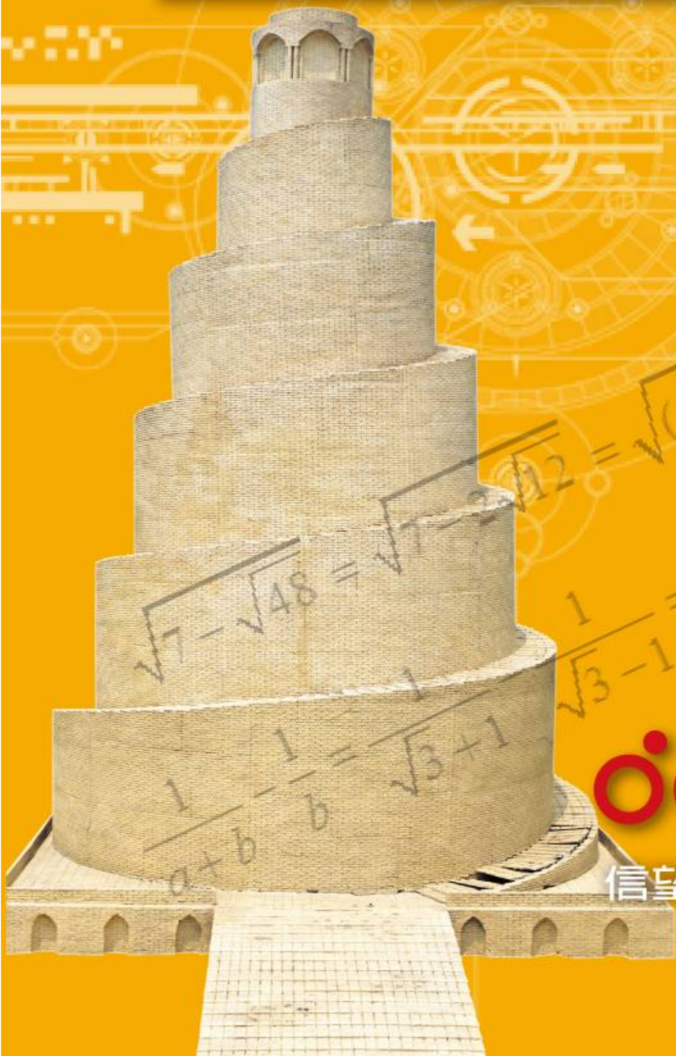
數學 基礎講義

直線方程式及其圖形

信望愛文教基金會・數學種子教師團隊



信望愛文教基金會

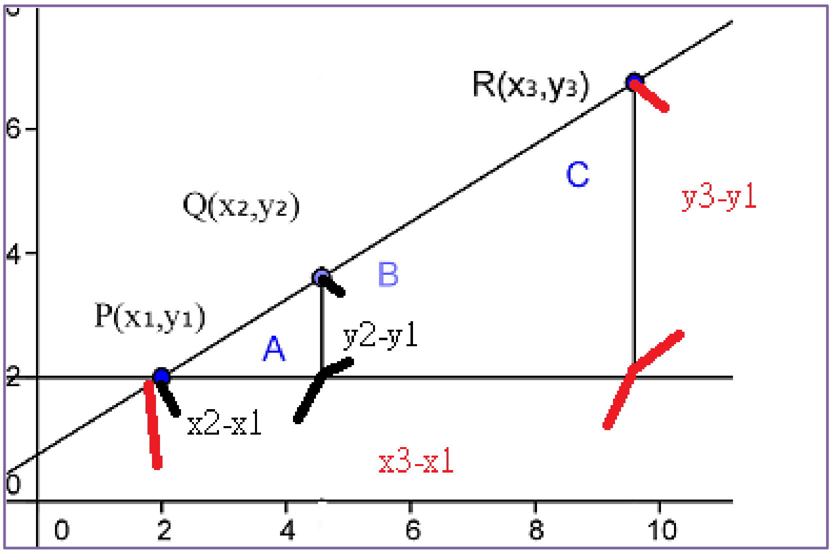
直線方程式及其圖形

基本定義

斜率

平面座標上，我們定義一條直線的斜率為其相對於X軸的傾斜度。

在直線 L 上任取相異的兩點 $P(x_1,y_1)$ $Q(x_2,y_2)$，則直線 L 的斜率 $m=\frac{y2-y1}{x2-x1}$，從下圖中我們可以由相似三角形的概念得知斜率 m 相當於圖中兩相似三角形的邊長比例，所以斜率只會跟直線的傾斜程度有關，與所選取的點並無關。



