

$$\cos 2\theta = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin 2\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

$$\begin{aligned} \cos^6\theta - \sin^6\theta &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)(\cos^4\theta + \cos^2\theta\sin^2\theta + \sin^4\theta) \\ &= (\cos^2\theta - \sin^2\theta)[(\cos^2\theta + \sin^2\theta)^2 - \cos^2\theta\sin^2\theta] \\ &= \cos 2\theta [1 - \frac{1}{4}\sin^2 2\theta] \\ &= \frac{1}{3} \times (1 - \frac{8}{9} \times \frac{1}{4}) \\ &= \frac{7}{27}. \end{aligned}$$

20. 設 $\sin\theta$ 與 $\cos\theta$ 為方程式 $5x^2 - x - 1 = 0$ 的兩根，

求 $2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2$ 的值。

Ans : 1

【詳解】

利用根與係數的關係知

$$\sin\theta + \cos\theta = \frac{1}{5}, \quad \sin\theta \cdot \cos\theta = -\frac{1}{5}.$$

$$\begin{aligned} & 2\cos^2\frac{\theta}{2}\left(\sin\frac{\theta}{2} + \cos\frac{\theta}{2}\right)^2 \\ &= (1 + \cos\theta)(1 + \sin\theta) \\ &= 1 + \sin\theta + \cos\theta + \sin\theta\cos\theta \\ &= 1 + \frac{1}{5} - \frac{1}{5} \\ &= 1. \end{aligned}$$

21. 在坐標平面上，廣義角 θ 的頂點為原點 O ，始邊為 x 軸的正向，且滿足 $\tan\theta = \frac{2}{3}$ 。若 θ 的終邊上有一點 P ，其 y 坐標為 -4 ，則

下列哪些選項一定正確？ [學測 101]

(1) P 的 x 坐標是 6 ，(2) $\overline{OP} = 2\sqrt{13}$ ，(3) $\cos\theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$ ，

(4) $\sin 2\theta > 0$ ，(5) $\cos\frac{\theta}{2} < 0$ 。

Ans : (2)(4)

【詳解】

$\because \tan\theta = \frac{2}{3}$ ，又 θ 終邊的 P 點， y 坐標為 -4

$\therefore \theta$ 在第三象限

(1) $\times$ ， $\tan\theta = \frac{2}{3} = \frac{y}{x} = \frac{-4}{x} \Rightarrow x = -6$

$\therefore P$ 的 x 坐標為 -6

(2) $\bigcirc$ ， $\overline{OP} = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$$(3) \quad \times, \cos\theta = \frac{x}{OP} = \frac{-6}{2\sqrt{13}} = \frac{-3}{\sqrt{13}}$$

$$(4) \quad \circ, \sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = 2\left(\frac{-4}{2\sqrt{13}}\right)\left(\frac{-6}{2\sqrt{13}}\right) > 0$$

$$(5) \quad \times, 180^\circ + 360^\circ k < \theta < 270^\circ + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$90^\circ + 180^\circ k < \frac{\theta}{2} < 135^\circ + 180^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{當 } k=0 \text{ 時, } \frac{\theta}{2} \text{ 在第二象限, } \cos\frac{\theta}{2} < 0$$

$$\text{當 } k=1 \text{ 時, } \frac{\theta}{2} \text{ 在第四象限, } \cos\frac{\theta}{2} > 0$$

故選(2)(4)