數學 3 進階講義

正射影與高

成功高中．陳冠宏　老師

信望愛文教基金會

10-2-2　正射影與高

定理敘述

➢ 投影長與正射影

若$\vec{a},\vec{b}$為兩非零向量，我們可以將它們平移，使其始點重合，此時它們的夾角為 θ (0°≦θ≦180°)，稱為$\vec{a},\vec{b}$的夾角

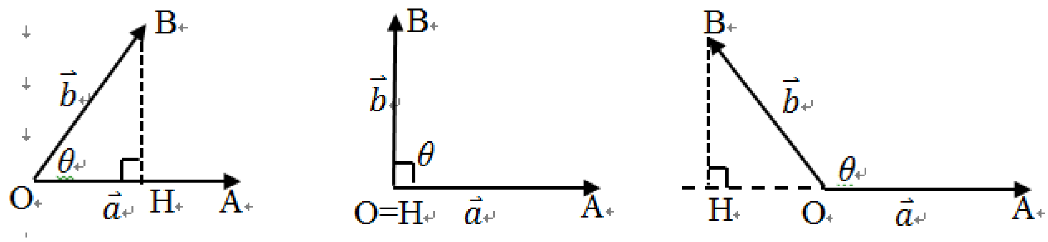
(1) $\vec{b}$在$\vec{a}$上的投影長$=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

(2) $\vec{b}$在$\vec{a}$上的正射影$=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$

定理證明或說明

➢ 投影長與正射影

如圖



(1)投影長即$\overline{\mathrm{OH}}=|\vec{b}||cos\theta|=|\vec{b}|\left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}\right|=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

(2)正射影即$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$：$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\overline{\mathrm{OH}}$

已知$\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$為沿$\vec{a}$方向的單位向量（長度為 1 的向量）

$0°<\theta<90°$：$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$方向與$\vec{a}$同向 $\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$(量)$\cdot\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$(向)

$\theta=90°$：$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{0}$

$90°<\theta<180°$：$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$方向與$\vec{a}$反向 $\Rightarrow\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$(量)$\cdot(-\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|})$(向)

$\because 0°<\theta<90°$：$\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}=\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

$\theta = 90°$：$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = 0$

$90° < \theta < 180°$：$\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|} = -\frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|}$

∴若取$\overline{OH} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|}\cdot\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，則可滿足上述各種情形

關鍵字

正射影

例題 1

設$\vec{a}(2,6),\vec{b}(6,1)$，則$\vec{a}$在$\vec{b}$上之正射影為____________

Ans：$(\frac{108}{37},\frac{18}{37})$

解：所求即$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{18}{\sqrt{37}}\cdot\frac{(6,1)}{\sqrt{37}} = (\frac{108}{37},\frac{18}{37})$

例題 2

設$\vec{a}(2,6),\vec{b}(3,4)$，則$\vec{a}$在$\vec{b}$上之投影長為____________

Ans：6

解：所求即$= \left|\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\right| = \frac{30}{5} = 6$

例題 3

將向量$\vec{a} = (3,7)$分解為與$\vec{b} = (2,1)$平行與垂直的兩個分量

Ans：平行的分量$(\frac{26}{5},\frac{13}{5})$，垂直的分量$(\frac{-11}{5},\frac{22}{5})$

解：

設與$\vec{b}$平行的分量為$\vec{c}$，與$\vec{b}$垂直的分量為$\vec{d}$，且$\vec{c}+\vec{d} = \vec{a}$

則$\vec{c}$即$\vec{a}$在$\vec{b}$上的正射影$= \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|}\cdot\frac{\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{6+7}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(2,1)}{\sqrt{5}} = (\frac{26}{5},\frac{13}{5})$

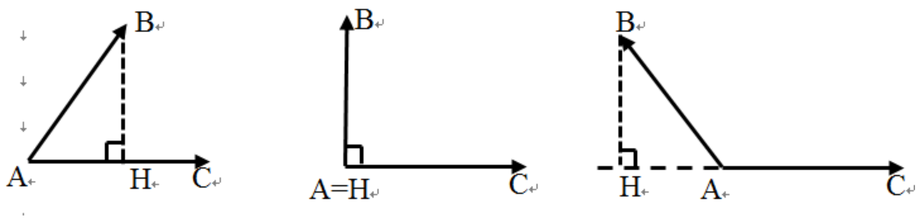
$\vec{d} = \vec{a} - \vec{c} = (\frac{-11}{5},\frac{22}{5})$