當一條直線其斜率$m=0$時，代表其為平行X軸之水平線，或為X軸。

$m>0$時，x及y呈現同向變動，直線由左而右上升。

$m<0$時，x及y呈現反向變動，直線由左而右下降。

$|m|$越大，代表直線將越陡

由斜率的定義可以知道，鉛直線的斜率並不存在。

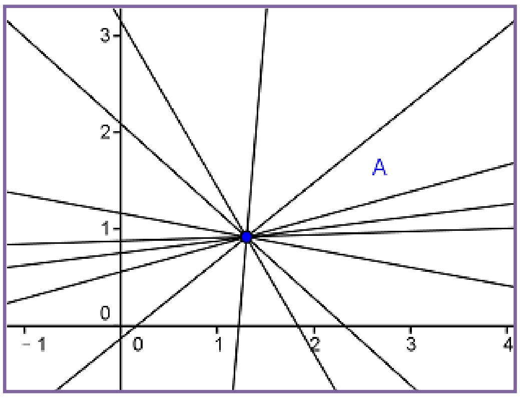
直線L:$y=mx+k$的斜率為m

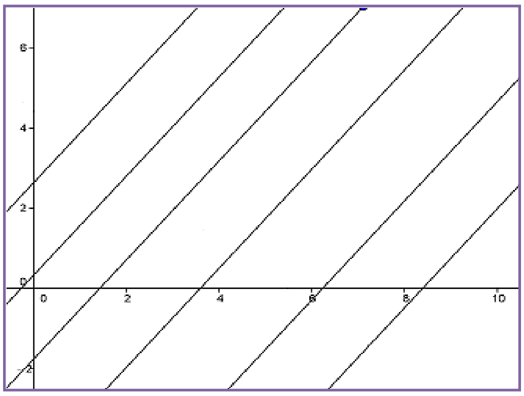
直線L:$ax+by+c=0$的斜率為$\frac{-a}{b}$

直線方程式

點斜式

在平面座標上如果我們指定一點P，則通過P點的直線將有無窮多條。(如下方左圖）同樣的，如果我們指定直線斜率為m，整個座標平面上斜率為m的直線一樣會有無窮多條。（如下方右圖）。





但如果我們同時指定經過的點$P(x_0,y_0)$以及斜率m，這時直線將被唯一決定。

且方程式為$y\text{-}y_0 = m(x\text{-}x_0)$，這種利用經過的點以及斜率來描述方程式的形式我們稱之為「點斜式」。

兩點式

平面座標上給定通過兩點 $P(x_1,y_1)$、$Q(x_2,y_2)$ 的直線方程式為 $\frac{y-y1}{x-x1} = \frac{y1-y2}{x1-x2}$。

斜截式

通過點$(0,b)$且斜率為 m 的直線方程式為 $y = mx + b$，直線與 y 軸交點的 y 座標稱之為 y 截距。

截距式

設直線與 x 軸、y 軸的交點分別為$(a,0)$，$(0,b)$，則該直線方程式為 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$。

其中$a\neq 0$，$b\neq 0$。而直線與x軸的交點x坐標a稱為該直線的x截距，b稱為y截距。

一般式

$ax+by+c=0$這種形式稱為二元一次方程式的一般式，當$b\neq 0$時可以化成$y = \frac{-a}{b}x - \frac{c}{b}$，表示其為斜率 $\frac{-a}{b}$，y截距 $-\frac{c}{b}$ 之直線

兩直線關係

平行

國中時我們定義兩不存在交點的直線為平行線，在這裡我們引入斜率的觀點。斜率代表一條直線相對於X軸傾斜的程度，所以如果兩條直線平行則其傾斜程度必將相同。反之，兩條斜率相同的直線代表他們傾斜的程度一樣，所以絕對不可能有交點。假設兩直線L_1、L_2，其對應的斜率分別為m_1,m_2。則上述敘述可以數學形式簡述為：

