高中數學 進階講義

雙曲線

陳清海　老師

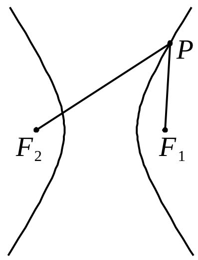
信望愛文教基金會

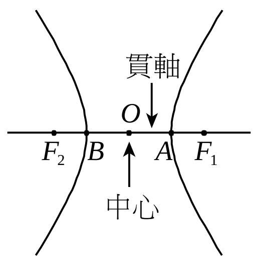
ok443 雙曲線

主題一、雙曲線的幾何定義

1. 雙曲線的定義：

設 F_1 與 F_2 為平面上的兩相異定點，且定數 $2a$ 滿足 $0<2a<\overline{F_1F_2}$. 平面上所有滿足 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2a$ 的點 P 所形成的圖形稱為雙曲線，而定點 F_1 與 F_2 稱為此雙曲線的焦點 .





2. 雙曲線的圖形要素：

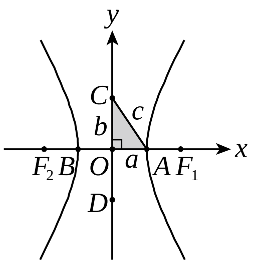
(1) 中心：線段 $\overline{F_1F_2}$ 的中點 O 稱為中心，$\overline{F_1F_2}$ 的長度

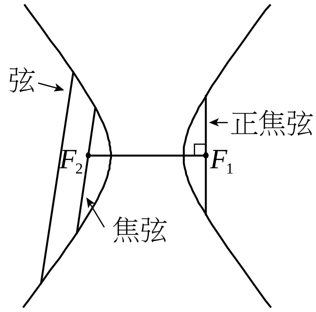
用 $2c$ 表示，即 $\overline{F_1F_2}=2c$.

(2) 頂點：直線 F_1F_2 與雙曲線的交點 A，B 稱為頂點 .

(3) 貫軸：線段 $\overline{AB}$ 稱為貫軸 .

(4) 共軛軸：在過中心且垂直貫軸的直線上，當線段 $\overline{CD}$ 的中點為中心 O，且其長度 $\overline{CD}=2b$ 滿足 $c^2=a^2+b^2$ 時，我們稱 $\overline{CD}$ 為雙曲線的共軛軸，如下左圖所示 .

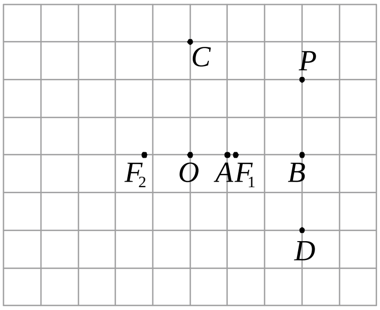




3. 在雙曲線上任取兩相異點的連接線段稱為此雙曲線的弦，過焦點的弦稱為焦弦．當焦弦與貫軸所在的直線垂直時，我們稱此焦弦為正焦弦，如上右圖所示．

【例題 1】

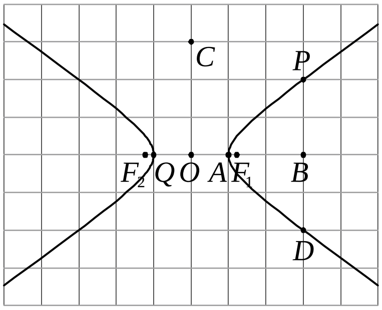
在下圖方格內的點滿足 O 是 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，且 $\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2$．若點 P 在以 F_1， F_2 為焦點的雙曲線 Γ 上，則點 A，B，C，D 中哪些點，也在 Γ 上?



Ans：A， D

【詳解】

由題意可知： 雙曲線 Γ 的貫軸長為 $\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2$ ．



由上圖可知： A 在 $\overline{F_1F_2}$ 上， $\overline{OA}=\overline{OQ}=1$,

且 $\overline{AF_2}-\overline{AF_1}=\overline{AF_2}-\overline{QF_2}=2$,

因此 A 為雙曲線 Γ 的頂點 ．

同時因為 D 與 P 對稱於直線 F_1F_2，

所以 $\overline{DF_2}-\overline{DF_1}=\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2$，

故點 D 在 Γ 上 ．B， C 兩點則不在 Γ 上 ．

由上面的討論可知： A， D 兩點在 Γ 上 ．

【類題 1】

在坐標平面上，以(–1，1)，(3，1)為焦點，且通過點(3，4)畫一雙曲線．試問此雙曲線也會通過下列哪些點?

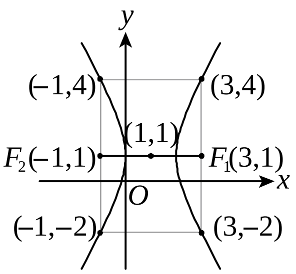
(1) (1，1)　(2) (–1，4)　(3) (3，–2)　(4) (–1，–2)

(5) (3，1)．

Ans：(2)(3)(4)

【詳解】

利用雙曲線圖形的對稱性，由下圖可知：



(1)　(1,1)為雙曲線的中心．

(5)　(3,1)為雙曲線的焦點．

其餘各選項的點均在雙曲線上．

故正確的選項為(2)(3)(4)．

【例題 2】

設雙曲線Γ的貫軸長為 2a，共軛軸長為 2b，試證明Γ之正焦弦的長為 $\dfrac{2b^2}{a}$．

【詳解】

設 $\overline{PQ}$ 為通過焦點 F_1 的正焦弦，且 $\overline{PF_1}=x$．

由雙曲線的定義可知:

$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=2a$，即 $\overline{PF_2}=2a+x$．

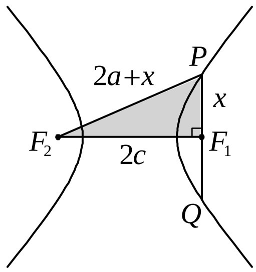
因為△PF_1F_2 是直角三角形，

所以利用畢氏定理，得

$x^2+(2c)^2=(2a+x)^2$,

解得 $x=\dfrac{c^2-a^2}{a}=\dfrac{b^2}{a}$（因為 $c^2=a^2+b^2$），

故正焦弦 $\overline{PQ}$ 的長為 $2x=\dfrac{2b^2}{a}$.



【類題 2】

已知雙曲線 Γ 的貫軸長是兩焦點距離的 $\frac{1}{2}$ 倍，且正焦弦長為 6，求 Γ 的貫軸長 .

Ans：2

【詳解】

設 Γ 的貫軸長為 $2a$,

共軛軸長為 $2b$,

兩焦點距離為 $2c$.

由題意可知

$a=\dfrac{c}{2}\Rightarrow c^2=4a^2$,

$\dfrac{2b^2}{a}=6\Rightarrow b^2=3a$.

將上面兩式代入 $c^2=a^2+b^2$,

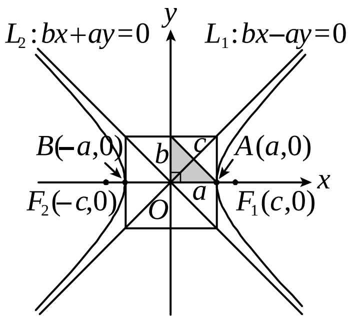
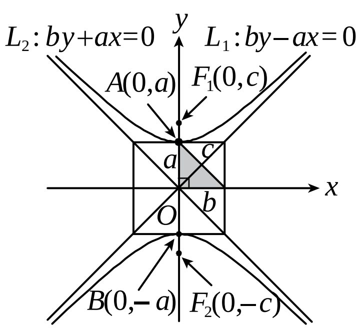
得 $4a^2=a^2+3a$, 整理得 $3a^2=3a$,

解得 $a=1$.

故 Γ 的貫軸長為 2 .

主題二、雙曲線的標準式

1. 中心在原點之雙曲線的標準式：

標準式	圖形	正焦弦長
$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$		$\dfrac{2b^2}{a}$
$\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{x^2}{b^2}=1$		$\dfrac{2b^2}{a}$

當雙曲線的長、短軸與坐標軸平行，但是中心點 (h,k) 不在原點時，可利用平移的概念了解方程式與各要素間的關係.

2. 求雙曲線標準式的三個條件：

(1) 中心 (h,k).

(2) a，b（在 a，b，c 三數中 c 的值最大，且 $c^2=a^2+b^2$）.

(3) 形式（左右型：a^2 的位置在 x^2 下方；上下型：a^2 的位置在 y^2 下方）.

由(1)(2)(3)即可求得雙曲線的標準式.

