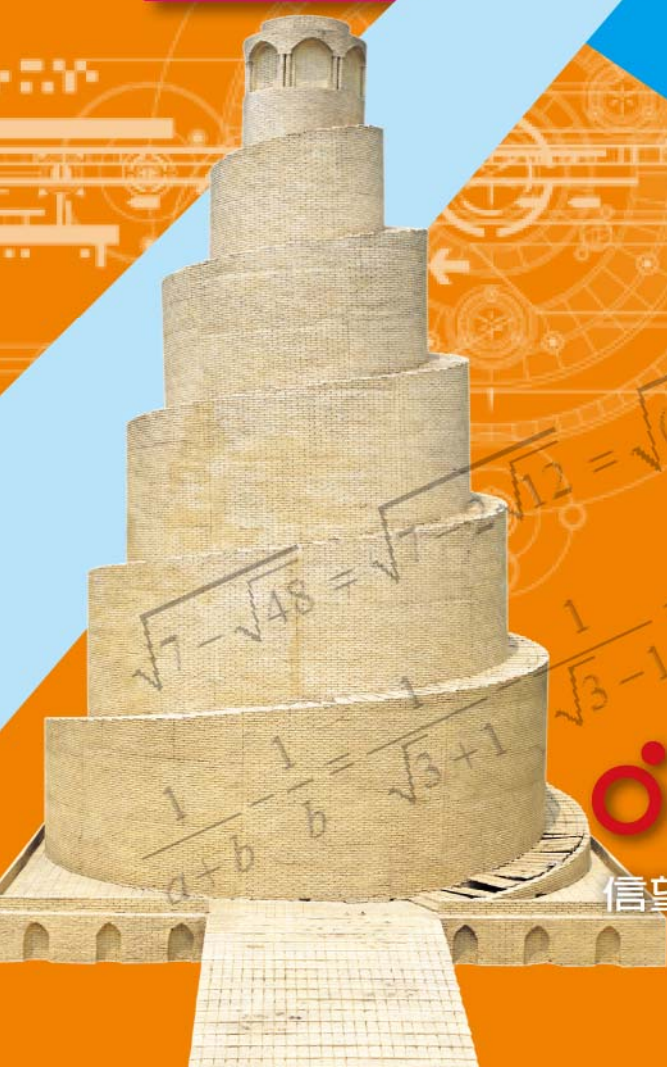


數學 3

進階
講義

兩直線的夾角與角平分線

成功高中 · 陳冠宏 老師



信望愛文教基金會

10-3-3 兩直線的夾角與角平分線

定理敘述

1. 兩直線的夾角

若 $\vec{n}_1, \vec{n}_2$ 分別為 L_1, L_2 之法向量， $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ 分別為 L_1, L_2 之方向向量， θ 為兩直線之夾角則

$$\cos \theta = \pm \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} = \pm \frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|}$$

2. 兩直線的角平分線

$$\begin{cases} L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases} \text{ 為兩相交直線，}$$

則此兩直線的兩條角平分線為 $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

定理證明或說明

1. 兩直線的夾角

兩直線的夾角，共有兩個，其一為兩直線方向向量或法向量的夾角，另一夾角為其補角。

2. 兩直線的角平分線

$$\begin{cases} L_1 : a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ L_2 : a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

$\because$ 角平分線上任一點到兩邊等距離，設 $P(x, y)$ 為角平分線上一點，

$$\text{則 } d(P, L_1) = d(P, L_2) \Rightarrow \frac{|a_1x + b_1y + c_1|}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{|a_2x + b_2y + c_2|}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}} \Rightarrow \frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \pm \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$

關鍵字

兩直線的夾角、角平分線

例題 1

已知 $\begin{cases} L_1 : x - \sqrt{3}y + 5 = 0 \\ L_2 : \sqrt{3}x - y + 7 = 0 \end{cases}$ ，試兩直線的夾角

