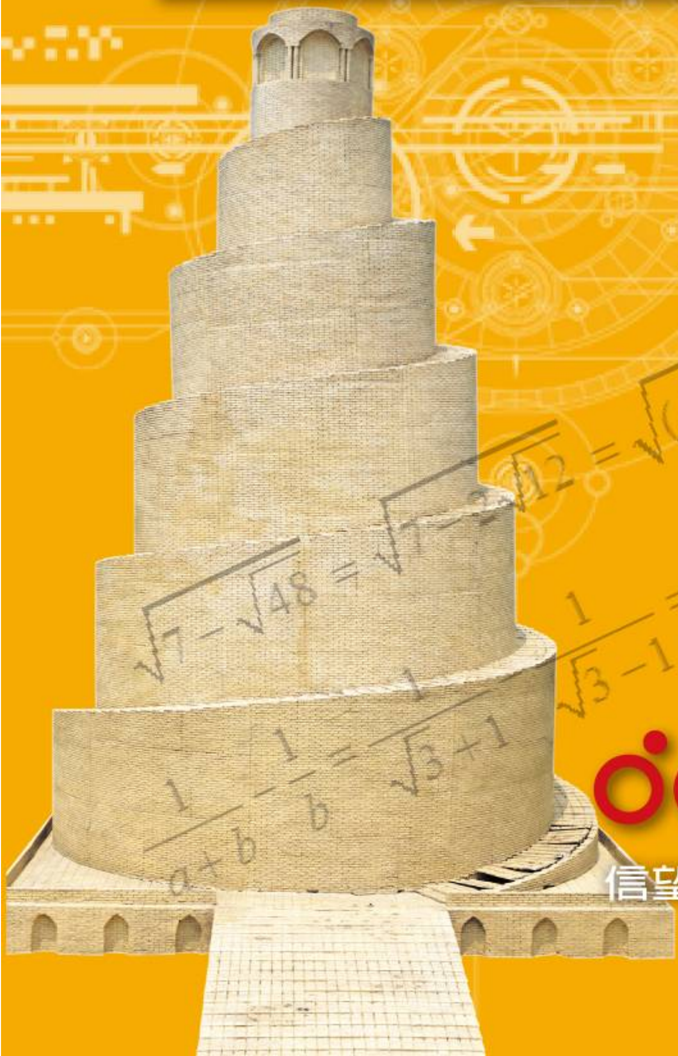
數學 基礎講義

正弦與餘弦定理

信望愛文教基金會・數學種子教師團隊



信望愛文教基金會

正弦與餘弦定理

正弦定理

對於任意 ΔABC，假設 a、b、c 分別為∠A、∠B、 C 之對邊，R 為其外接圓半徑，則我們可以有以下公式：

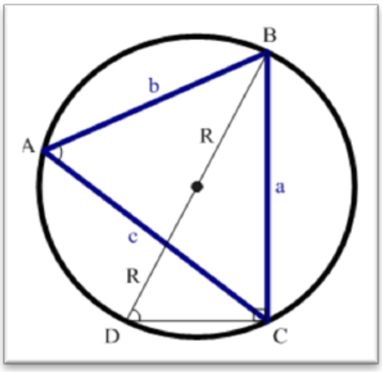
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

Proof：

為了證明這個公式對於任意三角形皆成立，我們以下會分別對銳角、直角、鈍角三種三角形做出證明，而其證明過程亦極為相似，讓我們看下去。

銳角三角形

首先我們先做出銳角 ΔABC 的外接圓（如右圖），



接下來由∠B 過外接圓圓心交圓於 D 點，並連接 BD 及 DC 做出∠D。

針對目前為止的圖形我們可以整理出兩個資訊：

(1)∠A 與∠D 對應到相同的弧 BC，
故∠A 與∠D 有相同的角度。

(2)由於弦 BD 經過圓心，故可知 $\overline{BD}$ 外接圓之直徑，
由直徑兩端點交出之圓周角必為 90°。

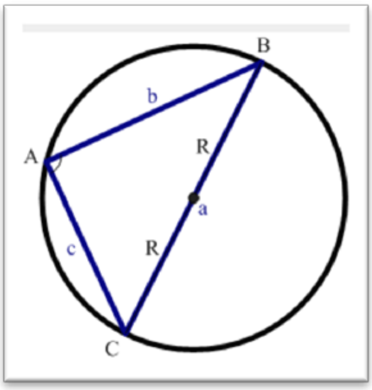
綜合以上兩點我們可以推論出 $\sin D=\frac{a}{2R}$，且∠D＝ ∠A，所以 $\sin A=\sin D=\frac{a}{2R}$，將 2R 及 sin A 可得 $\frac{a}{\sin A}=2R$。

對於 ∠B 以及 ∠C 進行相同的處理後我們可以得到正弦定理的公式：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