左右型

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

上下型

$$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$$

【例題 3】

求焦點為 $F_1(3，0)$與 $F_2(-3，0)$，貫軸長為4的雙曲線方程式．

Ans：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$

【詳解】

因為雙曲線的中心為 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，

所以其中心為原點．

又因為 $F_1(3，0)$與 $F_2(-3，0)$都在 x 軸上，

所以雙曲線的貫軸在 x 軸上，

即雙曲線的方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$的形式．

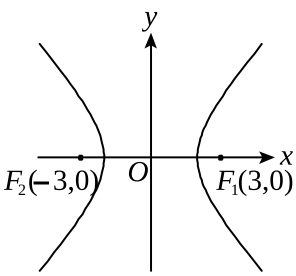
因為貫軸長 $2a=4$，$2c=\overline{F_1F_2}=6$，

所以 $a=2$，$c=3$，

代入 $c^2=a^2+b^2$，解得 $b=\sqrt{5}$．

將 $a=2$，$b=\sqrt{5}$代入 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$，

得雙曲線的方程式為 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$．



【類題 3】

求頂點為 $A(3，0)$與 $B(-3，0)$，焦點為 $F_1(4，0)$與 $F_2(-4，0)$的雙曲線方程式．

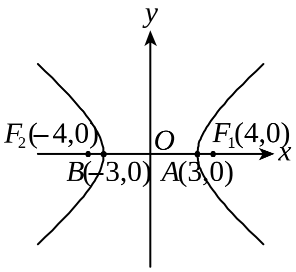
Ans：$\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$

【詳解】

如下圖所示，

可知雙曲線的中心為(0,0)，貫軸在 x 軸上，

因此其標準式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$的形式．



因為 $a=3$，$c=4$，

所以由 $c^2=a^2+b^2$ 可得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{7}$ ．

將 $a=3$，$b=\sqrt{7}$ 代入 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

得雙曲線的方程式為 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$ ．

【例題 4】

求焦點為 $F_1(0，5)$與 $F_2(0，-5)$，共軛軸長為 6 的雙曲線方程式．

Ans：$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$

【詳解】

因為雙曲線的中心為 $\overline{F_1F_2}$ 的中點，

所以其中心為原點．

又因為 $F_1(0，5)$與 $F_2(0，-5)$都在 y 軸上，

所以雙曲線的貫軸在 y 軸上，

即雙曲線的方程式為$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$的形式．

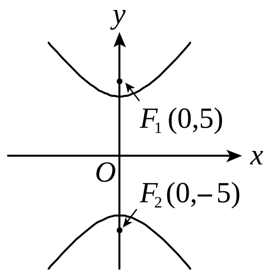
因為共軛軸長 $2b=6$， $2c=\overline{F_1F_2}=10$，

所以 $b=3$， $c=5$，

代入 $c^2=a^2+b^2$，解得 $a=4$．

將 $a=4$， $b=3$ 代入 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，

得雙曲線的方程式為$\frac{y^2}{16}-\frac{x^2}{9}=1$．



【類題 4】

求頂點為 $A(0，2)$與 $B(0，-2)$，共軛軸長為 4 的雙曲線方程式．

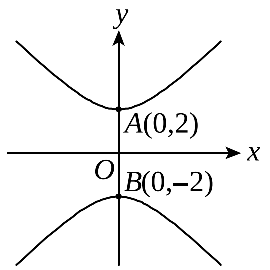
Ans： $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$

【詳解】

如下圖所示，

可知雙曲線的中心為$(0，0)$，貫軸在 y 軸上，

因此其標準式為$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$的形式．



因為 $a=2$，$2b=4$，即 $b=2$，

所以將 $a=2$，$b=2$ 代入 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$，

得雙曲線的方程式為 $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{4}=1$.

【例題 5】

求雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 的頂點與焦點坐標 .

Ans：頂點為(3，0)與(–3，0)，焦點為 $(\sqrt{13},0)$ 與 $(-\sqrt{13},0)$

【詳解】

將雙曲線的方程式改寫成 $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$，

得 $a=3$，$b==2$，

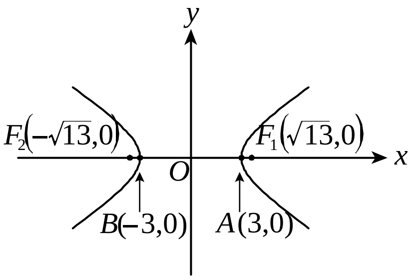
再由 $c^2=a^2+b^2$ 求得 $c=\sqrt{13}$.

由方程式知道，

雙曲線的中心為原點，貫軸在 x 軸上，

因此雙曲線的頂點為(3，0)與(–3，0)，

兩焦點為 $(\sqrt{13},0)$ 與 $(-\sqrt{13},0)$.



【類題 5】

求雙曲線 $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$ 的頂點與焦點坐標．

Ans：頂點為(0，3)與(0，−3)，焦點為(0，4)與(0，−4)

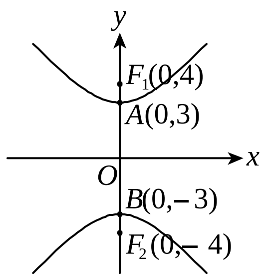
【詳解】

將雙曲線的方程式改寫成 $\frac{y^2}{3^2}-\frac{x^2}{(\sqrt{7})^2}=1$，

得 $a=3$， $b=\sqrt{7}$，

再由 $c^2=a^2+b^2$ 求得 $c=\sqrt{a^2+b^2}=4$ ．

由方程式知道，
雙曲線的中心為原點，貫軸在 y 軸上，
因此雙曲線的頂點為(0，3)與(0，−3)，
兩焦點為(0，4)與(0，−4)．



【例題 6】

設 P 為雙曲線 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ 上的一點．若 F_1，F_2 為此雙曲線的兩個焦點，且 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:2$，則△$F_1PF_2$ 的周長為何?

Ans：30

【詳解】

由 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{27}=1$ 可知：

$a^2=9$，$b^2=27$，即 $a=3$，

再由 $c^2=a^2+b^2$ 求得 $c=6$．

因為 P 為雙曲線上的一點，

所以 $|\overline{PF_2}-\overline{PF_1}|=2a=6$，

又因為 $\overline{PF_1}:\overline{PF_2}=1:2$，所以 $\begin{cases}\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=6\\ \overline{PF_2}=2\overline{PF_1}\end{cases}$，

解得 $\overline{PF_1}=6$，$\overline{PF_2}=12$．

因此△F_1PF_2 的周長為

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}+\overline{F_1F_2}=6+12+2c=18+12=30$．

【類題 6】

設 F_1，F_2 為雙曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 的兩個焦點，P 為雙曲線上一點．若△PF_1F_2 的周長為 20，則△PF_1F_2 的面積為何?

Ans：$4\sqrt{15}$

【詳解】

由 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$ 可知：

$a^2=4$，$b^2=12$，

即 $a=2$，$b=2\sqrt{3}$，

再由 $c^2=a^2+b^2$ 求得 $c=4$， $\overline{F_1F_2}=2c=8$ ．
因為$\triangle PF_1F_2$的周長為 20，
所以 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=20-\overline{F_1F_2}=20-8=12$ ，
又因為 P 為雙曲線上一點，
所以$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=4$ ．
由 $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=12$與$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=4$ ，
可得$\triangle PF_1F_2$的三邊長分別為 4， 8， 8，
且$\triangle PF_1F_2$是一個等腰三角形 ．
因為$\triangle PF_1F_2$中以邊長 4 為底邊，

可得高為 $\sqrt{8^2-2^2}=2\sqrt{15}$ ，

所以$\triangle PF_1F_2$的面積為 $\dfrac{4\cdot 2\sqrt{15}}{2}=4\sqrt{15}$ ．

【例題 7】

已知一雙曲線與橢圓 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{36}=1$有共同的焦點，且其共軛軸長為 $2\sqrt{3}$，求此雙曲線的方程式．

Ans： $\dfrac{y^2}{27}-\dfrac{x^2}{3}=1$

【詳解】

因為雙曲線與橢圓 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{36}=1$共焦點，

所以雙曲線的形式，c 和中心都與橢圓 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{36}=1$相同 ．

假設雙曲線的貫軸長為 $2a'$ ．
由題意知雙曲線的共軛軸長為 $2b'=2\sqrt{3}$ ， 即 $b'=\sqrt{3}$ ．

由橢圓的標準式 $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{36}=1$，得橢圓為上下型，

中心為(0，0)，

且 $a=6$， $b=\sqrt{6}$ ， $c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{30}$ ，

並得雙曲線的 $c=\sqrt{30}$ ．
再由雙曲線的性質 $c^2=a'^2+b'^2$，
得 $(\sqrt{30})^2=a'^2+(\sqrt{3})^2$ ，
即 $30=a'^2+3$，解得 $a'=\sqrt{27}=3\sqrt{3}$ ．

