

數學 基礎講義

平面上的直線

信望愛文教基金會 · 數學種子教師團隊



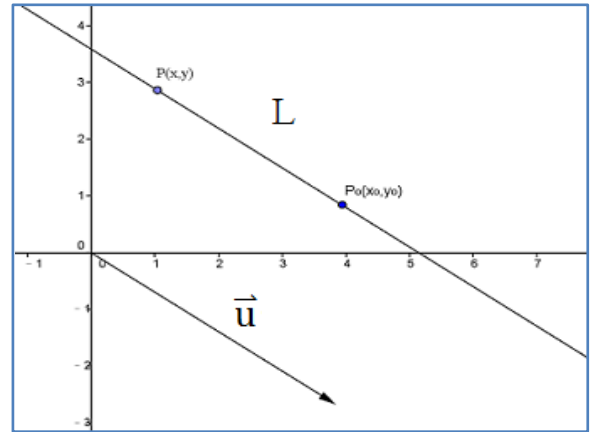
信望愛文教基金會

平面上的直線

直線的參數式

設 $P_0(x_0, y_0)$ 為坐標平面上一定點， $\vec{u}(a, b)$ 為一非零向量，

則過 P 點且與 $\vec{u}$ 平行之直線 L 的參數式為

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$


坐標平面上過已知兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 之直線 L 的參數式為：

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1) \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

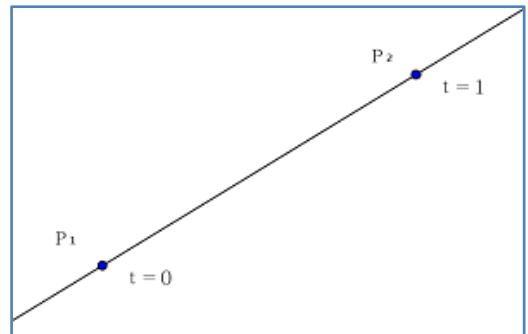
同時我們也可以藉由限制 t 的範圍來得到部分的圖形

當 $t=0$ 時表示 P_1 一點， $t=1$ 表 P_2 一點

當 $0 \leq t \leq 1$ 時，表 $\overline{P_1P_2}$

當 $t \leq 1$ 時，表射線 $\overrightarrow{P_2P_1}$

當 $t \geq 0$ 時，表射線 $\overrightarrow{P_1P_2}$



兩直線的夾角

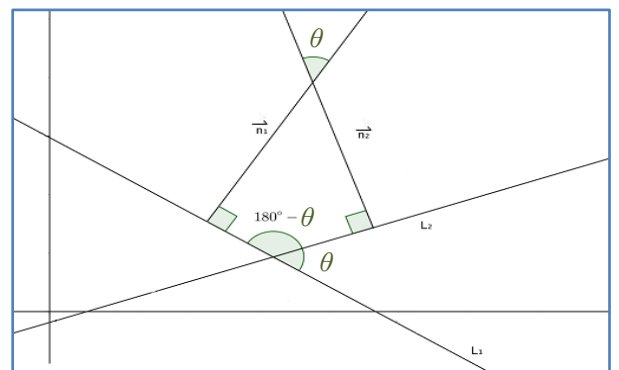
利用內積公式求兩直線夾角：假設坐標平面上兩直線。

$L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 與 $L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ ，夾角為 θ ，

從右圖可知 L_1 與 L_2 的夾角 θ 等於其法向量的夾角。

利用法向量作內積即可求出其夾角的

$$\cos \theta = \pm \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2} \sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$$



利用斜率來求兩直線夾角

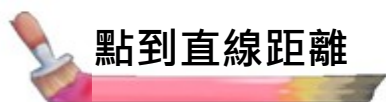
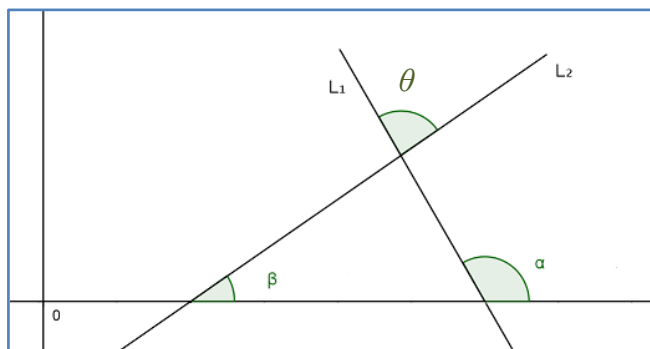
假設座標平面上兩直線 L_1 ， L_2 之斜率分別為 m_1 ， m_2 ，在上一個章節我們學到坐標平面上直線的斜率相當於其與 X 軸夾角的tangent函數值。

從圖中我們可以利用三角形的外角定理得到 $\alpha = \beta + \theta$

$\Rightarrow$ 兩直線的夾角 $\theta = \alpha - \beta$ ，其中 $\tan \alpha = m_1$ ， $\tan \beta = m_2$

