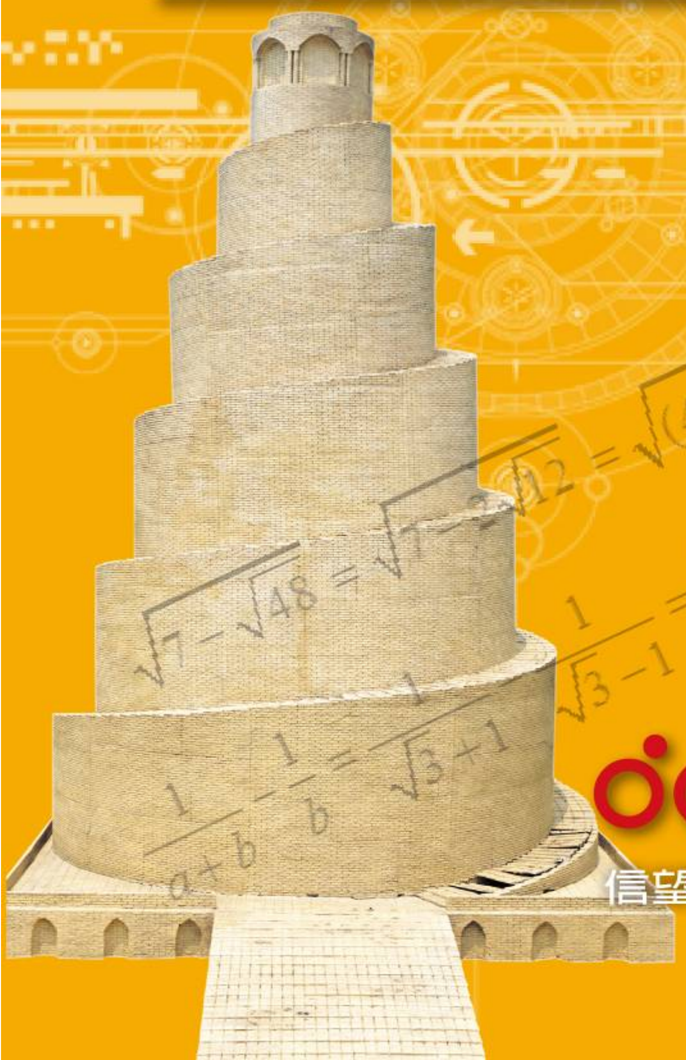
數學 基礎講義

三角形的邊角關係

信望愛文教基金會．數學種子教師團隊

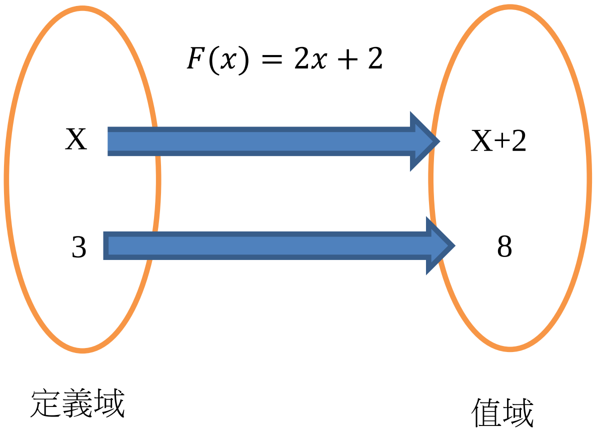


信望愛文教基金會

三角形的邊角關係

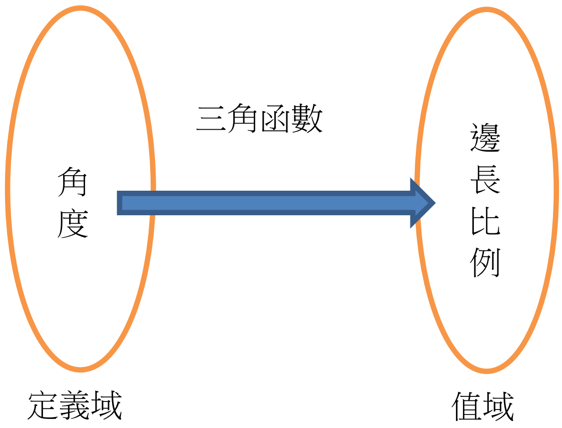
函數的定義

在以前，我們已經學過函數的功能在於將定義域內的東西經過某種規則的運算之後，對應到值域裡的某一個值。我們可以將函數想像成一座工廠，變數是原料，而函數值就是這個工廠針對不同原料所做出的不同產品。



三角函數

三角函數顧名思義他也是一個函數，不過跟以前所學的稍微不同的地方是，他並不是將變數經過運算後得到某個函數值。而是將指定的變數角度設定為直角三角形的底角時，其邊長間的比例作為函數值。

