選修數學 進階講義 上

常態分布

成功高中·陳冠宏老師

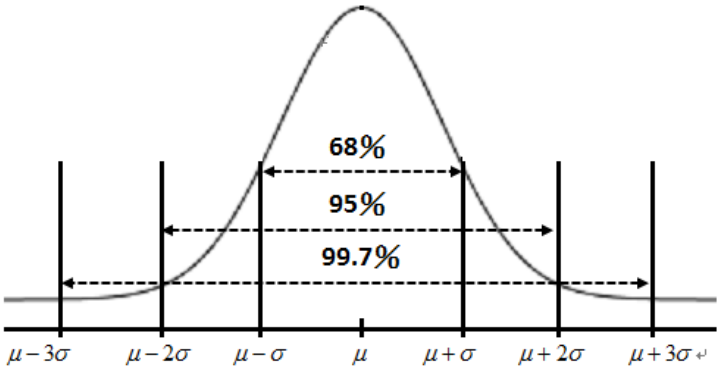
信望愛文教基金會

15-3-3　常態分布

定理敘述

1. 常態分佈為一連續型隨機變數，其曲線圖形以 x=μ 為對稱軸左右對稱，其中 μ 為常態分布之期望值（平均），中間部份所占比例較大，愈往兩旁所占比例越小有如鐘型，故又稱鐘型分布。此外，因最早將常態分布曲線用在描述分布的是數學家高斯，故又稱高斯分布。

2. 若已知常態分佈之平均 μ，標準差 σ，則依「經驗法則」可估算出母體資料中：
   約有 68%的資料落在區間 $[\mu-\sigma,\mu+\sigma]$ 內
   約有 95%的資料落在區間 $[\mu-2\sigma,\mu+2\sigma]$ 內
   約有 99.7%的資料落在區間 $[\mu-3\sigma,\mu+3\sigma]$ 內



3. 平均為 0，標準差為 1 之常態分布稱為標準常態分布。可將任意常態分布標準化即得。

定理證明或說明

已知隨機變數 X 為平均 μ，標準差 σ 之常態分布，若 $Y=\frac{X-\mu}{\sigma}$，則 Y 為平均為 0，標準差為 1 之常態分布

關鍵字

常態分布

例題 1

若某校 1000 位學生的數學段考成績平均分數是 65.24 分，樣本標準差是 5.24 分，而且已知成績分佈呈現常態分配。試問全校約有多少人數學成績低於 60 分

Ans：160 人

解：60=65.24-1×5.24，故取小於平均減一個標準差之人數，由常態分布之經驗法則可知，約佔全部 16%，即 160 人

例題 2

若某校 1000 位學生的平均身高是 160 公分，樣本標準差是 10 公分，而且已知身高分佈呈現常態分配。試問全校約有多少人身高高於 180 公分

Ans：25 人

解：80=60+1×10，故取大於平均加二個標準差之人數，由常態分布之經驗法則可知，約佔全部 2.5%，即 25 人

例題 3

若某校 10000 位學生的平均體重是 65 公斤，樣本標準差是 10 公斤，而且已知體重分佈呈現常態分配。試問全校約有多少人體重低於 95 公斤

Ans：9985 人

解：95=65+3×10，取大於平均加三個標準差之人數，由常態分布之經驗法則可知，約佔全部 0.15%，即 15 人，故低於 95 公斤約 9985 人

例題 4

若某校 1000 位學生的數學段考成績平均分數是 54.76 分，樣本標準差是 5.24 分，而且已知成績分佈呈現常態分配。，若小明的分數為 60 分，試問其在全校的排名約為第幾名

Ans：160 名

解：60=54.76+1×5.24，故取大於平均減一個標準差之人數，由常態分布之經驗法則可知，約佔全部 16%，即約 160 人分數超過 60 分，故小明約為第 160 名

例題 5

若某校高三 400 位學生的學測成績平均級人是 50 級分，樣本標準差是 5 級分，而且已知成績分佈呈現常態分配。，則下列敘述何者正確？

(1)全校約有 272 位學生成績介於 45 級分與 55 級分

(2)約有 5%的人超過 60 級分

(3)約有 10 位學生成績低於 40 級分

(4)不會有 75 級分的學生

(5)一定有 50 級分的學生

Ans：(1)(3)