$\Rightarrow \tan \theta = \tan(\alpha - \beta) = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$ 而與之互補的另一夾角 θ_2

$$\tan \theta_2 = \tan(180^\circ - \theta) = -\frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$



點到直線距離

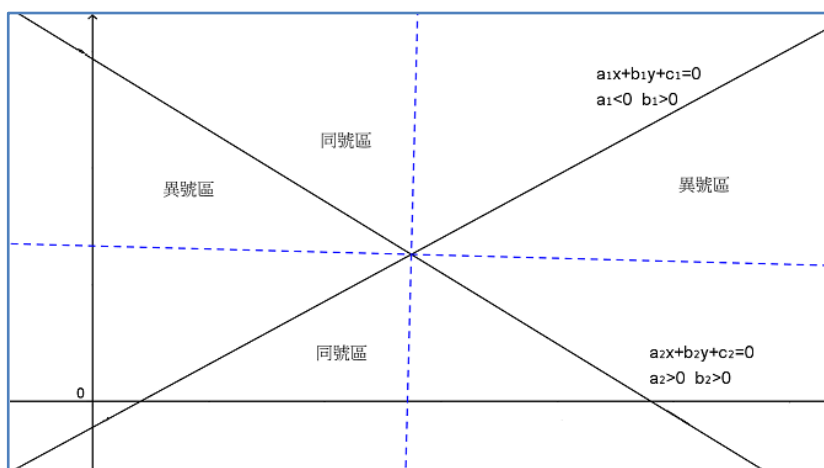
點 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax + by + c = 0$ 之距離為 $\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

兩平行直線 $L_1: ax + by + c_1 = 0$ ， $L_2: ax + by + c_2 = 0$ 之距離為 $\frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

設 $L_1: a_1x + b_1y + c_1 = 0$ 與 $L_2: a_2x + b_2y + c_2 = 0$ 為平面上兩相交直線，顯然兩直線將平面切割成四個區域，其中若是區域中的任一點代進兩直線將得到同號值，則稱此為同號區，反之則為異號區，如下圖所示。

(1) 位於同號區之角平分線為： $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = \frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$

(2) 位於異號區之角平分線為： $\frac{a_1x + b_1y + c_1}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2}} = -\frac{a_2x + b_2y + c_2}{\sqrt{a_2^2 + b_2^2}}$ （註：此二角平分線必互相垂直）



小試身手

例題1	直線 L_1 的方程式為 $4x-3y+5=0$ ，直線 L_2 之參數式為 $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$ ， $t \in R$ ，若直線 L 的一方向向量為 $(-3,7)$ ，且通過 L_1 和 L_2 的交點，則試求直線 L 的方程式為？
例題2	已知 $A(1,2)$ ， $B(3,4)$ 為兩定點， $P(x,y)$ 為直線 $x+2y=3$ 上一點，請問當 $\overline{PA} = \overline{PB}$ 時的 P 點坐標為何？
例題3	設坐標平面上兩點 $A(-2,1)$ ， $B(-1,3)$ ，若 $P(x,y)$ 在 $\overline{AB}$ 上移動，試求 x^2-y^2-1 之最大與最小值，以及此時的 P 點坐標？
例題4	設兩直線 $L_1: \sqrt{3}x - y + 1 = 0$ 與 $L_2: x - \sqrt{3}y - 4 = 0$ 之夾角為 θ ，試求 $\theta = ?$
例題5	坐標平面上兩點 $P(1,3)$ 與 $Q(7,2)$ ，設 $\overline{PQ}$ 與直線 $L: x - 4y + 4 = 0$ 交於 R 點，則 $\overline{PR} : \overline{QR} = ?$
例題6	設坐標平面上兩直線 L_1 與 L_2 之角平分線為 $x+y-2=0$ ，已經 L_1 之方程式為 $2x-y+3=0$ ，求另一直線 L_2 之方程式為？

解答與解析

例題1：將 $\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = 1 - t \end{cases}$ 代入 $4x - 3y + 5 = 0$ 中

$$\text{得 } 4(5 + 2t) - 3(1 - t) + 5 = 0 \Rightarrow t = -2$$

$\Rightarrow$ 交點為 $(1, 3)$

故直線 L 的參數式為 $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 3 + 7t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$