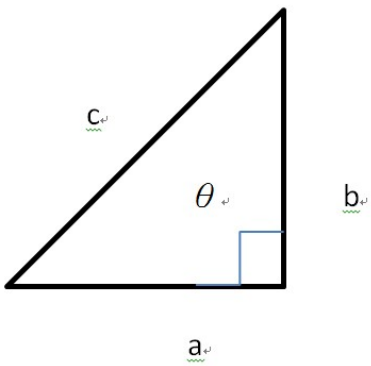


如何定義三角函數

$$\sin\theta = \frac{對邊}{斜邊} = \frac{b}{c}$$

$$\cos\theta = \frac{臨邊}{斜邊} = \frac{a}{c}$$

$$\tan\theta = \frac{對邊}{臨邊} = \frac{b}{a} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



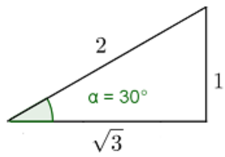
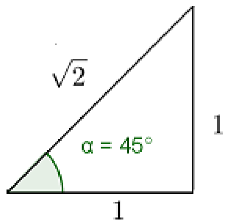
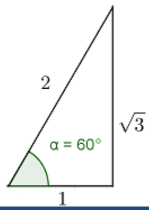
注意：

在這裡請同學注意到一件事，對於任意直角三角形而言，斜邊必為最長之邊。

所以對於任意的 θ， sinθ、cosθ ≦ 1

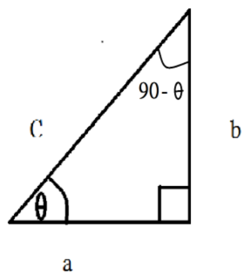
而 tanθ 對於範圍就沒有任何限制

常用三角函數值表

函數 / 角度	sinθ	cosθ	tanθ	圖示
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	

餘角關係

從右圖中我們可以發現一點，在不久之前學過的 sin 函數告訴我們：$\sin\theta = \frac{對邊}{斜邊} = \frac{c}{b}$，這組邊長比例對於圖中的另外一個角度為$90^\circ$-θ的內角而言恰巧是他的$\frac{臨邊}{斜邊}$也就是 $\cos(90^\circ - \theta)$。



且對於所有的直角三角形來說，以上所述皆會成立：任一銳角內角的鄰邊必為另一者的對邊，反之亦然。

另外觀察 tanθ=$\frac{對邊}{鄰邊} = \frac{b}{a}$，而這兩個邊的身分對於另一個角度為$90^\circ - \theta$的內角而言，會剛好交換，故 tanθ=$\frac{1}{\tan(90^\circ - \theta)}$

結論

$$\sin\theta = \cos(90^\circ - \theta)$$

$$\cos\theta = \cos(90^\circ - \theta)$$

$$\tan\theta \cdot \tan(90^\circ - \theta) = 1$$

平方關係

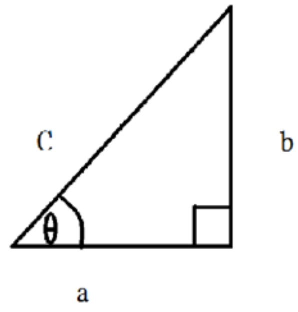
$sin\,\theta = \frac{b}{c}$

$cos\,\theta = \frac{a}{c}$

$$sin^2\theta + cos^2\theta = \left(\frac{b}{c}\right)^2 + \left(\frac{a}{c}\right)^2$$

$$= \frac{b^2+a^2}{c^2}$$

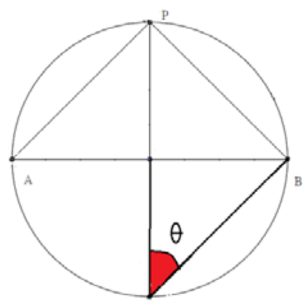
$= 1$ (by 畢氏定理)



結論

$$sin^2\theta + cos^2\theta = 1$$

小試身手

例題 1	求 $\frac{\sin30^\circ+\cos45^\circ+\tan60^\circ}{\sin60^\circ\cdot\cos60^\circ} =$
例題 2	設 θ 為銳角，且 $\sin\theta = \frac{5}{13}$，則 $\tan\theta + 2\cos\theta =$
例題 3	設 α 、 β 皆為銳角，且滿足 $\tan\alpha \times \tan 2\beta = 1$，請問 $\alpha + 2\beta =$
例題 4	試化簡 $(1 - \tan^4\theta)\cos^2\theta + \tan^2\theta =$
例題 5	求 $\sin^2 35^\circ + \sin^2 55^\circ + \cos^2 42^\circ + \cos^\circ 48^\circ =$
例題 6	設 $\cos^2\theta - 5\cos\theta + 6 = 0$，求 $\cos\theta =$
例題 7	如右圖，$\overline{AB}$ 為直徑，$\overline{AB} = 10$，$\sin\theta = \frac{3}{5}$ 求 $\overline{PA} + \overline{PB} =$ 
例題 8	設θ為銳角且 $7\sin\theta - \cos\theta = 5$，求 $\sin\theta =$？
例題 9	銳角△ ABC之三邊長分別為 a, b, c，其所對應的高為 h_a, h_b, h_c， 已知$\tan A = 1$，$\tan B = 2$，$\tan C = 3$，求$\frac{abc}{h_a h_b h_c} =$

