

數學 2

進階
講義

數據標準化

景美女中 · 莊嘉銘 老師



信望愛文教基金會



7-1-5 數據標準化

定理證明或說明

1. 數據標準化

設數據 x_1, x_2, \dots, x_n 的平均數為 μ ，標準差為 σ ，其中 $\sigma > 0$ ，

令 $z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，則數據 z_1, z_2, \dots, z_n 的平均數為 0，

標準差為 1，此動作稱為數據標準化

2. 一筆數據 X 以其平均數 μ_x 為中心，標準差 σ_x 為單位，可以將它標準化為 $Z = \frac{X - \mu_x}{\sigma_x}$ ，

即 $z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，由 x_i 的標準化數據 z_i 可以得知 x_i 與平均數 μ_x 的差是標準差 σ_x 的幾倍，即若是以標準差 σ_x 為單位，由 z_i 可知 x_i 在平均數 μ_x 以上或以下幾個單位的位置。故可藉此比較在單位不同或是不同時期，兩數據在自身數據中所在的位置。

關鍵字

標準化，標準差

例題 1

小明期中考的數學成績為 73 分，班上的平均是 68 分，標準差 5 分；而小明期末考的數學成績為 65 分，班平均 60 分，標準差 4 分：

- (1) 將小明兩次考試的數學成績標準化
- (2) 就全班而言，小明到底是進步還是退步呢？

Ans：

- (1) 將原始成績標準化如下：

期中考 $z_1 = \frac{73 - 68}{5} = 1$ ，表示該成績較全班的平均高出 1 個標準差

期末考 $z_2 = \frac{65 - 60}{4} = 1.25$ ，表示該成績較全班的平均高出1.25個標準差

(2) 因此就全班而言，小明的成績是進步了

例題 2

下表是10名學生的身高及體重：

學生	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
身高（公分）	171	164	164	165	171	167	169	162	166	171
體重（公斤）	66	65	62	66	66	63	55	68	63	76

- 求身高及體重的算術平均數和標準差
- 計算A生身高和體重的z分數
- 就全體而言，A生的身高和體重何者較突出？

Ans：

(1) 身高(X)的算術平均數為

$$\mu_x = \frac{1}{10}(171 + 164 + 164 + 165 + 171 + 167 + 169 + 162 + 166 + 171) = 167$$

體重(Y)的算術平均數為

$$\mu_y = \frac{1}{10}(66 + 65 + 62 + 66 + 66 + 63 + 55 + 68 + 63 + 76) = 65$$

計算離均差

X	$x - \mu_x$	$(x - \mu_x)^2$	Y	$y - \mu_y$	$(y - \mu_y)^2$
171	4	16	66	1	1
164	-3	9	65	0	0
164	-3	9	62	-3	9
165	-2	4	66	1	1
171	4	16	66	1	1
167	0	0	63	-2	4
169	2	4	55	-10	100
162	-5	25	68	3	9
166	-1	1	63	-2	4
171	4	16	76	11	121
總和	0	100		0	250

$$\text{身高}(X)\text{的標準差 } \sigma_x = \sqrt{\frac{100}{10}} = \sqrt{10} \approx 3.16$$

$$\text{體重}(Y)\text{的標準差 } \sigma_y = \sqrt{\frac{250}{10}} = 5$$

$$(2) A\text{生身高的}z\text{分數 } z_x = \frac{171-167}{3.16} \approx 1.27$$

$$A\text{生體重的}z\text{分數 } z_y = \frac{66-65}{5} = 0.2$$

(3) 因為 $z_x > z_y > 0$ ，相較於全班， A 學生的身高較為突出。

例題 3

設某班級 40 名學生依座號序，體重為 $X = x_1, x_2, \dots, x_{40}$ (單位：公斤)，平均數為 58 公斤，標準差為 4 公斤。若已知在 X 的標準化數據中，3 號同學的數值為 2.25，求 3 號同學的體重？

Ans :

$$\text{由 } z = \frac{x-58}{4}, \text{ 得 } 2.25 = \frac{x-58}{4}, \text{ 可得 } x = 4 \times 2.25 + 58 = 9 + 58 = 67 \text{ 公斤}$$



溫故知新

習題 1

某次考試班上數學的平均 65 分，標準差 8 分，英文的平均 70 分，標準差 10 分；張三數學成績為 70 分，英文成績為 75 分，他哪科考得較好？

習題 2

某班學生的體重平均為 65 公斤，標準差 6 公斤，身高的平均為 172 公分，標準差 9 公分，若其中 A 生的體重為 70 公斤，身高為 180 公分，

(1) 計算 A 生體重與身高的 z 分數 (2) 相對於全班， A 生的哪一項較為突出？



習題 1：數學

【詳解】數學標準化成績是 $\frac{70-65}{8} = 0.625$ ，

英文標準化成績是 $\frac{75-70}{10} = 0.5$

故數學科成績較好

習題 2：(1) 體重 $z_1 = \frac{5}{6}$ ，身高 $z_2 = \frac{8}{9}$ (2) 身高

【詳解】(1) 體重 $z_1 = \frac{70-65}{6} = \frac{5}{6}$ ，身高 $z_2 = \frac{180-172}{9} = \frac{8}{9}$

(2) 因為 $\frac{5}{6} < \frac{8}{9}$ ，故相對於全班，A 生的身高較為突出