Ans : 30° 或 150°

解：

兩直線的法向量分別為 $\vec{n}_1 = (1, -\sqrt{3})$, $\vec{n}_2 = (\sqrt{3}, -1)$

$$\cos\theta = \pm \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|} = \pm \frac{2\sqrt{3}}{2 \times 2} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \theta = 30^\circ$ 或 150°

例題 2

試求通過(1,2)且與 $x - \sqrt{3}y - 2 = 0$ 夾 60° 角的直線方程式

Ans : $x=1$ 或 $x + \sqrt{3}y = 1 + 2\sqrt{3}$

解：

設 L 的法向量為 (a, b) ，若 $a=0$ ，則可取法向量為 $(0, 1)$

$$\frac{(0, 1) \cdot (1, -\sqrt{3})}{1 \times 2} = \frac{-\sqrt{3}}{2} \text{ 夾 } 150^\circ \text{ 或 } 30^\circ \text{ (不合)}$$

故 $a \neq 0$ ，取法向量為 $(1, k = \frac{b}{a})$

$$\text{則 } \cos 60^\circ = \pm \frac{1 - \sqrt{3}k}{\sqrt{1^2 + k^2} \times 2} = \frac{1}{2} \Rightarrow (1 - \sqrt{3}k)^2 = k^2 + 1$$

$$\Rightarrow 2k^2 - 2\sqrt{3}k = 0 \Rightarrow k(k - \sqrt{3}) = 0 \Rightarrow k = 0, \sqrt{3}$$

$\therefore$ 法向量為 $(1, 0)$ 或 $(1, \sqrt{3})$ ，又直線過 $(1, 2)$

$\therefore L : x=1$ 或 $x + \sqrt{3}y = 1 + 2\sqrt{3}$

例題 3

已知 $\begin{cases} L_1 : x + y + 5 = 0 \\ L_2 : 7x - y + 7 = 0 \end{cases}$ ，試求兩直線的角平分線

Ans : $3x + y + 8 = 0$, $x - 3y - 9 = 0$

解：

$$\text{設角平分線上一點 } P(x, y), \text{ 則 } d(P, L_1) = d(P, L_2) \Rightarrow \frac{|x + y + 5|}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{|7x - y + 7|}{\sqrt{7^2 + (-1)^2}}$$

$$\Rightarrow 5x + 5y + 25 = \pm(7x - y + 7)$$

$$\therefore \text{兩條角平分線為} \begin{cases} L_3 : x - 3y - 9 = 0 \\ L_4 : 3x + y + 8 = 0 \end{cases}$$

例題 4

已知 $\begin{cases} L_1 : 3x + 4y + 5 = 0 \\ L_2 : 4x + 3y + 7 = 0 \end{cases}$ ，試求

(1) 兩直線之銳角平分線：_____

(2) 兩直線之鈍角平分線：_____

Ans : (1) $7x + 7y + 12 = 0$; (2) $x - y + 2 = 0$

解：

設角平分線上一點 $P(x, y)$ ，則 $d(P, L_1) = d(P, L_2) \Rightarrow \frac{|3x + 4y + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x + 3y + 7|}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$

$$\Rightarrow 3x + 4y + 5 = \pm(4x + 3y + 7)$$

$$\therefore \text{兩條角平分線為} \begin{cases} L_3 : 7x + 7y + 12 = 0 \\ L_4 : x - y + 2 = 0 \end{cases}$$

取 $A(5, -5)$ 為 L_1 上一點

$$\text{則 } d(A, L_3) = \frac{|35 - 5 + 12|}{\sqrt{7^2 + 7^2}} = \frac{6}{\sqrt{2}} < d(A, L_4) = \frac{|5 + 35 + 2|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{42}{\sqrt{2}}$$