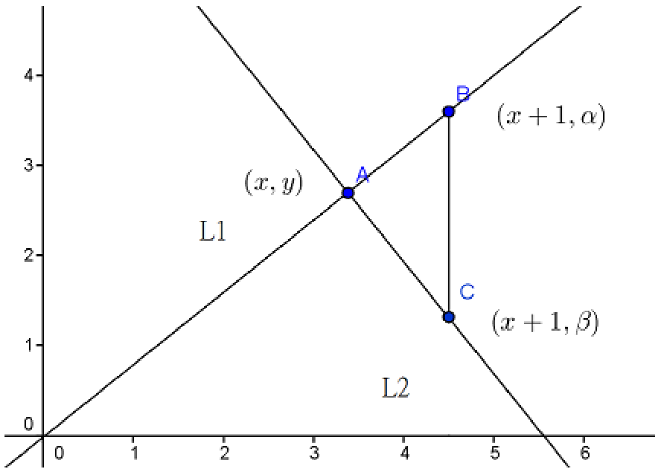
$$L_1 // L_2 \Leftrightarrow m_1=m_2 \text{ 或} m_1\ m_2\text{同時不存在}$$

垂直

假設兩直線L_1、L_2對應的斜率分別為m_1, m_2。因為兩直線若垂直，則其間之夾角必為90°，故兩直線L_1、L_2若互相垂直，則　$m_1m_2 = -1$　，

或

m_1、m_2其一為0，另一者不存在。



證明

由於第二種情況非常顯而易見，所以在這裡僅證明第一種斜率積為 -1 的情況。已知 L_1與 L_2 垂直，在其交點 (x,y) 分別對兩線右移一單位長，取兩點 $B(x+1,\alpha)$ $C(x+1,\beta)$。則關於L_1 與 L_2 的斜率m_1 、m_2可以分別以 α-y 以及 β-y 表示。

接下來進入證明的關鍵步驟，顯然圖中之 ΔABC 為直角三角形

$\Rightarrow \overline{AB}^2+\overline{AC}^2=\overline{BC}^2 \Rightarrow 1^2+(\alpha-y)^2+1^2+(\beta-y)^2=(\alpha-\beta)^2$

$\Rightarrow 1+\alpha^2-2\alpha y+y^2+1+\beta^2-2\beta y+y^2=\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2 \Rightarrow 2\alpha\beta-2\alpha y-2\beta y+2y^2=-2$

$\Rightarrow (\alpha-y)(\beta-y)= -1 =m_1m_2$

常見直線假設方法

與$ax+by+c=0$平行的直線可假設為$ax+by+k=0$ $(k\neq c)$
與$ax+by+c=0$垂直的直線可假設為$bx-ay+k=0$

聯立方程式解的幾何意義

$$\begin{cases} ax+by+c=0 \\ dx+ey+f=0 \end{cases}$$

設$ax+by+c=0$為L_1，$dx+ey+f=0$為L_2。

1.若 $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$，則聯立方程式洽有一解，此時$L_1$與$L_2$交於一點。

2.若 $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$，則聯立方程式無解，此時$L_1$與$L_2$平行。

3.若 $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$，則聯立方程式有無限多組解，此時$L_1$與$L_2$重合。

直線系與對稱點

直線系

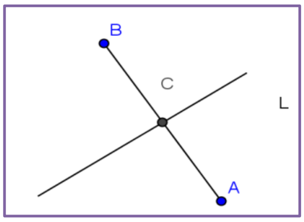
任何通過L_1：$a_1x+b_1y+c_1=0$與L_2：$a_2x+b_2y+c_2=0$交點的直線方程式可以設為$L_1+kL_2=0$。

若求出結果 $k=0$，則所求直線為 L_1。

若求出結果 k 無解，則所求直線為 L_2。

對稱點

平面上有A、B兩點，若存在一直線L垂直平分$\overline{AB}$，則稱B為A對於直線L的對稱點。而$\overline{AB}$與L的交點C稱為A在L上的投影點（或稱為垂足），同時也是$\overline{AB}$的中點。