直角三角形

關於直角三角形的處理就相對簡單的多，右圖中 ΔABC 的∠B 以及 ∠C 都可以直接以 sin 函數的定義來表示：



$$\sin B=\frac{b}{a}=\frac{b}{2R}\ ,\ \sin C=\frac{c}{a}=\frac{c}{2R}$$

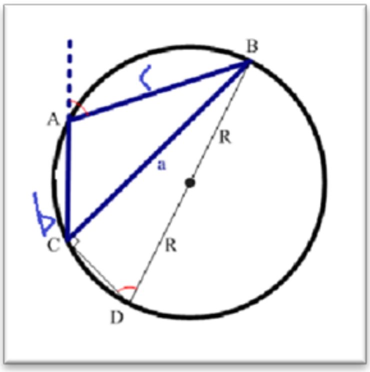
另外由於 ∠A 為直角，故 $\sin A=\sin 90^{\circ}=1=\frac{a}{a}=\frac{a}{2R}$

接下來經過簡單的移項整理之後，我們一樣可以得到：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

鈍角三角形

欲利用外接圓來證明鈍角三角型的正弦定理，處理方法會分成兩種：



(1)針對銳角 ∠B、∠C，我們用相同於銳角三角形的手法：從 A 點過圓心作弦之後做出對應到等弧的圓周角，在此就不再贅述。

(2)針對鈍角 ∠A，首先從 B 點過圓心作弦交圓 D 點，接著連接 DC。很顯然四邊形 ABCD 為一圓內接四邊形，國中學過的知識告訴我們圓內接四邊形對角互補 ∠D + ∠A = 180°，所以 $\sin D = \sin(180^\circ - \angle A) = \sin A$。

另外由於 $\overline{BD}$ 為直徑，∠BCD 為一直角，所以 $\sin D$ 可以輕鬆由定義求得為 $\frac{a}{2R}$，綜上所述我們也同樣證明出了：

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R$$

餘弦定理

對於任意 ΔABC，假設 a、b、c 分別為∠A、∠B、∠C 之對邊，則我們可以有以下公式：

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$$

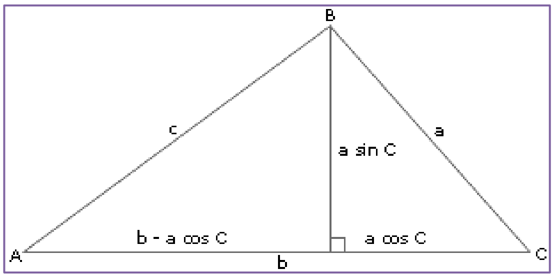
同樣的還有

$$b^2=a^2+c^2-2ac\cos B$$

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

Proof：

由於以上三式證明過程完全相同，故在此僅擇一示範。我們選擇從 ∠C 出發，由 B 點對 $\overline{AC}$ 上作 Δ 的高，並交 $\overline{AC}$ 於 D，Δ 的高以及底邊分別可以 $a\sin C$ 以及 $a\cos C$ 表示，ΔABD 的底邊 = b - acos C。針對左半邊的直角 Δ 我們應用畢氏定理可以得到以下關係：



$$c^2=a^2(\sin C)^2+(b-a\cos c)^2=a^2\sin^2C+b^2-2ab\cos C+\cos^2C$$

$$=a^2(\sin^2C+\cos^2C)-2ab\cos C=a^2+b^2-2ab\cos C$$

小試身手

例題 1	△ABC 中，若 $\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\angle A=60°$，則△ABC 的面積為？
例題 2	△ABC 中，$\angle A=120°$，$\overline{AB}=3$，$\overline{AC}=4$，$\angle A$ 的平分線交 $\overline{BC}$ 於 D 點，則 $\overline{AD}$=？
例題 3	在△ABC 中，設 a，b，c 分別為∠A，∠B，∠C 的對邊長， 若(a+b)：(b+c)：(c+a) ＝ 5：6：7，則 sin A：sin B：sin C＝
例題 4	在△ABC 中，設 a，b，c 分別為∠A，∠B，∠C 的對邊長， 若 $2(a+b-c)=3(\sin A+\sin B-\sin C)$，則此三角形的外接圓半徑為？
例題 5	在△ABC 中，已知 $\overline{BC}=1$，$\sin A<\sin B$，且 sin A 與 sin B 為 $8x^2-4\sqrt{3}x+1=0$ 的兩根，則△ABC 的外接圓半徑為？
例題 6	在△ABC 中，若 D 點在 $\overline{BC}$ 邊上，且 $\overline{AB}=7$，$\overline{AC}=13$，$\overline{BD}=7$，$\overline{CD}=8$， 則：(1) $\overline{AD}$＝ (2) ∠ABC＝
例題 7	在△ABC 中，三邊長為 3，5，6，則： (1) △ABC 面積為？ (2) △ABC 的外接圓半徑為？
例題 8	在△ABC 中，若 $\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$，則∠A＝

