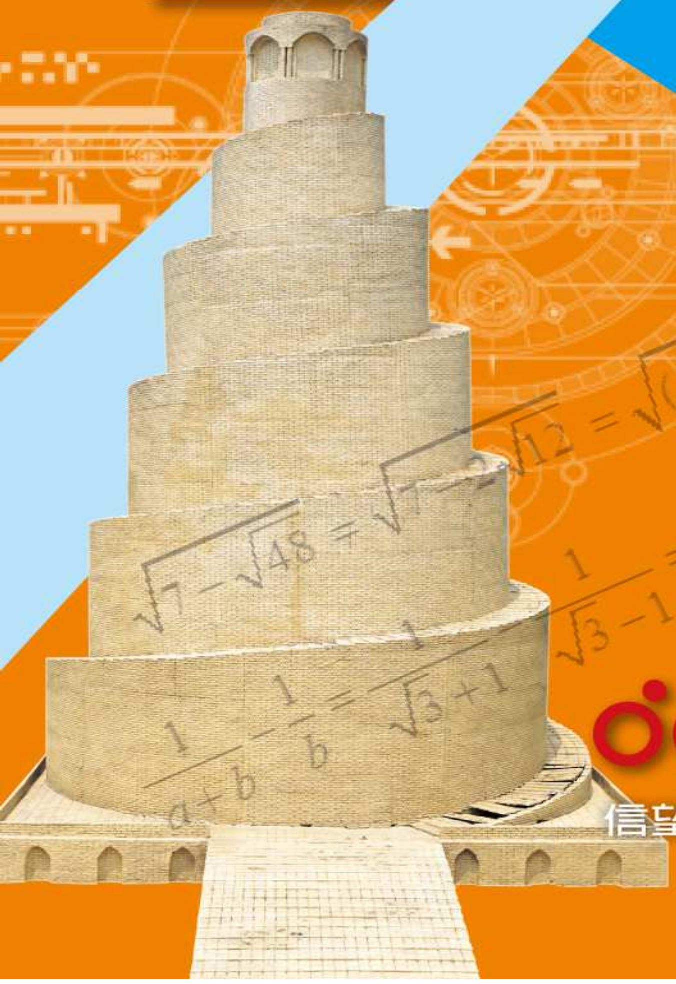
高中數學 進階講義

邏輯集合與計數原理

陳清海　老師



信望愛文教基金會

lt99ok221 邏輯、集合與計數原理

主題一、邏輯簡介

1. 在數學的語言裡，能判斷其爲對或錯的語句，稱爲敘述．例如：「三角形三內角和爲180°」爲對的敘述；「1+2＝4」爲錯的敘述．

2. 「且」與「或」：
(1) 當兩個敘述 p 與 q 皆對時,「 p 且 q 」才是對的敘述, 否則就是錯的敘述．常以符號「 $p\wedge q$ 」表示「 p 且 q 」.
(2) 當兩個敘述 p 與 q 至少有一爲對時,「 p 或 q 」才是對的敘述，否則就是錯的敘述．常以符號「 $p\vee q$ 」表示「 p 或 q 」.

例如：

1+2＝3	9−5＝4	1+2＝6	9−5＝8
對	對	錯	錯

①「1+2＝3且9−5＝4」是對的敘述．

②「1+2＝6且9−5＝4」是錯的敘述．

③「1+2＝6或9−5＝4」是對的敘述．

④「1+2＝6或9−5＝8」是錯的敘述．

3. 否定一個敘述 p 而成另一個新的敘述，稱此新的敘述爲 p 的否定敘述，以符號 $\sim p$（讀作非 p ）表示．例如：若敘述 p 爲「2 是整數」，則其否定敘述 $\sim p$ 爲「2 不是整數」.

4. 笛摩根定律：
(1) 敘述「 p 且 q 」的否定敘述爲「非 p 或非 q 」，記作

$$\sim(p\wedge q)\equiv(\sim p)\vee(\sim q)\ .$$

(2) 敘述「 p 或 q 」的否定敘述爲「非 p 且非 q 」，記作

$$\sim(p\vee q)\equiv(\sim p)\wedge(\sim q)\ .$$

【例題 1】【配合課本例 1】

選出對的敘述:

(1) 三角形的兩邊之和大於第三邊．

(2) 2 是質數或 4 是質數．

(3) 2 是質數且 4 是質數．

(4) $x=1$ 或 $y=2$ 的否定敘述爲 $x\neq 1$ 或 $y\neq 2$．

(5) $x=1$ 且 $y=2$ 的否定敘述爲 $x\neq 1$ 且 $y\neq 2$．

Ans：(1)(2)

