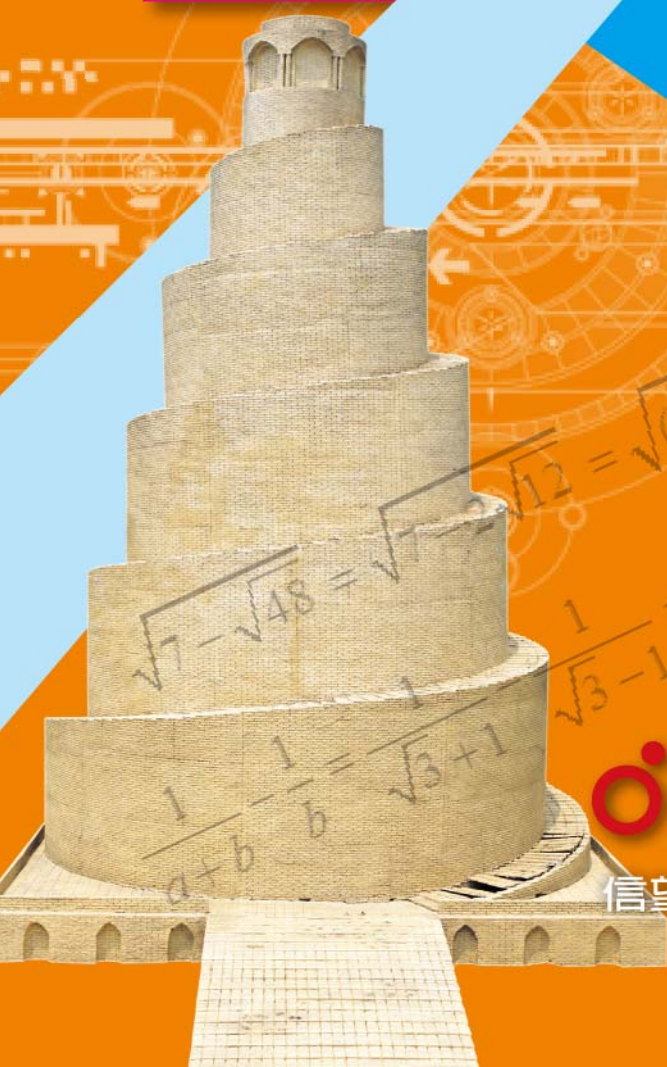


數學 3

進階
講義

面積公式

成功高中 · 陳冠宏 老師



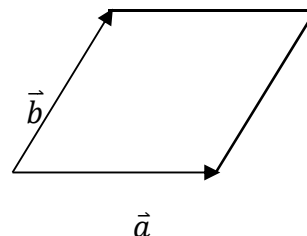
信望愛文教基金會

10-4-2 面積公式

定理敘述

➤ 二階行列式與面積

已知 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ 為不平行兩向量，則 $\vec{a}, \vec{b}$ 所圍成之平行四邊形面積 = $\left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|$



定理證明或說明

➤ 二階行列式與面積

已知 $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$

所圍平行四邊形的面積為 $\sqrt{|\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2}$

$$= \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2)^2}$$

$$= \sqrt{(a_1^2 b_1^2 + a_2^2 b_1^2 + a_1^2 b_2^2 + a_2^2 b_2^2) - (a_1^2 b_1^2 + 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_2^2)}$$

$$= \sqrt{(a_1^2 b_2^2 - 2a_1 b_1 a_2 b_2 + a_2^2 b_1^2)}$$

$$= \sqrt{(a_1 b_2 - a_2 b_1)^2} = |a_1 b_2 - a_2 b_1| = \left| \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right|$$

關鍵字

面積公式

例題 1

已知 $\overrightarrow{AB} = (3, -5), \overrightarrow{AC} = (2, 3)$ ，試求 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 所圍的平行四邊形面積為_____

Ans : 19

解： $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = |9+10| = 19$

例題 2

已知 $A(1,3)$, $B(5,-2)$, $C(4,8)$ 為坐標平面上三點，試求 $\triangle ABC$ 的面積

Ans : $\frac{35}{2}$

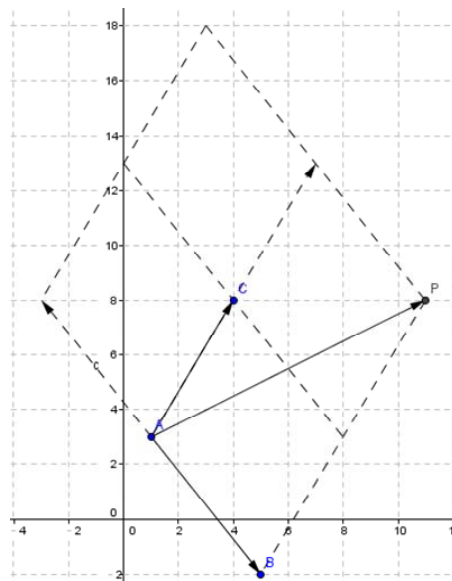
解： $\overrightarrow{AB} = (4, -5)$, $\overrightarrow{AC} = (3, 5)$ $\triangle ABC = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \frac{35}{2}$

例題 3

已知 $A(1,3)$, $B(5,-2)$, $C(4,8)$ 為坐標平面上三點，設 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，且 $-1 \leq x \leq 1$, $0 \leq y \leq 2$ ，求向量 $\overrightarrow{AP}$ 之終點 P 所形成區域的面積