故雙曲線的方程式為 $\dfrac{y^2}{27}-\dfrac{x^2}{3}=1$ ．

【類題 7】

已知雙曲線 $\dfrac{x^2}{k^2}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 與橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{k}=1$ 有相同的焦點，求 k 的值．

Ans：2

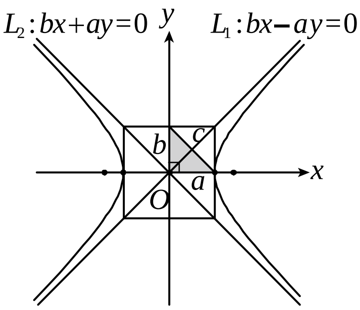
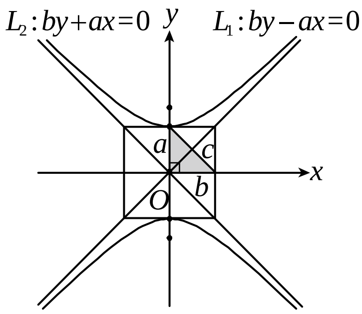
【詳解】

因為雙曲線 $\dfrac{x^2}{k^2}-\dfrac{y^2}{3}=1$ 與橢圓 $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{k}=1$ 的中心均為 $(0,0)$，
又兩曲線的焦點亦相同，所以兩曲線的 c 相同．
由雙曲線 $c^2=a^2+b^2$，可得雙曲線的 $c^2=k^2+3$．
又由橢圓的 $c^2=a'^2-b'^2$，可得 $c^2=9-k$．
因此，$k^2+3=9-k$，
整理得 $k^2+k-6=0$，解得 $k=2$ 或 -3（不合）．
故 k 的值為 2．

主題三、雙曲線的漸近線及其性質

1. 雙曲線的兩條漸近線的交點為雙曲線的中心.

2. 左右型雙曲線的漸近線之斜率為 $\pm\frac{b}{a}$;上下型雙曲線的漸近線之斜率為 $\pm\frac{a}{b}$.

方程式	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	$\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$
圖形與漸近線		

3.

方程式	$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\frac{(y-k)^2}{a^2}-\frac{(x-h)^2}{b^2}=1$
漸近線	$b(x-h)\pm a(y-k)=0$	$b(y-k)\pm a(x-h)=0$

4. 雙曲線 $(a_1x+b_1y+c_1)(a_2x+b_2y+c_2)=k\neq 0$ 的兩條漸近線方程式為

$a_1x+b_1y+c_1=0$ 與 $a_2x+b_2y+c_2=0$.

【例題 8】

求雙曲線 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ 的兩條漸近線方程式．

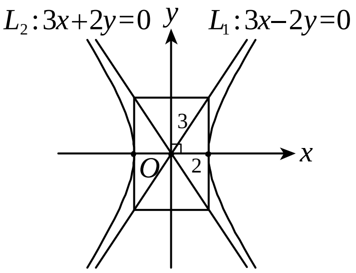
Ans：$3x-2y=0$ 與 $3x+2y=0$

【詳解】

將雙曲線方程式改寫成 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{3^2}=1$，

得 $a=2$，$b=3$，

兩條漸近線方程式為 $3x-2y=0$ 與 $3x+2y=0$．



【類題 8】

求雙曲線 $y^2-\frac{x^2}{4}=1$ 的兩條漸近線方程式．

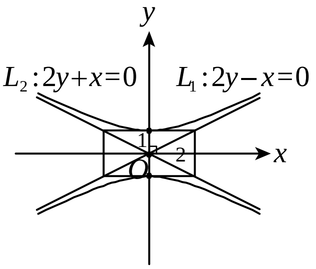
Ans：$2y-x=0$ 與 $2y+x=0$

【詳解】

將雙曲線方程式改寫成 $\frac{y^2}{1^2}-\frac{x^2}{2^2}=1$，

得 $a=1$，$b=2$，

兩條漸近線方程式為 $2y-x=0$ 與 $2y+x=0$．



【例題 9】

求與 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{1}=1$ 有相同的漸近線，且通過點(4，1)的雙曲線方程式．

Ans：$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$

【詳解】

將雙曲線方程式改寫成 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{1^2}=1$，

可得其漸近線方程式為

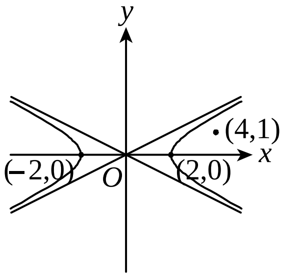
$x-2y=0$ 與 $x+2y=0$ ．

因為雙曲線與 $\frac{x^2}{2^2}-\frac{y^2}{1^2}=1$ 有相同的漸近線，

且通過點(4,1)，如下圖所示，

所以其貫軸在 x 軸上，可設其方程式為 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$，

且其漸近線方程式為 $bx-ay=0$ 與 $bx+ay=0$ ．



因為 $bx-ay=0$ 與 $x-2y=0$ 表示相同的直線，

所以比較係數可設 $a=2k$， $b=k$，

即雙曲線的方程式為 $\frac{x^2}{(2k)^2}-\frac{y^2}{k^2}=1$ ．

將(4，1)代入方程式解得 $k^2=3$，

故雙曲線的方程式為 $\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{3}=1$ ．

【另解】

設Γ：$x^2-4y^2=t$，

(4，1)代入得 $t=16-4=12$，

故Γ：$x^2-4y^2=12$.

【類題 9】

求與 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$ 有相同的漸近線，且通過點 $(4\sqrt{2},9)$ 的雙曲線方程式．

Ans：$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1$

【詳解】

將雙曲線方程式改寫成 $\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}=1$，

可得其漸近線方程式為

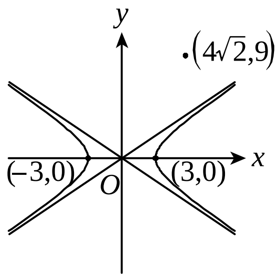
$2x-3y=0$ 與 $2x+3y=0$.

因為雙曲線與 $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$有相同的漸近線,

且通過點 $(4\sqrt{2},9)$，如下圖所示,

所以其貫軸在 y 軸上，可設其方程式為 $\frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$,

且其漸近線方程式為 $by-ax=0$ 與 $by+ax=0$.



因為 $by-ax=0$ 與 $2x-3y=0$ 表示相同的直線,

所以比較係數可設 $b=3k$, $a=2k$,

即雙曲線的方程式為 $\frac{y^2}{4k^2}-\frac{x^2}{9k^2}=1$.

將 $(4\sqrt{2},9)$ 代入方程式 $\frac{81}{4k^2}-\frac{32}{9k^2}=1$

解得 $k^2=\frac{601}{36}$,

故雙曲線的方程式為 $4x^2-9y^2=-601$. .

【另解】

設Γ：$4x^2-9y^2=t$，

$(4\sqrt{2}$，$9)$代入得 $t=128-729=-601$，

故Γ：$4x^2-9y^2=-601$.

【例題 10】

求漸近線為 $2x-y=0$ 與 $2x+y=0$，且焦點為 $F(0,\sqrt{10})$ 的雙曲線方程式．

Ans：$\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{2}=1$

【詳解】

因為兩漸近線的交點為雙曲線的中心，

所以將兩漸近線聯立 $\begin{cases}2x+y=0\\2x-y=0\end{cases}$，

解得雙曲線的中心為(0，0)．

因此，由中心(0，0)與焦點 $(0,\sqrt{10})$

得到雙曲線為上下型，且 $c=\sqrt{10}$ ．

又由雙曲線為上下型，且兩漸近線的斜率為±2，

得 $\frac{a}{b}=2$，即 $a=2b$ ．

代入 $c^2=a^2+b^2$，得 $1=4b^2+b^2$，

解得 $b=\sqrt{2}$，並得 $a=2\sqrt{2}$ ．

故雙曲線的方程式為 $\frac{y^2}{8}-\frac{x^2}{2}=1$ ．

【類題 10】

求兩焦點為 $F_1(4，2)$與 $F_2(-6，2)$，一漸近線的斜率為 $\frac{4}{3}$ 的雙曲線方程式．

Ans：$\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$

【詳解】

因為雙曲線的兩焦點為 $F_1(4，2)$與 $F_2(-6，2)$，

所以中心為(−1，2)，$c=5$，

且雙曲線為左右型，

又一漸近線的斜率為 $\frac{4}{3}$，得 $\frac{b}{a}=\frac{4}{3}$，即 $b=\frac{4}{3}a$.

代入 $c^2=a^2+b^2$，得 $25=a^2+\frac{16}{9}a^2=\frac{25}{9}a^2$，

解得 $a=3$，並得 $b=4$.

故雙曲線的方程式為 $\frac{(x+1)^2}{9}-\frac{(y-2)^2}{16}=1$.

四、雙曲線的平移

求雙曲線標準式的三個條件:

(1) 中心(h,k).