【詳解】

由邏輯的簡介，得知選項(1)(2)正確．

【類題 1】

選出對的敘述:

(1) $5\geq 5$．

(2) $\sqrt{4}=-2$ 或 $\sqrt{4}=2$．

(3) $\sqrt{4}=-2$ 且 $\sqrt{4}=2$．

(4) $x=1$ 的否定敘述爲 $x\neq 1$．

(5) $0<x<2$ 的否定敘述爲 $x\leq 0$ 或 $x\geq 2$．

Ans：(1)(2)(4)(5)

【詳解】

由邏輯簡介中的規定，得知選項(1)(2)(4)(5)正確．

主題二、集合簡介

1. 集合是由一些滿足某些條件之元素所組成的整體. 若 a 是集合 S 中的一個元素，則我們用符號 $a \in S$（讀作 a 屬於 S）表示；若 a 不是集合 S 中的元素，則用符號 $a \notin S$（讀作 a 不屬於 S）表示. 特別的，不包含任何元素的集合稱為空集合，記作 $\varnothing$.

2. 集合的表示法：

   (1) 列舉法：將集合的所有元素一一在大括弧中列舉出來方法. 例如：小於 6 的正整數組成的集合 $A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

   (2) 描述法：在大括弧 $\{\ \ \}$ 內先寫出元素的一般形式，再加一直槓，並在直槓的右邊寫出能夠界定所有元素的屬性的方法. 例如：小於 1000 的正整數組成的集合 $C=\{k \mid 1 \le k \le 999,\ k\text{為正整數}\}$.

3. 子集：當集合 A 中的每一個元素都是集合 B 的元素時，稱 A 是 B 的一個子集，並用符號 $A \subset B$ 或用符號 $B \supset A$ 來表示.

4. 空集合 $\varnothing$ 為任一集合 A 的子集，即 $\varnothing \subset A$.

5. 當兩個集合 A 與 B 滿足條件 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ 時，稱此兩個集合相等，記作 $A=B$.

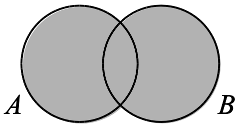
6. 聯集：$A \cup B=\{x \mid x \in A\text{或 } x \in B\}$，如圖一.

7. 交集：$A \cap B=\{x \mid x \in A\text{且 } x \in B\}$，如圖二.

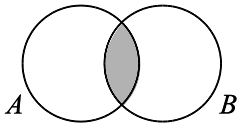
8. 差集：$A-B=\{x \mid x \in A,\ \text{但}\, x \notin B\}$，如圖三.

9. 宇集：當所探討的集合都是某個集合 U 的子集時，稱 U 為宇集，如圖四.

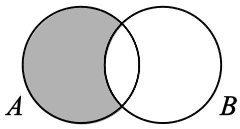
10. 補集：$A'=\{x \mid x \in U,\ x \notin A\}$，如圖四.