解答與解析

例題1：$\triangle ABC$ 的面積$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\sin 60°$

$$=\frac{1}{2}\times2\times3\times\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

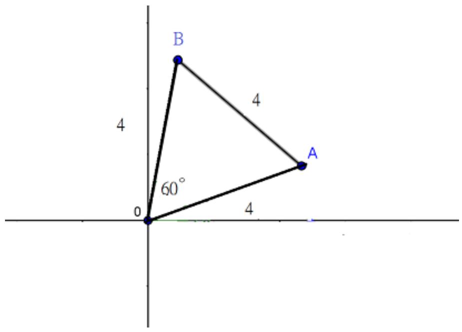
例題2：設 $\overline{AD}=x$

$\because \triangle ABD$ 面積$+\triangle ACD$ 面積$=\triangle ABC$ 面積

$$\therefore \frac{1}{2}\times3\times x\times\sin 60^{\circ}+\frac{1}{2}\times4\times x\times\sin 60^{\circ}=\frac{1}{2}\times3\times4\times\sin 120^{\circ}$$

$$\frac{3\sqrt{3}}{4}x+\sqrt{3}x=3\sqrt{3}\rightarrow\frac{7\sqrt{3}}{4}x=3\sqrt{3}$$

$x=\dfrac{12}{7}$，故 $\overline{AD}=\dfrac{12}{7}$



例題3：(a+b)：(b+c)：(c+a) = 5：6：7

設 $a+b=5k$，$b+c=6k$，$c+a=7k$，其中 $k\neq 0$

相加得 $2(a+b+c)=18k$

$a+b+c=9k$

$a=3k$，$b=2k$，$c=4k$

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=3k:2k:4k$

故 $\sin A:\sin B:\sin C=3:2:4$

例題4：$\because a=2R\sin A$，$b=2R\sin B$，$c=2R\sin C$

$\therefore a+b-c=2R(\sin A+\sin B-\sin C)$

$$\frac{a+b-c}{\sin A+\sin B-\sin C}=2R=\frac{3}{2}$$

$$R=\frac{3}{4}$$

例題5：$8x^2-4\sqrt{3}x+1=0$，解之得 $x=\dfrac{4\sqrt{3}\pm 4}{16}=\dfrac{\sqrt{3}\pm 1}{4}$

$\because \sin A<\sin B$　$\therefore \sin A=\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$，$\sin B=\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

設△ABC 的外接圓半徑為 R，則 $\dfrac{\overline{BC}}{\sin A}=2R$

$$2R=\frac{1}{\frac{\sqrt{3}-1}{4}}=\frac{4}{\sqrt{3}-1}$$

$R=\sqrt{3}+1$

故△ABC 的外接圓半徑為 $\sqrt{3}+1$

例題 6：

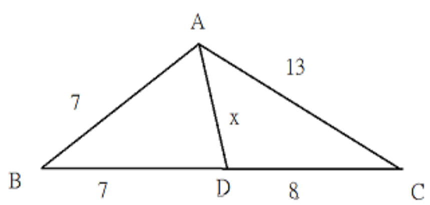
(1)在△ABC 中，由餘弦定理知

$$\cos B=\frac{7^2+15^2-13^2}{\cancel{2}\times\cancel{7}\times 15}=\frac{7^2+7^2-x^2}{\cancel{2}\times\cancel{7}\times 7}$$

$$\frac{105}{15}\times 7=98-x^2$$

$x=7$

$\therefore \overline{AD}=7$



(2)在△ABD 中，

$\because \overline{AD}=7$

$$\therefore \cos B=\frac{7^2+7^2-7^2}{2\times 7\times 7}=\frac{1}{2}$$

$\therefore \angle ABC=60^\circ$

例題 7：

(1) $\because s=\dfrac{1}{2}(3+5+6)=7$

$\therefore \triangle ABC$ 面積$=\sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}=2\sqrt{14}$

(2) $\because \triangle ABC$ 面積$=\dfrac{1}{2}ab\sin C=\dfrac{1}{2}ab\left(\dfrac{c}{2R}\right)=\dfrac{abc}{4R}$

$\therefore R=\dfrac{abc}{4\triangle ABC\text{ 面積}}=\dfrac{3\times5\times6}{4\times2\sqrt{14}}=\dfrac{45}{4\sqrt{14}}=\dfrac{45\sqrt{14}}{56}$

例題8：由正弦定理知

$a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C=\sqrt{2}:2:(\sqrt{3}+1)$

設 $a=\sqrt{2}k$，$b=2k$，$c=(\sqrt{3}+1)k$

由餘弦定理知

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{(2k)^2+[(\sqrt{3}+1)k]^2-(\sqrt{2}k)^2}{2\times2k\times[(\sqrt{3}+1)k]}$$

$$=\frac{(6+2\sqrt{3})k^2}{4(\sqrt{3}+1)k^2}=\frac{2\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore \angle A=30^\circ$