(2) a,b（在a,b,c三數中c的值最大,且$c^2=a^2+b^2$）.

(3) 形式（左右型:a^2的位置在x^2下方;上下型:a^2的位置在y^2下方）.

由(1)(2)(3)即可求得雙曲線的標準式.

左右型	上下型
$\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$	$\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$

【例題 11】

求兩焦點為 $F_1(1，1)$與 $F_2(-5，1)$，貫軸長為 4 的雙曲線方程式．

Ans：$\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$

【詳解】

因為雙曲線的兩焦點為 $F_1(1，1)$與 $F_2(-5，1)$，

所以其中心為$(-2，1)$，且貫軸平行 x 軸，

即雙曲線的方程式為 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$的形式．

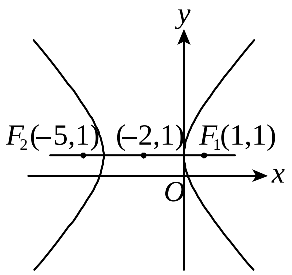
由 $2a=4$，$2c=\overline{F_1F_2}=6$及 $c^2=a^2+b^2$，

解得 $a=2$，$c=3$，$b=\sqrt{5}$．

將 $a=2$，$b=\sqrt{5}$及中心$(-2，1)$

代入 $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$，

得雙曲線的方程式為 $\dfrac{(x+2)^2}{4}-\dfrac{(y-1)^2}{5}=1$．



【類題 11】

求兩頂點為 $A(1，-3)$與 $B(1，5)$，一焦點為 $F(1，6)$的雙曲線方程式．

Ans：$\dfrac{(y-1)^2}{16}-\dfrac{(x-1)^2}{9}=1$

【詳解】

因為雙曲線的兩頂點為 $A(1，-3)$與 $B(1，5)$，

所以其中心為(1，1)，且貫軸平行 y 軸，

即雙曲線的方程式為 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$的形式．

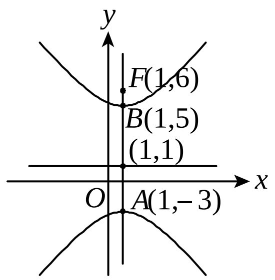
由 $a=5-1=4$，$c=6-1=5$

及 $c^2=a^2+b^2$，可得 $b=3$．

將 $a=4$，$b=3$ 及中心(1，1)

代入 $\dfrac{(y-k)^2}{a^2}-\dfrac{(x-h)^2}{b^2}=1$，

得雙曲線的方程式為 $\dfrac{(y-1)^2}{16}-\dfrac{(x-1)^2}{9}=1$．



【例題 12】

求雙曲線 $4x^2-4y^2-8x-16y+4=0$ 的頂點、焦點坐標與漸近線方程式．

Ans：頂點為(1，0)與(1，−4)，焦點為 $(1,-2+2\sqrt{2})$與 $(1,-2-2\sqrt{2})$，

漸近線為 $x-y-3=0$ 與 $x+y+1=0$

【詳解】

將 $4x^2-4y^2-8x-16y+4=0$

配方得 $4(x-1)^2-4(y+2)^2=-16$，

再將等號的兩邊除以−16，

改寫成 $\dfrac{(y+2)^2}{2^2}-\dfrac{(x-1)^2}{2^2}=1$，

得 $a=2$，$b=2$.

再由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $c=2\sqrt{2}$.

由方程式知道：

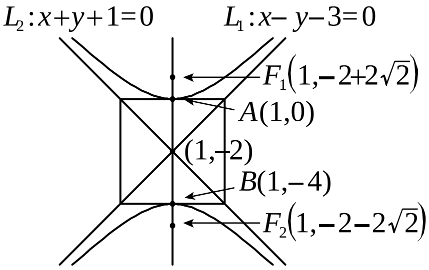
雙曲線的中心在$(1，-2)$，貫軸平行 y 軸，

因此雙曲線的頂點為$(1，0)$與$(1，-4)$，

焦點為 $(1,-2+2\sqrt{2})$ 與 $(1,-2-2\sqrt{2})$，

漸近線為 $2(y+2)-2(x-1)=0$ 與 $2(y+2)+2(x-1)=0$，

即 $x-y-3=0$ 與 $x+y+1=0$.



【類題 12】

求雙曲線 $x^2-9y^2+4x+18y-14=0$ 的頂點、焦點坐標與漸近線方程式 .

Ans：頂點為$(1，1)$與$(-5，1)$，焦點為 $(-2+\sqrt{10},1)$ 與 $(-2-\sqrt{10},1)$，

漸近線為 $x-3y+5=0$ 與 $x+3y-1=0$

【詳解】

將 $x^2-9y^2+4x+18y-14=0$

配方得$(x+2)^2-9(y-1)^2=9$，

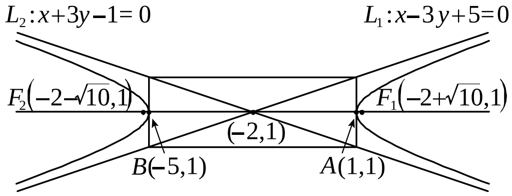
再將等號的兩邊除以 9，改寫成 $\dfrac{(x+2)^2}{3^2}-\dfrac{(y-1)^2}{1^2}=1$，

得 $a=3$，$b=1$.

再由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $c=\sqrt{10}$.

由方程式知道：

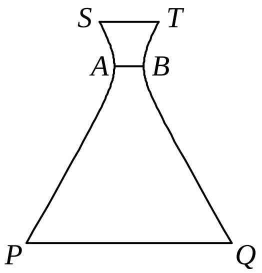
雙曲線的中心在$(-2，1)$，貫軸平行 x 軸，
因此雙曲線的頂點為$(1，1)$與$(-5，1)$，
焦點為 $(-2+\sqrt{10},1)$ 與 $(-2-\sqrt{10},1)$，
漸近線為$(x+2)-3(y-1)=0$ 與$(x+2)+3(y-1)=0$，
即 $x-3y+5=0$ 與 $x+3y-1=0$.



五、雙曲線的應用

【例題 13】

下圖是某冷卻塔的截面圖，其頸部 AB 剛好是雙曲線的貫軸．已知 $\overline{AB}$，$\overline{ST}$ 與 $\overline{PQ}$ 互相平行，$\overline{AB}=2$，$\overline{ST}=4$，$\overline{PQ}=14$，且 $\overline{AB}$ 與 $\overline{ST}$ 相距 3，求 $\overline{AB}$ 與 $\overline{PQ}$ 的距離．



Ans：12

【詳解】

設雙曲線的中心為原點，貫軸在 x 軸上．

因為貫軸長 $2a=\overline{AB}=2$，即 $a=1$，

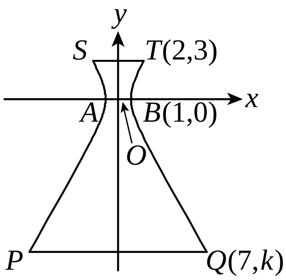
所以設其方程式為 $\dfrac{x^2}{1^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$．

依題意可設 $B(1，0)$，$T(2，3)$，$Q(7，k)$，其中 $k<0$．

將 $(2，3)$，$(7，k)$ 代入方程式，得 $\begin{cases}\dfrac{4}{1}-\dfrac{9}{b^2}=1\\ \dfrac{49}{1}-\dfrac{k^2}{b^2}=1\end{cases}$，

解得 $b^2=3$，$k=\pm12$（12 不合）．

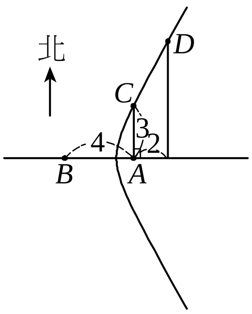
故 $\overline{AB}$ 與 $\overline{PQ}$ 的距離為 12．



【類題 13】

下圖是一張航海的位置圖．一船沿著雙曲線Γ航行，Γ的兩焦點分別為燈塔 *A*，*B*，兩燈塔相距 4 公里，直線 *AB* 是一條水平線．此船曾經位在燈塔 *A* 向北 3 公里的位置上，現在此船於燈塔 *A* 東方 2 公里向北 *d* 公里處發出求救訊號，

求此船與 *A* 燈塔的距離．



Ans：7 公里

【詳解】

設雙曲線的中心為原點，

貫軸在 x 軸上，貫軸長 $2a$，共軛軸長 $2b$．

因為 $2c=\overline{AB}=4$， 即 $c=2$，

且 $b^2=c^2-a^2=4-a^2$，

並得 C 點坐標為$(2，3)$，D 點的坐標為$(4，d)$．

設Γ的方程式為 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$．

並由 $b^2=4-a^2$,

將方程式改寫成 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4-a^2}=1$.