Ans : 140

解：如圖， P 點所形成的區域面積為 4 倍的 $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 所形成之平行四邊形面積，即 8 倍 $\triangle ABC$ 面積 = 140



例題 4

已知 $A(1,3)$, $B(2,6)$, $C(-1,k)$ ，若 A, B, C 三點共線，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : -3

解：

$\overrightarrow{AB} = (1,3)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, k-3)$

$\because A, B, C$ 三點共線 $\therefore \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ 所圍的平行四邊形面積為 0

即 $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & k-3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow k-3+6=0 \Rightarrow k=-3$

例題 5

已知平面上兩向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所圍的平行四邊形面積為 5，試求 $\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{a} + \vec{b}$ 所圍的平行四邊形面積為_____

Ans : 25

解：

設 $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ ，則 $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 5$

又 $\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{a} + \vec{b}$ 所圍的面積為 $\begin{vmatrix} a_1 + 2b_1 & a_2 + 2b_2 \\ 3a_1 + b_1 & 3a_2 + b_2 \end{vmatrix} = 5 \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 25$

例題 6

已知平面上兩向量 $5\vec{a} - 7\vec{b}$, $4\vec{a} + \vec{b}$ 所圍的平行四邊形面積為 66，試求 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所圍的平行四邊形面積為_____

Ans : 2

解：

設 $\vec{a}(a_1, a_2)$, $\vec{b}(b_1, b_2)$ ，則 $5\vec{a} - 7\vec{b}$, $4\vec{a} + \vec{b}$ 所圍的面積為

$$\begin{vmatrix} 5a_1 - 7b_1 & 5a_2 - 7b_2 \\ 4a_1 + b_1 & 4a_2 + b_2 \end{vmatrix} = 33 \times \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = 2$$



溫故知新

習題 1

已知 $\overrightarrow{AB} = (3, -5)$, $\overrightarrow{AC} = (-2, 1)$ ，試求 $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ 所圍的平行四邊形面積為_____

習題 2

已知 A(1,3), B(3,-1), C(2,4)為坐標平面上三點，試求 $\triangle ABC$ 的面積

習題 3

已知 $A(1,3)$, $B(3,-1)$, $C(2,4)$ 為坐標平面上三點，設 $\overrightarrow{AP} = x\overrightarrow{AB} + y\overrightarrow{AC}$ ，且 $1 \leq x \leq 2$, $-2 \leq y \leq 1$ ，求向量 $\overrightarrow{AP}$ 之終點 P 所形成區域的面積

習題 4

已知 $A(1,3)$, $B(3,-8)$, $C(-1,3k+2)$ ，若 A, B, C 三點共線，則 $k = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 5

已知平面上兩向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所圍的平行四邊形面積為 3，試求 $\vec{a} + 2\vec{b}$, $3\vec{a} - \vec{b}$ 所圍的平行四邊形面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$

習題 6

已知平面上兩向量 $5\vec{a} - 7\vec{b}$, $4\vec{a} + 3\vec{b}$ 所圍的平行四邊形面積為 86，試求 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 所圍的平行四邊形面積為 $\underline{\hspace{2cm}}$

習題 7

【學測 99】

坐標平面上有一個平行四邊形 $ABCD$ ，其中點 A 的坐標為 $(2,1)$ ，點 B 的坐標為 $(8,2)$ ，點 C 在第一象限且知其 x 坐標為 12，若平行四邊形 $ABCD$ 的面積等於 38 平方單位，則點 D 的坐標為 $\underline{\hspace{2cm}}$

習題 8

【指考乙 100】

坐標平面上有一面積為 40 的凸四邊形，其四個頂點的坐標按逆時針方向依序為 $(0,0)$, $(4,2)$, $(x,2x)$ 及 $(2,6)$ ，則 $x = \underline{\hspace{2cm}}$



習題 1 : 7

習題 2 : 3

習題 3 : 18

習題 4 : 4

習題 5 : 21

習題 6 : 2

習題 7 : (6,8)

解：設 $C(12,k)$ ， $D(x,y)$ ，則 $\overrightarrow{AB} = (6,1)$ ， $\overrightarrow{AC} = (10, k-1)$

$$\text{平行四邊形面積} = \left| \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & k-1 \end{vmatrix} \right| = 38 \Rightarrow |6k-16| = 38 \Rightarrow k=9 \text{ 或 } k=-\frac{11}{3} \text{ (不合)},$$

$$\overline{AC} \text{ 中點即為 } \overline{BD} \text{ 中點，故 } \left(\frac{14}{2}, \frac{10}{2}\right) = \left(\frac{x+8}{2}, \frac{y+2}{2}\right) \Rightarrow (x, y) = (6, 8)$$

習題 8 : 10

解：設 $O(0,0)$ ， $A(4,2)$ ， $B(x,2x)$ 、 $C(2,6)$

由題意，可知 $x > 0$ 。

$$\text{凸四邊形面積} = a\Delta OAB + a\Delta OBC = \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ x & 2x \end{vmatrix} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{vmatrix} x & 2x \\ 2 & 6 \end{vmatrix} \right| = 40$$

$$\Rightarrow |3x| + |x| = 40 \Rightarrow x = 10$$