故銳角平分線為 L_3 ，鈍角平分線為 L_4 （ $\because$ 角度大，距離遠）

例題 5

給三直線 $L_1 : 3x + 4y - 5 = 0$ ， $L_2 : 4x - 3y - 65 = 0$ ， $L_3 : 7x - 24y + 55 = 0$ ， L_1 與 L_2 ， L_2 與 L_3 ， L_3 與 L_1 之交點依次為 A 、 B 、 C ，則 $\triangle ABC$ 中， $\angle BAC$ 的內角平分線方程式為_____

Ans : $7x + y - 70 = 0$

解：

設 $\angle BAC$ 的內角平分線上一點 $P(x, y)$ ，

$$\text{則 } d(P, L_1) = d(P, L_2) \Rightarrow \frac{|3x + 4y - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|4x - 3y - 65|}{\sqrt{4^2 + (-3)^2}}$$

$$\Rightarrow 3x + 4y - 5 = \pm(4x - 3y - 65)$$

得兩條角平分線為 $\begin{cases} L: 7x + y - 70 = 0 \\ L': x - 7y - 60 = 0 \end{cases}$

另外，可求得 $B(23, 9)$ 、 $C(-1, 2)$ ，

$\therefore B、C$ 兩點在 $\angle BAC$ 的內角平分線之兩側，故所求為 $7x + y - 70 = 0$

例題 6

承上題，試求 $\triangle ABC$ 的內心坐標

Ans : (10,0)

解：

已知 $\angle BAC$ 的內角平分線為 $7x + y - 70 = 0$

同理可得 $\angle ABC$ 之內角分角線為 $9x - 13y - 90 = 0$

兩直線的交點(10,0)即為 $\triangle ABC$ 內心



溫故知新

習題 1

設 $L_1: 2x - y + 2011 = 0$ 與 $L_2: ax + y + 2012 = 0$ 兩直線的夾角之一為 135° ，求 $a =$ _____

習題 2

求過(0, -1)，且與 $3x + 4y - 12 = 0$ 交角成 45° 的直線方程式為 _____

習題 3

兩直線 $L_1: x - 3y - 7 = 0$ ， $L_2: 13x + 9y + 5 = 0$ ，則

(1)若 L_1 與 L_2 所夾的銳角度量為 θ ，則 $\cos \theta =$ _____

(2) L_1 與 L_2 的角平分線方程式為 _____

習題 4

設 θ 為二直線 $7x - 4y + 3 = 0$ ， $x - 8y + 9 = 0$ 所夾之銳角，則 θ 之角平分線方程式為 _____

習題 5

直線 $3x - 4y - 5 = 0$ 和 y 軸夾角的正弦值為_____

習題 6

三直線 $x + 2y - 12 = 0$, $x - 2y = 0$, $2x - y + 4 = 0$ 圍成 $\triangle ABC$, 此三角形內心為_____

習題 7

【學測 97】

坐標平面上有一質點沿方向 $\vec{u}(1,2)$ 前進，現欲在此平面上置一直線 L ，使得此質點碰到 L 時依光學原理（入射角等於反射角）反射，之後沿方向 $\vec{v}(-2,1)$ 前進，則直線 L 的方向向量應為 $\vec{w}=(1, \text{_____})$



習題 1 : $-\frac{1}{3}$ 或 3

習題 2 : $x - 7y - 7 = 0$ 或 $7x + y + 1 = 0$

習題 3 : (1) $\frac{7}{25}$; (2) $x + 3y + 5 = 0$ 或 $3x - y - 5 = 0$

習題 4 : $2x - 3y + 3 = 0$

習題 5 : $\frac{4}{5}$

習題 6 : $(\frac{5}{3}, 3)$

習題 7 : $(1, -3)$

解： L 的方向向量 $\vec{v}_L$ 為 $\vec{u}$, $\vec{v}$ 之角平分向量(如圖)

$$\because |\vec{u}| = |\vec{v}| \therefore \vec{u} + \vec{v} // \vec{v}_L \Rightarrow (-1, 3) // \vec{v}_L$$

$\therefore$ 取 $(1, -3)$