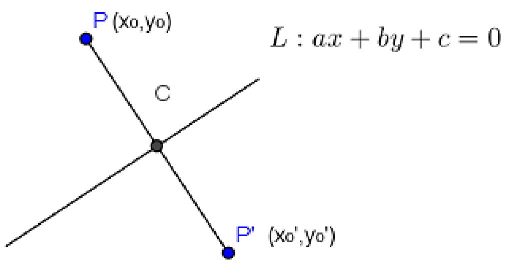
平面坐標上對稱點求法

假設已知 $P(x_0,y_0)$ 以及 $L:ax+by+c=0$，欲求P點對於 L 的對稱點。

Step1：利用 L 垂直平分 $\overline{PP'}$，以及過點 $P(x_0,y_0)$ 求出直線 PP' 的方程式。

Step2：L 與直線 PP' 的交點即為 P 之投影點 C。

Step3：利用 C 為 P，P' 中點性質即可求出對稱點 P'。



小試身手

例題1	設函數 $f(x) = 2046x+3732$,求 $\frac{f(2001)-f(1997)}{2001-1997} =$
例題2	在座標平面上，以原點為中心，將直線 $L:\sqrt{3}x-2y=0$以逆時針方向旋轉 120°，得一新直線 L_2，是求該線斜率
例題3	在座標平面上，若 O 點與 $A(6,2)$ $B(-1,1)$ $C(0,-6)$三點距離相等，試求此 O 點座標
例題4	已知一三角形之三頂點分別為 $A(3,3)$ $B(-1,-5)$ $C(6,0)$，試求其三邊分別對應之高的方程式
例題5	設 k 為一實數，今不論 k 值為何，直線 L: $(2+k)x+(1+4k)y+3-2k=0$ 恆過某一定點，試求此點之座標
例題6	設坐標平面上兩點 $A(2,6)$ $B(6,2)$，在 X 軸上取一點使得 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 之值最小，試問此 P 點坐標以及 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 之最小值

解答與解析

例題1：$\because f(x)$為一次線性函數，圖形為一斜率2046之直線

且$(2001,f(2001))$ $(1997,f(1997))$皆在直線上

故$\frac{f(2001)-f(1997)}{2001-1997}=m_f=2046$

例題2：設L與X軸之正向夾角為θ，則$\tan\theta=m_l=\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\because L_2$與X軸之正向夾角為$\theta+120^\circ$

$\therefore L_2$的斜率$=\tan(120^\circ+\theta)=\frac{\tan 120^\circ+\tan\theta}{1-\tan\theta\tan 120^\circ}$

$$=\frac{-\sqrt{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}}{1-\frac{\sqrt{3}}{2}\times(-\sqrt{3})}=\frac{-\sqrt{3}}{5}$$

例題3：O點與$A(6,2)$ $B(-1,1)$ $C(0,-6)$三點距離相等$\Rightarrow O$點為此三點形成之三角形外心

$\overline{AB}$ 之斜率為$\frac{1}{7}$ 故中垂線為$y-\frac{3}{2}=-7\left(x-\frac{5}{2}\right)$

$\overline{BC}$ 之斜率為-7，故中垂線為$y+\frac{1}{2}=\frac{1}{7}\left(x+\frac{5}{2}\right)$

將以上兩式解聯立方程式，其解即為外心坐標$(3,-2)$

例題4：$\because m_{BC}=\frac{5}{7} \Rightarrow \overline{BC}$ 之高斜率為$\frac{-7}{5}$且必過A點(3,3)

$\overline{BC}$ 之高方程式為:$7x+5y-36=0$

同理可知 $\overline{AC}$ 之高:$x-y-4=0$

$\overline{AB}$ 之高$x+2y-6=0$

例題5：原式可改寫成$2x+y+3+k(x+4y-2)=0$

依照直線系的觀念可知不論實數k之值為何

L必過$\begin{cases}2x+y+3=0\\x+4y-2=0\end{cases}$ 之交點

$\Rightarrow L$必過定點(-2,1)

例題6：由於 $A(6,2)$ $B(2,6)$ 在X軸同側，先取點 $B(6,2)$ 對於X軸之對稱點$B'(6,-2)$

此時 X 軸上任一點至$B(6,2)$與至$B'(6,-2)$之距離相等

故 $\overline{PA}+\overline{PB}$ 之最小值 $=\overline{PA}+\overline{PB'}$

$=\overline{AB'}$

$=4\sqrt{5}$