利用加減消去法將 t 消去即可得到直線 L 的方程式： $7x + 3y - 16 = 0$

例題2： $\because x + 2y = 3$ ，令 $y = t$ ，得 $x = 3 - 2t$

$\therefore P$ 點坐標可設為 $(3 - 2t, t)$

$$\overline{PA} = \sqrt{(3 - 2t - 1)^2 + (t - 2)^2} = \sqrt{(3 - 2t - 3)^2 + (t - 4)^2} = \overline{PB}$$

$$\Rightarrow 4 - 8t + 4t^2 + t^2 - 4t + 4 = 4t^2 + t^2 - 8t + 16$$

$$\Rightarrow t = -2$$

代回上式即可得 P 點坐標為 $(7, -2)$

例題3： $\overrightarrow{AB} = (1, 2)$ 為直線 AB 之方向向量，

在 $\overline{AB}$ 上的點坐標皆可假設為 $(-2 + t, 1 + 2t)$ ， $0 \leq t \leq 1$ ，

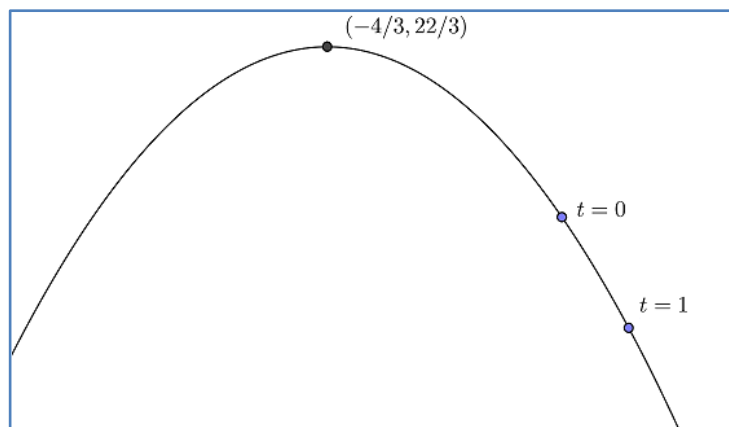
我們欲求之 $x^2 - y^2 - 1$ 可以參數式表示為

$$\begin{aligned} (-2 + t)^2 - (1 + 2t)^2 - 1 &= -3t^2 - 8t + 2 \\ &= -3\left(t + \frac{4}{3}\right)^2 + \frac{22}{3} \end{aligned}$$

$$\because 0 \leq t \leq 1$$

$\therefore$ 從圖形中可以輕易看出當 $t = 0$ 時函數將有最大值2，此時 P 點坐標 $(-2, 1)$

$t = 1$ 時函數將有最小值 -9 ，此時 P 點坐標 $(-1, 3)$



例題4： L_1 之斜率 $m_1=\sqrt{3}$ ， L_2 之斜率 $m_2=\frac{1}{\sqrt{3}}$

利用 $\tan\theta$ 之和(差)角公式可知

$$\tan\theta = \pm \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \pm \frac{\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + \sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}$$

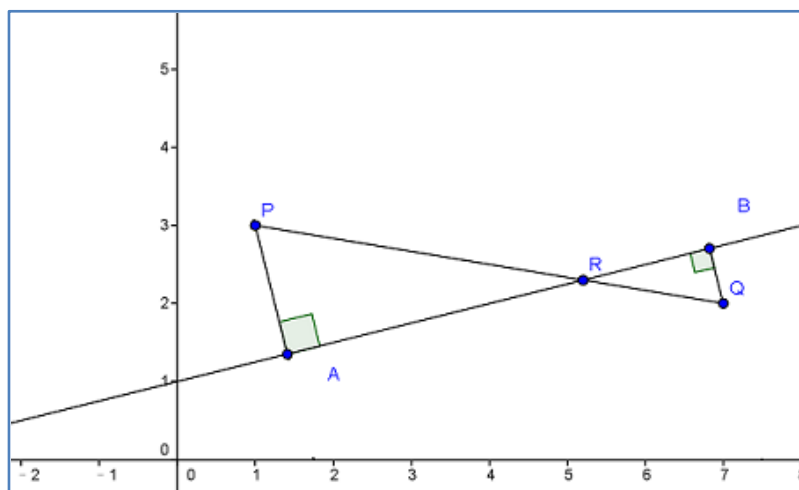
$$\because 0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$$

$$\therefore \theta = 30^\circ \text{ 或 } 150^\circ$$

例題5：由下圖可知

$$\overline{PR} : \overline{QR} = \overline{PA} : \overline{QB} = d(P, L) : d(Q, L)$$

$$= \frac{|1 - 4 \times 3 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} : \frac{|7 - 4 \times 2 + 4|}{\sqrt{1^2 + (-4)^2}} = 7 : 3$$



例題6：解 $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ 2x - y + 3 = 0 \end{cases}$ 得 $x = \frac{-1}{3}, y = \frac{7}{3}$

$$\Rightarrow L_2 \text{ 必過 } (\frac{-1}{3}, \frac{7}{3})$$

令 L_2 方程式為 $y - \frac{7}{3} = m(x + \frac{1}{3})$ ，結合已知 L_1 斜率=2，以及角平分線斜率=-1

$$\Rightarrow \frac{-1-2}{1+2(-1)} = \frac{m-(-1)}{1+m(-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{m-(-1)}{1-m} = 3$$

$$\Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$\text{故 } L_2 \text{ 方程式： } y - \frac{7}{3} = \frac{1}{2}(x + \frac{1}{3})$$