將(2，3)代入 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{4-a^2}=1$，得 $a^2=1$,

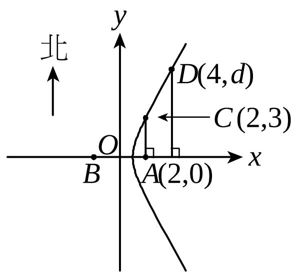
即Γ的方程式為 $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{3}=1$.

再將(4，d)代入 $\dfrac{x^2}{1}-\dfrac{y^2}{3}=1$,

得 $16-\dfrac{d^2}{3}=1$，解得 $d=3\sqrt{5}$,

並由畢氏定理，得 $\overline{AD}=\sqrt{2^2+(3\sqrt{5})^2}=7$,

故此船與 A 燈塔的距離為 7 公里 .



主題六、軌跡方程式

設動點的坐標為(x,y)，由題意找出x， y的關係式，即為動點所成圖形的方程式(或稱為動點的軌跡方程式).

【例題 14】

求通過定點 $A(10，0)$，且與圓 $C：x^2+y^2=64$ 相切之所有圓的圓心所成圖形的方程式．

Ans：$\dfrac{(x-5)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$

【詳解】

由圓的標準式，得圓 C 的圓心 F 為$(0,0)$，半徑為 8．

假設通過定點 A，且與圓 C 相切之所有圓之

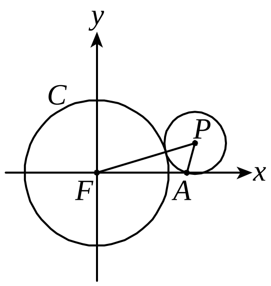
圓心 P 的坐標為$(x，y)$，半徑為 r．

如下圖所示，則滿足題意的圓可分為兩種情形：

(1) 與圓 C 外切，則 $\overline{PF}=8+r$ ． ①

因為滿足題意的圓通過點 A，所以 $\overline{PA}=r$， ②

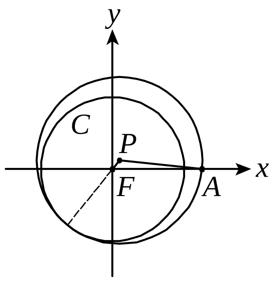
將①②兩式相減，得 $\overline{PF}-\overline{PA}=8+r-r=8$ ． ③



(2) 與圓 C 內切，則 $\overline{PF}=r-8$ ． ④

因為滿足題意的圓通過點 A，所以 $\overline{PA}=r$， ⑤

將④⑤兩式相減，得 $\overline{PF}-\overline{PA}=r-8-r=-8$. ⑥



綜合③⑥兩式可得 $|\overline{PF}-\overline{PA}|=8$.
因此，點 P 所形成的圖形是以 F，A 兩點為焦點，
$2a=8$ 的雙曲線，
且雙曲線為左右型，中心為 $\overline{AF}$ 的中點(5，0) .
由 $2a=8$， $2c=\overline{AF}=10$， 得 $a=4$，$c=5$，

且得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{5^2-4^2}=3$.

故由雙曲線的標準式，得 P 點的軌跡方程式為

$\dfrac{(x-5)^2}{4^2}-\dfrac{y^2}{3^2}=1$， 即 $\dfrac{(x-5)^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

【類題 14】

求通過定點 $A(0，-1)$，且與圓 $C：x^2+(y-5)^2=4$ 相切之所有圓的圓心所成圖形的方程式 .

Ans： $\dfrac{(y-2)^2}{1}-\dfrac{x^2}{8}=1$

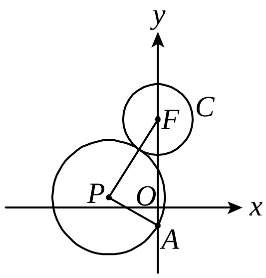
【詳解】
由圓的標準式得知，圓 C 的圓心 F 為(0，5)，半徑為 2 .
假設通過定點 A，
且與圓 C 相切之所有圓之圓心 P 的坐標為(x,y)，半徑為 r .

如下圖所示，則滿足題意的圓可分為兩種情形：

(1) 與圓 C 外切，則 $\overline{PF}=2+r$ ． ①

因為滿足題意的圓通過點 A，所以 $\overline{PA}=r$， ②

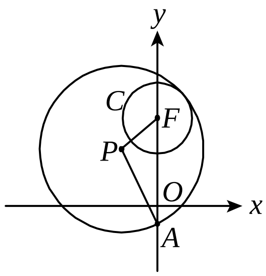
將①②兩式相減，得 $\overline{PF}-\overline{PA}=2+r-r=2$ ． ③



(2) 與圓 C 內切，則 $\overline{PF}=r-2$ ． ④

因為滿足題意的圓通過點 A，所以 $\overline{PA}=r$， ⑤

將④⑤兩式相減，得 $\overline{PF}-\overline{PA}=r-2-r=-2$ ． ⑥



綜合③⑥兩式可得 $|\overline{PF}-\overline{PA}|=2$ ．

因此，點 P 所形成的圖形是以 F，A 兩點為焦點，

$2a=2$ 的雙曲線，

且雙曲線為上下型，中心為 $\overline{AF}$ 的中點(0，2)．

由 $2a=2$， $2c=\overline{AF}=6$ ，得 $a=1$，$c=3$，

且得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$ ．

故由雙曲線的標準式，得 P 點的軌跡方程式為

$\frac{(y-2)^2}{1^2}-\frac{x^2}{(2\sqrt{2})^2}=1$，即 $\frac{(y-2)^2}{1}-\frac{x^2}{8}=1$.

主題七、等軸雙曲線與共軛雙曲線

1. 等軸雙曲線：

當一雙曲線的貫軸與共軛軸等長時，稱此雙曲線為等軸雙曲線（即 $2a=2b$，得 $a=b$）.

說例：雙曲線 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{9}=1$.

貫軸平行坐標軸之等軸雙曲線，其兩漸近線互相垂直，且斜率分別為 1 與 -1，因此方程式形如 $x+y=d_1$，$x-y=d_2$.

(2) 共軛雙曲線：

當雙曲線 Γ_1 的貫軸為雙曲線 Γ_2 的共軛軸，且 Γ_1 的共軛軸為 Γ_2 的貫軸時，稱 Γ_1 與 Γ_2 互為共軛雙曲線 .

說例：$\Gamma_1:\dfrac{x^2}{25}-\dfrac{y^2}{9}=1$ 與 $\Gamma_2:\dfrac{y^2}{9}-\dfrac{x^2}{25}=1$ 互為共軛雙曲線 .

【例題 15】

已知雙曲線Γ的兩條漸近線分別為 $x-y=2$ 與 $x+y=0$，且通過點(3，0)，求

(1) Γ的方程式．

(2) Γ的共軛雙曲線．

Ans：(1) $\dfrac{(x-1)^2}{3}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$，(2) $\dfrac{(y+1)^2}{3}-\dfrac{(x-1)^2}{3}=1$

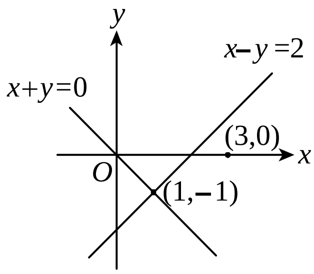
【詳解】

因為Γ之兩條漸近線的斜率分別為 1 與−1，

所以Γ為等軸雙曲線，

又其中心為兩漸近線 $x-y=2$ 與 $x+y=0$ 的交點(1，−1)，

並可畫出漸近線與點(3，0)的位置如下圖．



由上圖可知雙曲線為左右型，

其方程式為 $\dfrac{(x-1)^2}{a^2}-\dfrac{(y+1)^2}{a^2}=1$ ．

將(3，0)代入，解得 $a^2=3$，

故Γ的方程式為 $\dfrac{(x-1)^2}{3}-\dfrac{(y+1)^2}{3}=1$ ．

【另解】

設Γ：$(x-y-2)(x+y)=t$

(3, 0)代入得 $t=(3-0-2)(3+0)=3$

故Γ：$(x-y-2)(x+y)=3$.