解：

(1)即介於平均增減一個標準差的範圍內，約 68%，

400×68%=272

(2)即大於平均加二個標準差的範圍，約 2.5%

(3)即小於平均減二個標準差，約 2.5%

400×2.5%=10

(4)(5)不一定

溫故知新

習題 1

若某校 1000 位學生的數學段考成績平均分數是 65 分，樣本標準差是 5 分，而且已知成績分佈呈現常態分配。試問全校約有多少人數學成績高於 75 分

習題 2

若某校 1000 位學生的平均身高是 160 公分，樣本標準差是 10 公分，而且已知身高分佈呈現常態分配。試問全校約有多少人身高介於 150 公分與 170 公分之間

習題 3

若某校 1000 位學生的平均體重是 60 公斤，樣本標準差是 10 公斤，而且已知體重分佈呈現常態分配。試問全校約有多少人體重介於 70 公斤與 80 公斤之間

習題 4

若某校 1000 位學生的數學段考成績平均分數是 55 分，樣本標準差是 5 分，而且已知成績分佈呈現常態分配。，若小明的分數為 65 分，試問其在全校的排名約為第幾名

習題 5

某校高三學生在一次考試中，成績呈常態分配，且已知其分數之平均數為 70 分，標準差為 10 分。若從這次考試的學生中，隨機抽出一位學生，則這位學生的成績低於 60 分的機率約為？

習題 6

國一學生 30 萬人，智商測驗的結果是「平均數 100，標準差 15」的常態分配。若以智商 130 以上做為甄選國一學生為資優生的門檻，則根據這次測驗的結果判斷下列選項中的敘述，哪些是正確的？

(1)約有 5%的國一學生通過資優生甄選門檻

(2)約有 15 萬名國一學生的智商在 100 以上

(3)超過 20 萬名國一學生智商介於 85 至 115 之間

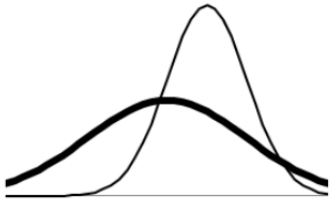
(4)隨機抽出 1000 名國一學生，可期望有 25 名資優生

(5)如果某偏遠學校只有 14 名的國一學生，那麼該校不會有資優生

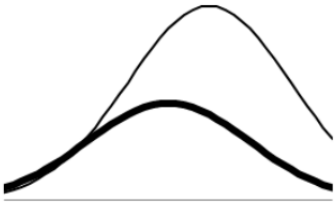
習題 7 【學測 101】

甲、乙兩校有一樣多的學生參加數學能力測驗，兩校學生測驗成績的分布都很接近常態分布，其中甲校學生的平均分數為 60 分，標準差為 10 分；乙校學生的平均分數為 65 分，標準差為 5 分。若用粗線表示甲校學生成績分布曲線；細線表示乙校學生成績分布曲線，則下列哪一個分布圖較為正確？

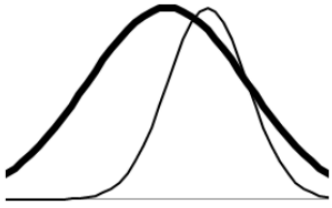
(1)



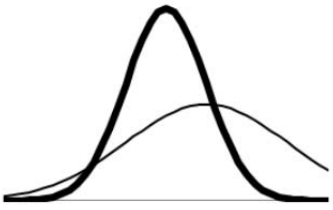
(2)



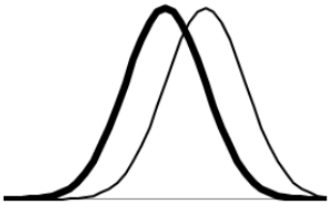
(3)



(4)



(5)



習題 8 【數乙 99】

某校高三學生在一次考試中，成績呈常態分配，且已知其分數之平均數為 70 分，標準差為 10 分。若從這次考試的學生中，隨機抽出一位學生，則這位學生的成績低於 60 分的機率最接近以下哪一選項？

(1)0.16 (2)0.32 (3)0.34 (4)0.68 (5)0.84

解答與解析

習題 1：25 人

習題 2：680 人

習題 3：135 人

習題 4：25 名

習題 5：0.16

習題 6：(2)(3)(4)

習題 7：(1)

解：

(1)因乙校平均較甲校平均高，故細線的最高點發生處，較粗線的最高點發生處右邊

(2)因甲校標準差較乙校標準差大，故粗線的圖形較細線的圖線平緩，所以(4)(5)不合

(3)因兩校人數相同，故曲線下面積相同，所以(2)(3)不合

故選(1)

習題 8：(1)

解：

60=70-1×10，故取小於平均減一個標準差之人數，由常態分布之經驗法則可知，約佔全部 16%，故選(1)