解答與解析

例題 1：$\frac{\sin30^\circ+\cos45^\circ+\tan60^\circ}{\sin60^\circ\cdot\cos60^\circ}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}}=\frac{2\sqrt{3}+2\sqrt{6}+12}{3}$

例題 2：$\sin\theta=\frac{5}{13}$，$\tan\theta+2\cos\theta=\frac{5}{12}+2\cdot\frac{12}{13}=\frac{353}{156}$

例題 3：由題目敘述可知 tanα 與 tan2β 互為倒數，由餘角關係可知兩者角度互餘

故 $\alpha+2\beta=90^\circ$

例題 4：$(1-\tan^4\theta)\cos^2\theta+\tan^2\theta=\cos^2\theta-\tan^4\theta\cos^2\theta+\tan^2\theta$

$=\cos^2\theta+\tan^2\theta\ (1-\cos^2\theta\tan^2\theta)$

$=\cos^2\theta+\tan^2\theta\ (1-\sin^2\theta)$

$=\cos^2\theta+\tan^2\theta\ (\cos^2\theta)$

$=\cos^2\theta+\sin^2\theta$

$=1$

例題 5：看到題目中出現角度互餘的三角函數須馬上聯想到餘角關係

$\sin35^\circ=\cos55^\circ$　$\cos42^\circ=\sin48^\circ$

故原式 $\sin^2 35^\circ+\sin^2 55^\circ+\cos^2 42^\circ+\cos^2 48^\circ$可改寫成

$(\cos^2 55^\circ+\sin^2 55^\circ)+(\sin^2 48^\circ+\cos^\circ 48^\circ)=1+1=2$

例題 6：題目敘述中僅存在 $\cos\theta$一個未知數

故可將 $\cos^2\theta-5\cos\theta+6=0$ 視為一元二次方程式

設 $\cos\theta=t$

原式可改寫成 $t^2-5t+6=0$

$\Longrightarrow (t-2)(t-3)=0 \Longrightarrow t=2$ 或 3

但對於任意角度θ　$\cos\theta\leqq1$，故此題無解

例題 7：已知 $\overline{AB}=10$，$\sin\theta=\frac{3}{5}$

故 $\overline{PB}=6$

由於 $\overline{AB}$ 為直徑，故PB弧與PA弧之和必為 180°

意即其分別對應的圓周角θ與∠PBA 必互餘

接著由餘角關係可知 sin∠PBA=cosθ$=\frac{4}{5}$

$\overline{PA}=8$

$\overline{PA}+\overline{PB}=14$

例題 8：$7\sin\theta - \cos\theta = 5$

$7\sin\theta = 5 - \cos\theta$

$49\sin^2\theta = \cos^2\theta - 10\cos\theta + 25$ (等號兩邊同時平方)

接下來我們將利用平方關係將 $\sin\theta$ 及 $\cos\theta$ 兩個未知數減少為一個

利用 $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

將 $\sin^2\theta = 1 - \cos^2\theta$ 代入上式

$49(1-\cos^2\theta) = \cos^2\theta + 10\cos\theta + 25$

整理化簡過後可得

$25\cos^2\theta + 5\cos\theta - 12 = 0$

接著與前述第七題相同手法

將整式視為 $\cos\theta$ 之一元二次方程式

$(5\cos\theta - 4)(5\cos\theta + 3) = 0$

已知 θ 為銳角，故 $\cos\theta = \frac{4}{5}$

$\sin\theta = \frac{3}{5}$

例題 9：已知條件 $\tan A = 1$ $\tan B = 2$ $\tan C = 3$

欲求 $\dfrac{abc}{h_a h_b h_c} = ?$

我們回歸到最基本的定義問題，什麼是三角函數?

它是一個定義在角度與邊長比例關係上的函數。

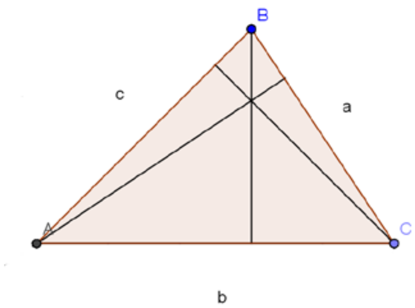
換句話說，只要知道三角函數值，

就等於知道該角度形成的直角三角形所有邊長比例，

藉由這點以及三角形之高必分別垂直對邊的性質，

觀察由 $\angle A$、$\angle B$、$\angle C$ 形成的直角三角形

可以得到以下邊長比例：



$\frac{c}{hb} = \sqrt{2}$ $\frac{b}{ha} = \frac{\sqrt{10}}{3}$ $\frac{a}{hc} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

三者相乘得 $\dfrac{abc}{h_a h_b h_c} = \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{10}}{3} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{5}{3}$