(2) 由Γ的方程式 $\frac{(x-1)^2}{3}-\frac{(y+1)^2}{3}=1$，

可得其共軛雙曲線的方程式為 $\frac{(y+1)^2}{3}-\frac{(x-1)^2}{3}=1$ ．

【類題 15】

已知雙曲線Γ的兩條漸近線分別為 $x+y=-2$ 與 $x-y=2$，且通過點(1，0)，求

(1) Γ的方程式．

(2) Γ的共軛雙曲線．

Ans：(1) $\frac{(y+2)^2}{3}-\frac{x^2}{3}=1$，(2) $\frac{x^2}{3}-\frac{(y+2)^2}{3}=1$

【詳解】

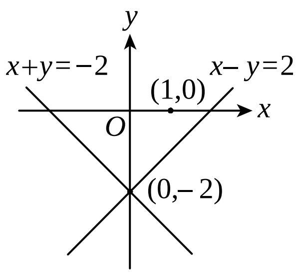
(1) 因為Γ之兩條漸近線的斜率分別為 1 與−1，

所以Γ為等軸雙曲線，

又其中心為兩漸近線

$x+y=-2$ 與 $x-y=2$ 的交點(0，−2)，

並可畫出漸近線與點(1,0)的位置如下圖．



由上圖可知雙曲線為上下型，

其方程式為 $\frac{(y+2)^2}{a^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ ．

將(1，0)代入，解得 $a^2=3$，

故Γ的方程式為 $\frac{(y+2)^2}{3}-\frac{x^2}{3}=1$ ．

【另解】

設Γ：(x＋y＋2)(x－y－2)＝t

(1, 0)代入得 t＝(1＋0＋2)(1－0－2)＝–3

故Γ：(x＋y＋2)(x－y－2)＝–3.

(2) 由Γ的方程式 $\frac{(y+2)^2}{3}-\frac{x^2}{3}=1$，

可得其共軛雙曲線的方程式為

$\frac{x^2}{3}-\frac{(y+2)^2}{3}=1$.

【例題 16】

已知等軸雙曲線Γ：$3x^2-ay^2-6x+12y+b=0$ 的一條漸近線為 $x-y=1$，且Γ通過點(1，1)，求

(1) a，b 的值．

(2) Γ的另一條漸近線方程式．

(3) Γ的共軛雙曲線方程式．

Ans：(1) $a=3$，$b=-6$，(2) $x+y=3$，(3) $\frac{(x-1)^2}{1}-\frac{(y-2)^2}{1}=1$

【詳解】

(1)(2)因為Γ為等軸雙曲線，

又Γ的一條漸近線為 $x-y=1$，

所以另一條漸近線為 $x+y=c$，並得 $a=3$．

將 $3x^2-3y^2-6x+12y+b=0$

配方得 $3(x-1)^2-3(y-2)^2=-9-b$，

兩邊同除以$-9-b$，可得

$\frac{3(x-1)^2}{-9-b}-\frac{3(y-2)^2}{-9-b}=1$，即 $\frac{(x-1)^2}{\frac{-9-b}{3}}-\frac{(y-2)^2}{\frac{-9-b}{3}}=1$.

由上式可得Γ的中心為(1，2)．

因為漸近線 $x+y=c$ 通過中心，所以 $c=3$，

又將(1，1)代入 $\dfrac{(x-1)^2}{\frac{-9-b}{3}}-\dfrac{(y-2)^2}{\frac{-9-b}{3}}=1$，

得 $0-\dfrac{1}{\frac{-9-b}{3}}=1$，解得 $b=-6$，

並得Γ的方程式為 $\dfrac{(y-2)^2}{1}-\dfrac{(x-1)^2}{1}=1$.

故得 $a=3$，$b=-6$，

另一條漸近線的方程式為 $x+y=3$.

(3) 由Γ的方程式 $\dfrac{(y-2)^2}{1}-\dfrac{(x-1)^2}{1}=1$，

可得其共軛雙曲線的方程式為

$\dfrac{(x-1)^2}{1}-\dfrac{(y-2)^2}{1}=1$.

【另解】

Γ：$3x^2-ay^2-6x+12y+b=0$

(1) 等軸 $\Rightarrow$ $a=3$

(1，1)代入

$\Rightarrow 3-3-6+12+b=0$

$\Rightarrow b=-6$

(2) Γ：$3x^2-3y^2-6x+12y-6=0$

$\Rightarrow x^2-y^2-2x+4y-2=0$

$\Rightarrow (x-1)^2-(y-2)^2=-1$

漸近線為$(x-1)+(y-2)=0$ 與$(x-1)-(y-2)=0$

(3) 共軛雙曲線方程式$(x-1)^2-(y-2)^2=1$.

【類題 16】

已知雙曲線 Γ：$2x^2-ay^2+4y+b=0$ 是一個等軸雙曲線，且通過點 $(\sqrt{2},3)$，求

(1) a，b 的值．

(2) Γ的漸近線方程式．

(3) Γ的共軛雙曲線方程式．

Ans：(1) $a=2$，$b=2$，(2) $x-y=-1$ 與 $x+y=1$，(3)

$$\frac{x^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}=1$$

【詳解】

(1) 因為 Γ：$2x^2-ay^2+4y+b=0$ 是一個等軸雙曲線，

所以 $a=2$，

又因為通過點 $(\sqrt{2},3)$，

所以將點 $(\sqrt{2},3)$ 代入方程式，

得 $4-18+12+b=0$，解得 $b=2$．

(2) 將 $2x^2-2y^2+4y+2=0$ 配方得

$2x^2-2(y-1)^2=-4$，

兩邊同除以-4，整理得 $\frac{(y-1)^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$．

由上式可得 Γ的中心為$(0，1)$．

因為當貫軸平行坐標軸時，

等軸雙曲線之漸近線的斜率為± 1，

所以兩條漸近線方程式分別為

$x-y=-1$ 與 $x+y=1$．

(3) 由 Γ的方程式 $\frac{(y-1)^2}{2}-\frac{x^2}{2}=1$，

可得其共軛雙曲線的方程式為

$$\frac{x^2}{2}-\frac{(y-1)^2}{2}=1．$$

【另解】

Γ：$2x^2-ay^2+4y+b=0$

(1) 等軸 $\Rightarrow a=2$

$(\sqrt{2},3)$ 代入

$\Rightarrow 4-18+12+b=0$

$\Rightarrow b=2$

(2) Γ：$2x^2-2y^2+4y+2=0$

$\Rightarrow x^2-y^2+2y+1=0$

$\Rightarrow x^2-(y-1)^2=-2$

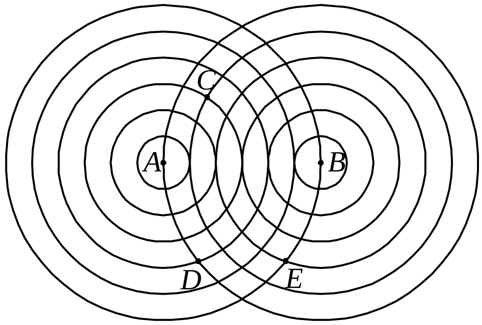
漸近線為 $x+(y-1)=0$ 與 $x-(y-1)=0$

(3)共軛雙曲線方程式 $x^2-(y-1)^2=2$.

重要精選考題

基礎題

1. 下圖是以 ***A***，***B*** 為圓心的兩組同心圓，各組 **6** 個同心圓的半徑分別為 **1**，**2**，**3**，**4**，**5**，**6**，且 $\overline{AB}=6$ ．已知有一雙曲線以 ***A***，***B*** 為焦點，且通過 ***C***，***D***，***E*** 三點，求此雙曲線的貫軸長、共軛軸長及正焦弦長．



Ans：貫軸長 2，共軛軸長 $4\sqrt{2}$，正焦弦長 16

【詳解】

由雙曲線的定義，得 $|\overline{CA}-\overline{CB}|=2a$，即 $|3-5|=2a$，

因此貫軸長為 $2a=2$，並得 $a=1$ ．

因為 A，B 為雙曲線的兩焦點，

所以 $\overline{AB}=2c$，即 $2c=6$，解得 $c=3$ ．

由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3^2-1^2}=2\sqrt{2}$，

因此，共軛軸長為 $2b=4\sqrt{2}$，

且雙曲線的正焦弦長為 $\dfrac{2b^2}{a}=\dfrac{2\cdot 8}{1}=16$ ．

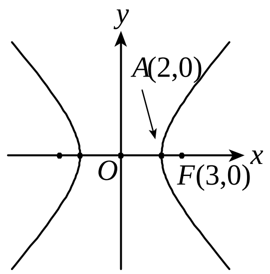
2. **已知雙曲線的中心為原點，有一頂點為 $A(2，0)$，一焦點為 $F(3，0)$，求此雙曲線的方程式．**

Ans：$\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$

【詳解】

由下圖可知，雙曲線為左右型，

$a=2$，$c=3$．



由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$．

故此雙曲線的方程式為 $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{5}=1$．

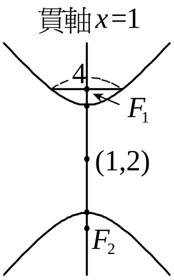
3. **已知雙曲線的中心在 $(1，2)$，正焦弦長為 4，焦點在直線 $x=1$ 上，且兩焦點間的距離為 $2\sqrt{15}$，求此雙曲線的方程式．**

