數學 1 進階講義

虛根成對定理

景美女中・李冠達老師

信望愛文教基金會

2-3-7　虛根成對定理

定理敘述

1. n 次方程式有 n 個複數根（包含重根）。

2. 虛根成對定理：設 $f(x)=0$ 為實係數 n 次多項式方程式，若 $z=a+bi$ 為方程式之一根，則 $\overline{z}=a-bi$ 也為方程式之另一根。

定理證明或說明

設 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots a_1x+a_0$ 為一實係數 n 次多項式，若複數 $z=a+bi$ 為方程式 $f(x)=0$ 的一根，即 $f(z)=0$，欲求證 $f(\overline{z})=0$。

證明：$f(\overline{z})=a_n(\overline{z})^n+a_{n-1}(\overline{z})^{n-1}+\cdots+a_1(\overline{z})+a_0=\overline{a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0}=\overline{f(z)}=\overline{0}=0$

即 $\overline{z}=a-bi$ 為方程式 $f(x)=0$ 的另一根。

注意事項

1. 代數基本定理：$n\in N$，則 n 次多項式方程式至少有一個複數根。

   或任何一個 n 次多項式方程式恰有 n 個複數根（包含實根及虛根）。

2. 虛根成對定理必須注意實係數多項方程式中，始成立。

3. 奇數次實係數多項方程式至少有一個實數根。

4、實係數 n 次多項式必可寫成實係數一次因式與二次因式的連乘積。

關鍵字

虛根成對、實係數多項方程式

例題 1

實係數方程式 $f(x)=x^4-4x^3+3x^2+ax+b$ 有一根 $1-i$，試求 a 、 b 之值。

Ans：

由 $x=1-i$ 移項並平方後，可推得 $x^2-2x+2=0$，

接著使用長除法及除法原理得

$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2-2x-3)+(a-2)x+(b+6)$

因為 $1-i$ 為 $f(x)$ 之一根，即 $f(1-i)=0$

最後得 $\begin{cases} a=2 \\ b=-6 \end{cases}$

例題 2

$x^4+2x^3-14x^2+2x+k=0$ 有一虛根 i，試求實數 k 之值？及此方程式之解？

Ans：

由 $x=i$ 平方後，可推得 $x^2+1=0$，

接著使用長除法及除法原理得

原式 $=(x^2+1)(x^2+2x-15)+(k+15)$

因為 i 為上式之一根，因此可得 $k=-15$，

原式 $=(x^2+1)(x^2+2x-15)=(x^2+1)(x-3)(x+5)=0$

可得其所有解為 i 、 $-i$ 、 3 、 -5

例題 3

若 $1+i$ 為 $x^2+ax-(1+3i)=0$，之一根，試求 a 之值。

Ans：

請注意該方程式並非實係數方程式，

因此虛根成對定理不成立。

以 $x=1+i$ 代入 $x^2+ax-(1+3i)=0$，

$\Rightarrow (1+i)^2+a(1+i)-(1+3i)=0$，

化簡後得 $a=1$。

例題 4

設 $f(x)$ 為實係數三次多項式， $f(2+3i)=f(-1)=0$ 且 $f(1)=40$ ，試求 $f(x)$ 。

Ans：

由 $f(x)$ 為實係數三次多項式，得知虛根成對，

因此三根為 $2\pm 3i$ 、 -1 ，

可令 $f(x)=a(x^2-4x+13)(x+1)$

以 $x=1$ 代入上式，得 $a\times 10\times 2=40$ ，

可得知 $a=2$ ，

$f(x)=2(x^2-4x+13)(x+1)=2x^3-6x^2+18x+26$

例題 5

設三次實係數方程式 $2x^3-5x^2+mx+n=0$ 有兩相異複數根為 $a+i$ 、 $2+bi$ ，

其中 a,b 是不為 0 的實數， m,n 為整數，試求此方程式的實根。

Ans：

由 $f(x)$ 為實係數三次多項式，得知虛根成對，

因此兩根為 $2+i$ 、 $2-i$ ，

假設實根為 α ，利用根與係數的關係，

$\alpha+(2+i)+(2-i)=\dfrac{5}{2}$ ，得 $\alpha=-\dfrac{3}{2}$

例題 6

設 a 為實數，且方程式 $x^2+(1+i)x+2a-3i=0$ 有實根，試求 a 之值。

Ans：

令實根為 k ，代入後化簡可得 $(k^2+k+2a)+i(k-3)=0$

因此， $\begin{cases} k^2+k+2a=0 \\ k-3=0 \end{cases}$ ，得到 $k=3$ 代入另一式，可得 $a=-6$

例題 7

設 k 為實數，若 $x^3+2x^2+kx+6=0$ 有純虛根，試求 k 的值。

Ans：

令純虛根為 $x=bi$，代入 $x^3+2x^2+kx+6=0$，

得 $(bi)^3+2(bi)^2+k(bi)+6=0$

化簡後 $(-2b^2+6)+ib(k-b^2)=0$

因此，$\begin{cases}-2b^2+6=0\\ b(k-b^2)=0\end{cases}$，又 $b^2=3$ 且 $b\neq 0$，推論出 $k=b^2=3$。

溫故知新

習題 1

方程式 $x^4-x^3+x^2+9x-10=0$ 有一根為 $1+2i$，試求此方程式的其他根。

習題 2

設三次方程式 $x^3+x^2-4x+6=0$ 有兩複數根 $a+i$、1、$1+bi$，其中 a、b 是不為 0 的實數，試求此方程式的實根。

習題 3

已知 $f(x)$ 為一實係數四次多項式，且 $f(2+3i)=f(1)=f(-2)=0$，又 x^4 項的係數為 1，試求 $f(x)$ 除以 x 的餘式為何？

習題 4

設 m、n、a、b 皆為實數，方程式 $2x^3+5x^2+mx+n=0$ 有兩複數根為 $a+5i$ 與 $bi-3$，試求：

(1) 數對 $(a,b)=$？

(2) 數對 $(m,n)=$？

習題 5

設 a 為實數，若 $3x^3+x^2+ax+3=0$ 有純虛根，試求 a 之值。

習題 6

設 $f(x)$ 為一實係數多項式，且已知 $f(2+7i)=3i-4$，試求 $f(2-7i)$ 之值。

解答與解析

習題 1：$1-2i$ 、1、-2 共 3 根

習題 2：-3

習題 3：-26

習題 4：(1) $(a,b)=(-3,-5)$　(2) $(m,n)=(28,-34)$

習題 5：9

習題 6：$f(2-7i)=-4-3i$