例題 4

$A(1,1)$，$B(2,3)$，$C(3,-1)$，則 B 點在直線$\overleftrightarrow{AC}$上的投影點為____________

Ans：$(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

解：



如圖，設$\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的正射影為$\overrightarrow{AH}$，則 H 即為 B 點在直線$\overleftrightarrow{AC}$上的投影點

$\overrightarrow{AB}=(1,2),\overrightarrow{AC}=(2,-2)$

$\overrightarrow{AH}=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|}=\frac{2-4}{\sqrt{8}}\cdot\frac{(2,-2)}{\sqrt{8}}=(\frac{-1}{2},\frac{1}{2})$ $\therefore H(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$

例題 5

承上題，△ABC 中，$\overleftrightarrow{AC}$邊上的高為_______

Ans：$\frac{9\sqrt{2}}{4}$

解：

已知 B 點在直線$\overleftrightarrow{AC}$上的投影點 $H(\frac{1}{2},\frac{3}{2})$，則

$\overleftrightarrow{AC}$邊上的高即 $\overline{BH}=\sqrt{(2-\frac{1}{2})^2+(3-\frac{3}{2})^2}=\frac{9\sqrt{2}}{4}$

例題 6

$\vec{u}=(6,-2)$在 L：$2x+y-1=0$ 上之正射影為____________

Ans：$(2,-4)$

解：取直線 L：$2x+y-1=0$ 的方向向量為 $\vec{v}=(1,-2)$

則正射影為 $\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{v}|}\cdot\frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}=\frac{6+4}{\sqrt{5}}\cdot\frac{(1,-2)}{\sqrt{5}}=(2,-4)$

溫故知新

習題 1

平面上三點 $A\,(1\,,2), B\,(4\,,6), C(3\,,3)$，則 $\overrightarrow{AB}$在$\overrightarrow{AC}$上的方向上的正射影為____________

習題 2

平面上三點 $A\,(1\,,2), B\,(4\,,6), C(3\,,3)$，則 B 點在直線$\overleftrightarrow{AC}$上的投影點之坐標為____________

習題 3

設 $A\,(-2,0), B\,(1,2)$，則向量$\overrightarrow{AB}$在直線 L：$4x+y-9=0$ 上的正射影為____________

習題 4

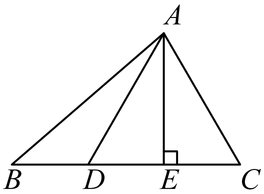
設$\vec{a}=(2,-1),\ \vec{b}=(4,3)$，求$\vec{a}$在$\vec{b}$上的分量長（投影長）為____________

習題 5

若$|\vec{a}|=2, |\vec{b}|=3, |\vec{c}|=4$，且$\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$，則$\vec{b}$在$\vec{c}$方向上的投影長 $=$_______

習題 6

如下圖$\triangle ABC$ 中，$\overline{AE}\perp\overline{BC}$，且 E 為 $\overline{DC}$ 之中點，則下列敘述何者正確？

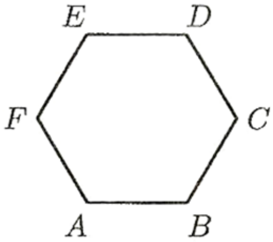


(1)$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{EB}$　(2)$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{DE}<0$　(3)$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$

(4)$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}>\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AE}$　(5)$\overrightarrow{CA}$在$\overrightarrow{DB}$方向的正射影為$\overrightarrow{CE}$

習題 7 【學測 87】

如右圖(一)，ABCDEF 為一正六邊形。那麼下列向量內積中，何者最大？



圖(一)

(1) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}$　(2) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$　(3) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}$

(4) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AE}$　(5) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AF}$

解答與解析

習題 1：(4,2)

習題 2：(5,4)

習題 3：$(-\frac{5}{17},\frac{20}{17})$

習題 4：1

習題 5：$\frac{21}{8}$

習題 6：(1)(2)(3)(5)

習題 7：(2)

解：各選項均有$\overrightarrow{AB}$，因此僅需考慮各向量在$\overrightarrow{AB}$上的分量大小（即投影量），故選(2)