Ans：$\dfrac{(y-2)^2}{9}-\dfrac{(x-1)^2}{6}=1$

【詳解】

由下圖可知，雙曲線為上下型，$2c=2\sqrt{15}$，即 $c=\sqrt{15}$，

又雙曲線的正焦弦長 $\dfrac{2b^2}{a}=4$，即 $b^2=2a$．



由 $c^2=a^2+b^2$，可得 $(\sqrt{15})^2=a^2+2a$，

整理得 $a^2+2a-15=0$，

解得 $a=3$ 或 -5（不合）．

因此，$b=\sqrt{2a}=\sqrt{6}$ ．

故此雙曲線的方程式為 $\dfrac{(y-2)^2}{9}-\dfrac{(x-1)^2}{6}=1$ ．

4. **設雙曲線** $\Gamma:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$，**求**

(1) Γ **的兩條漸近線方程式．**

(2) Γ **上任一點** P **到兩條漸近線之距離的乘積．**

Ans：(1) $2x-3y=0$ 與 $2x+3y=0$，(2) $\dfrac{36}{13}$

【詳解】

(1) 由雙曲線 $\Gamma:\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$，得

雙曲線 Γ 的兩條漸近線方程式為

$2x-3y=0$ 與 $2x+3y=0$ ．

(2) 假設 P 點的坐標為 $(x，y)$ ．

因為點 P 在 Γ 上，所以點 P 的坐標滿足 $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{4}=1$，

即 $4x^2-9y^2=36$ ．

利用點到直線的距離公式，得

點 P 到漸近線 $2x+3y=0$ 的距離為 $\dfrac{|2x+3y|}{\sqrt{2^2+3^2}}$，

點 P 到漸近線 $2x-3y=0$ 的距離為 $\dfrac{|2x-3y|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}$ ．

因此，點 P 到兩漸近線的距離乘積為

$$\frac{|2x+3y|}{\sqrt{2^2+3^2}}\times\frac{|2x-3y|}{\sqrt{2^2+(-3)^2}}=\frac{|4x^2-9y^2|}{13}=\frac{|36|}{13}=\frac{36}{13}\ .$$

5.　求兩焦點為(−1，1)與(9，1)，一漸近線的斜率為 $-\frac{4}{3}$ 的雙曲線方程式．

Ans：$\dfrac{(x-4)^2}{9}-\dfrac{(y-1)^2}{16}=1$

【詳解】

因為兩焦點在貫軸上，

所以由兩焦點的坐標可得貫軸所在直線的方程式為 $y=1$，

平行 x 軸，且雙曲線為左右型．

因為雙曲線為左右型，所以兩漸近線的斜率為 $\pm\dfrac{b}{a}$ ．

又由題意知一漸近線的斜率為 $-\dfrac{4}{3}$，

得到 $-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{4}{3}$，即 $b=\dfrac{4}{3}a$ ．

因為兩焦點間的距離為 $2c=9-(-1)=10$，

解得 $c=5$，

所以由 $c^2=a^2+b^2$，得 $5^2=a^2+(\frac{4}{3}a)^2$，

解得 $a=3$，$b=\dfrac{4}{3}\cdot 3=4$ ．

又雙曲線的中心為兩焦點的中點，

即為 $(\frac{-1+9}{2},\frac{1+1}{2})=(4,1)$ ．

故雙曲線的方程式為 $\frac{(x-4)^2}{9}-\frac{(y-1)^2}{16}=1$ ．

6. **求以橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的焦點為頂點，且以 Γ 的頂點為焦點的雙曲線方程式．**

Ans： $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$

【詳解】

因為雙曲線以橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的

焦點為頂點，以 Γ 的頂點為焦點，

所以雙曲線的形式和中心都與橢圓相同．

由橢圓方程式 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 得知：

橢圓為左右型，中心為(0,0)，

且 $a=3$，$b=2$，$c=\sqrt{a^2-b^2}=\sqrt{5}$ ．

因此，雙曲線的 $a'=c=\sqrt{5}$，$c'=a=3$，

並由 $c'^2=a'^2+b'^2$，得 $3^2=(\sqrt{5})^2+b'^2$，

解得 $b'=2$ ．

故雙曲線的方程式為 $\frac{x^2}{5}-\frac{y^2}{4}=1$ ．

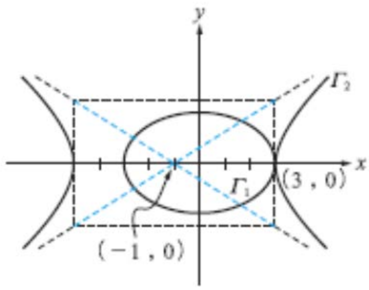
7. 坐標平面上方程式 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 的圖形與 $\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ 的圖形共有幾個交點?

(1) 1個． **(2)** 2個． **(3)** 3個． **(4)** 4個． **(5)** 0個．

【96學測】

Ans： (1)

【詳解】



$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow 4x^2+9y^2=36$……①

$\frac{(x+1)^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

$\Rightarrow 9(x+1)^2-16y^2=144$……②

① ×16＋② ×9

$\Rightarrow 64x^2+81(x+1)^2=36\times16+144\times9$

$=36(16+36)$

$\Rightarrow 145x^2+162x+81-36\times52=0$

$\Rightarrow$ 判別式 $\Delta=(162)^2-4\times145\times(81-36\times52)>0$

$\Rightarrow$ 兩圖形有一個交點(3，0)。

8. 設 F_1 與 F_2 為坐標平面上雙曲線 $\Gamma:\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{16}=1$ 的兩個焦點，P 為 Γ 上一點，使得此三點構成一等腰三角形．試問以下哪些值可能是這些等腰三角形的周長?

(1) 20． **(2)** 24． **(3)** 28． **(4)** 32． **(5)** 36．

【94學測】

Ans：(2)(5)

【詳解】

$a^2=9$, $b^2=16$,

$c^2=a^2+b^2=9+16=25$，$c=5$，

$\overline{F_1F_2}=2c=10$，

∵△PF_1F_2成一等腰三角形，

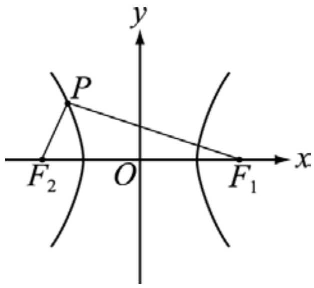
∴ $\overline{PF_1}=\overline{F_1F_2}=10$，

∴$|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=6$

⇒ $|10-\overline{PF_2}|=6$

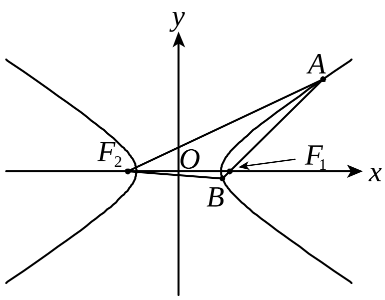
⇒ $\overline{PF_2}=16$ 或 4，

∴週長 $=10+10+16=36$ 或 $10+10+4=24$.



進階題

9. 設雙曲線Γ:$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$的兩個焦點為 F_1，F_2 . 若弦 $\overline{AB}$ 通過焦點 F_1，且 $\overline{AB}=10$，如下圖所示，則△ABF_2的周長為何?



Ans：32

【詳解】

由雙曲線標準式$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$得知：

雙曲線為左右型，

中心為(0，0)，且 $a=3$，$b=2$.

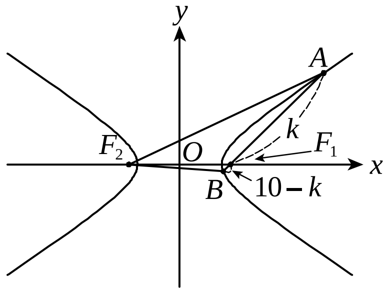
假設 $\overline{AF_1}=k$ （$k>0$），則 $\overline{BF_1}=10-k$.

由雙曲線的定義 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a=6$，

得到 $\overline{AF_2}=6+k$， $\overline{BF_2}=6+(10-k)=16-k$ ．

因此△ABF_2 的周長為

$\overline{AB}+\overline{AF_2}+\overline{BF_2}=10+(6+k)+(16-k)=32$ ．



10. **在坐標平面上，已知到點 $A(2，0)$之距離是到直線 $x=5$ 之距離的兩倍的所有點所形成的圖形是一雙曲線，求此雙曲線的貫軸長．**

Ans：4

【詳解】

假設滿足題意之點 P 的坐標為$(x，y)$．

由距離公式，得點 P 到點 $A(2,0)$之距離 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}$

與點 P 到直線 $x=5$ 之距離 $\dfrac{|x-5|}{\sqrt{1^2+0^2}}=|x-5|$的 2 倍相等，

即 $\sqrt{(x-2)^2+y^2}=2\cdot|x-5|$ ．

將兩邊平方得到$(x-2)^2+y^2=4(x-5)^2$，

整理得 $3x^2-y^2-36x+96=0$，

配方改寫成 $\dfrac{(x-6)^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$，

得 $a=\sqrt{4}=2$ ．

故貫軸長為 $2a=4$．

11. 設雙曲線$\Gamma:\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$的兩個焦點為 F_1，F_2．已知點 P 在雙曲線Γ上，且$\angle F_1PF_2=90°$，求$\triangle F_1PF_2$的面積．

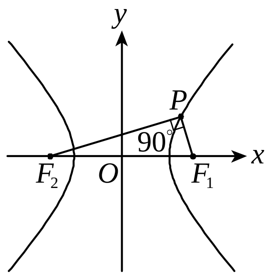
Ans：5

【詳解】

由雙曲線方程式$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{5}=1$得知：

雙曲線為左右型，中心為$(0,0)$，

且 $a=2$， $b=\sqrt{5}$ ．



由 $c^2=a^2+b^2$，可得$c=\sqrt{a^2+b^2}=3$，因此，

兩焦點 F_1，F_2 的坐標分別為$(3，0)$，$(-3，0)$．

因為雙曲線對貫軸及共軛軸皆對稱，

所以可令點 P 在第一象限．

假設$\overline{PF_1}=x$（$x>0$）．

由雙曲線的定義，得$\overline{PF_2}-\overline{PF_1}=4$，即$\overline{PF_2}=x+4$．

在$\triangle PF_1F_2$中，$\angle F_1PF_2=90°$，

利用畢氏定理可得$\overline{F_1F_2}^2=\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2$，

即 $6^2=x^2+(x+4)^2$，整理 $x^2+4x=10$．

利用三角形面積公式，得△PF_1F_2的面積為

$\frac{1}{2}\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=\frac{1}{2}\cdot x\cdot(x+4)=\frac{1}{2}\cdot 10=5$.

12. **已知雙曲線Γ的兩個焦點為 F_1，F_2，點 P 在Γ上，且 $\overline{PF_2}=20$，$\overline{PF_1}=10$，$\angle F_1PF_2=60°$，求**

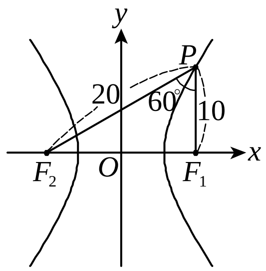
(1) $\overline{F_1F_2}$.　(2) Γ的正焦弦長 .

Ans：(1) $10\sqrt{3}$，(2) 20

【詳解】

由雙曲線的定義，得 $|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}|=2a$，

即 $2a=|10-20|=10$，解得 $a=5$.



(1)　在△PF_1F_2中，$\angle F_1PF_2=60°$，

利用餘弦定理可得

$\overline{F_1F_2}^2=\overline{PF_1}^2+\overline{PF_2}^2-2\cdot\overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}\cdot\cos 60°$，

即 $(2c)^2=10^2+20^2-2\cdot 10\cdot 20\cdot\frac{1}{2}$，

整理得 $4c^2=300$，解得 $c=5\sqrt{3}$.

故 $\overline{F_1F_2}=2c=10\sqrt{3}$.

(2)　由 $c^2=a^2+b^2$，可得

$b^2=c^2-a^2=(5\sqrt{3})^2-5^2=50$.

故Γ的正焦弦長為 $\frac{2b^2}{a}=\frac{2\cdot 50}{5}=20$.

13. **坐標平面上滿足方程式$\left(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}\right)\left(\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{2^2}\right)=0$的點$(x,y)$所構成的圖形為**

(1) 只有原點． (2) 橢圓及原點． (3) 兩條相異直線．
(4) 橢圓及雙曲線． (5)雙曲線及原點． 【100 學測】

Ans：(3)

【詳解】

$(\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2})(\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2})=0$

$\Rightarrow$ $\frac{x^2}{5^2}+\frac{y^2}{4^2}=0$或$\frac{x^2}{3^2}-\frac{y^2}{4^2}=0$

$\Rightarrow$ (x＝0 且 y＝0)或(4x＋3y＝0 或 4x－3y＝0)

$\Rightarrow$ 4x－3y＝0 及 4x＋3y＝0 兩相異直線。

14. **有一橢圓與一雙曲線有共同的焦點F_1、F_2，且雙曲線的貫軸長和橢圓的短軸長相等．設P為此橢圓與雙曲線的一個交點，且**

$\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=64$，求$\overline{F_1F_2}$的長． 【98 學測】

Ans：16

【詳解】

設橢圓的方程式為$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$，其中 $a^2=b^2+c^2$，

則雙曲線的方程式為$\frac{x^2}{b^2}-\frac{y^2}{B^2}=1$，其中 $b^2=B^2+c^2$。

因 P 為橢圓與雙曲線的交點，(設$\overline{PF_1}>\overline{PF_2}$，)故

$\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a$，$\overline{PF_1}-\overline{PF_2}=2b$，得

$\overline{PF_1}=a+b$，$\overline{PF_2}=a-b$，

又 $\overline{PF_1}\times\overline{PF_2}=a^2-b^2=64=c^2 \Rightarrow c=8$，

得 $\overline{F_1F_2}=2c=16$。

15. 平面上兩點 F1，F2 滿足 $\overline{F_1F_2}=4$。設 d 為一實數，令Γ表示平面上滿足 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=d$ 的所有 P 點所成的圖形，又令 C 為平面上以 F1 為圓心、6 為半徑的圓。請問下列哪些選項是正確的？

(1) 當 d＝0 時，Γ為直線

(2) 當 d＝1 時，Γ為雙曲線

(3) 當 d＝2 時，Γ與圓 C 交於兩點

(4) 當 d＝4 時，Γ與圓 C 交於四點

(5) 當 d＝8 時，Γ不存在 **(101 學測)**

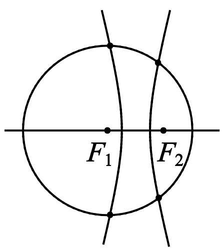
Ans：(1)(2)(5)

【詳解】

(1) ◯，當 $d=0$ 時，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=0$

$\Rightarrow \overline{PF_1}=\overline{PF_2}$

$\Rightarrow$ P 點所形成的圖形為 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線



(2) ◯，當 $d=1$ 時，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=1<\overline{F_1F_2}=4$

$\Rightarrow$ P點所形成圖形為雙曲線

(3) ╳，當 $d=2$時，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2<\overline{F_1F_2}=4$

$\Rightarrow$ P點所形成圖形為雙曲線，與圓 C 交於 4 點

(4) ╳，當 $d=4$時，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=4=\overline{F_1F_2}$

$\Rightarrow$ P點所形成圖形為以 F_1、F_2 為起點的射線，與圓 C 交於 2 點

(5) ○，當 $d=8$時，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=8>\overline{F_1F_2}$

$\Rightarrow$ P點所形成的圖形不存在

故選(1)(2)(5)

16. 平面上兩點 F₁，F₂ 滿足 $\overline{F_1F_2}$ ＝4。設 d 為一實數，令Γ表示平面上滿足 $\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|$ ＝d 的所有 P 點所成的圖形，又令 C 為平面上以 F₁ 為圓心、6 為半徑的圓。請問下列哪些選項是正確的？

(1) 當 d＝0 時，Γ為直線

(2) 當 d＝1 時，Γ為雙曲線

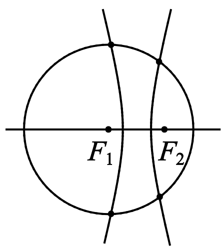
(3) 當 d＝2 時，Γ與圓 C 交於兩點

(4) 當 d＝4 時，Γ與圓 C 交於四點

(5) 當 d＝8 時，Γ不存在 [學測 101]

Ans：(1)(2)(5)

【詳解】



(1) ○，當 $d=0$時，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=0$

$\Rightarrow$ $\overline{PF_1}=\overline{PF_2}$

$\Rightarrow$ P點所形成的圖形為 $\overline{F_1F_2}$ 的中垂線

(2) ○，當 $d=1$ 時，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=1<\overline{F_1F_2}=4$

$\Rightarrow$ P 點所形成圖形為雙曲線

(3) ╳，當 $d=2$ 時，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=2<\overline{F_1F_2}=4$

$\Rightarrow$ P 點所形成圖形為雙曲線，與圓 C 交於 4 點

(4) ╳，當 $d=4$ 時，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=4=\overline{F_1F_2}$

$\Rightarrow$ P 點所形成圖形為以 F_1、F_2 為起點的射線，與圓 C 交於 2 點

(5) ○，當 $d=8$ 時，$\left|\overline{PF_1}-\overline{PF_2}\right|=8>\overline{F_1F_2}$

$\Rightarrow$ P 點所形成的圖形不存在

故選(1)(2)(5)