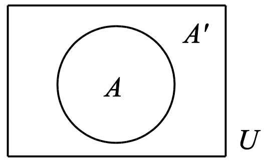
圖一



圖二



圖三



圖四

11. 笛摩根定律：設 U 爲宇集， A 與 B 爲 U 的兩個子集．

(1) $(A\cap B)' = A'\cup B'$

(2) $(A\cup B)' = A'\cap B'$ ．

12. 符號 $n(A)$ 表示集合 A 的元素個數．

例如：若 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，則 $n(A)=6$ ．

【例題 2】【配合課本例 2】

(1) 利用列舉法表示所有 12 的正因數組成的集合．

(2) 利用描述法表示所有小於 100 且被 3 除餘 1 的正整數組成的集合．

【詳解】

(1) 列舉法：{1，2，3，4，6，12}．

(2) 描述法：$\{3k+1 \mid 0 \le k \le 32, k\text{為整數}\}$．

【類題 2】

(1) 利用列舉法表示集合 $A=\{x \mid x^2-x-2=0\}$．

(2) 利用描述法表示所有小於 1000 且被 5 整除的正整數組成的集合．

【詳解】

(1) 因為 $x^2-x-2=0$

$\Rightarrow (x-2)(x+1)=0$

$\Rightarrow$ x＝1 或 x＝2，

所以列舉法 $A=\{-1,\ 2\}$．

(2) 描述法：$\{5k \mid 1 \le k \le 199, k\text{為整數}\}$．

【例題 3】【配合課本例 3】

列出集合 $S=\{a,\ b,\ c\}$ 的所有子集．

【詳解】

依子集所含元素的個數分類如下：

(1) 不含任何元素者：$\varnothing$．

(2) 恰含 1 個元素者：$\{a\}, \{b\}, \{c\}$．

(3) 恰含 2 個元素者：$\{a,\ b\}, \{a,\ c\}, \{b,\ c\}$．

(4) 恰含 3 個元素者：$\{a,\ b,\ c\}$．

總計 S 共有 8 個子集．

【類題 3】

列出集合 $S=\{1,\ 2\}$ 的所有子集．

【詳解】
依子集所含元素的個數分類如下：
(1) 不含任何元素者： $\varnothing$ ．

(2) 恰含 1 個元素者： $\{1\},\ \{2\}$ ．

(3) 恰含 2 個元素者： $\{1,\ 2\}$ ．

總計 s 共有 4 個子集．

【例題 4】【常考題】

已知集合 $A=\{2,\ 2r,\ 2r^2\}$ 與 $B=\{-4,\ -4+d,\ -4+2d\}$ 相等，求實數 $r,\ d$ 的值．

Ans：r＝–2，d＝6

【詳解】
因爲 A＝B，所以 B⊂A，
因此集合 B 的元素–4 在集合 A 中．
又因爲 r 爲實數，所以–4＝2r ⇒r＝–2，

此時 $A=\{2,\ -4,\ 8\}$ ．

有以下兩種情形：

(1) $\begin{cases}-4+d=2\\-4+2d=8\end{cases}$ 　解得 d＝6．

(2) $\begin{cases}-4+d=8\\-4+2d=2\end{cases}$ 　無解．

故 $r=-2,\ d=6$ ．

【類題 4】

已知集合 $A=\{x-1,\ y-2\}$ 與 $B=\{x+y,\ 2x+3\}$ 相等，求實數 $x,\ y$ 的值．

Ans：x＝–3，y＝–1

【詳解】
有以下兩種情形：

(1) $\begin{cases} x-1=x+y \\ y-2=2x+3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y=-1 \\ 2x-y=-5 \end{cases}$

解得 x＝−3，y＝−1．

(2) $\begin{cases} x-1=2x+3 \\ y-2=x+y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-4 \\ x=-2 \end{cases}$ 無解．

故 x＝−3，y＝−1．

【例題 5】【配合課本例 4】

設 A 為所有 6 的正因數組成的集合，B 為所有 10 的正因數組成的集合．求

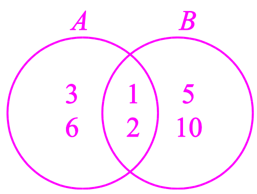
(1) $A\cap B,$

(2) $A\cup B,$

(3) $A-B$

(4) $B-A$ **.**

【詳解】



因為 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$, $B=\{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$，所以

$A\cap B=\{1,\ 2\}$,

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 10\}$,

$A-B=\{3,\ 6\}$,

$B-A=\{5,\ 10\}$.

【類題 5】

設 A 為所有 8 的正因數組成的集合，B 為所有 15 的正因數組成的集合．求

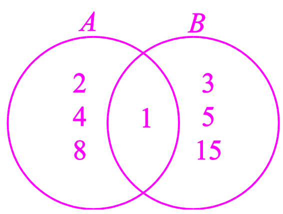
(1) $A\cap B,$

(2) $A\cup B,$

(3) $A-B$

(4) $B-A$ **.**

【詳解】



因為 $A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 15\}$，所以

$A\cap B=\{1\}$,

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 8,\ 15\}$,

$A-B=\{2,\ 4,\ 8\}$,

$B-A=\{3,\ 5,\ 15\}$.

【例題 6】【配合課本內文】

設 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 爲宇集，集合 $A=\{1,\ 2\}$ 與 $B=\{2,\ 3\}$ 爲 U 的兩個子集，求

(1) $(A\cap B)'$，**(2)** $A'\cup B'$，**(3)** $(A\cap B)'$ 與 $A'\cup B'$ 是否相等?

【詳解】

(1) 因爲 $A\cap B=\{2\}$，所以 $(A\cap B)'=\{1,\ 3,\ 4\}$.

(2) 因爲 $A'=\{3,\ 4\}$, $B'=\{1,\ 4\}$, 所以 $A'\cup B'=\{1,\ 3,\ 4\}$.

(3) 由(1)(2)知 $(A\cap B)'=A'\cup B'$.

【類題 6】

設 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 爲宇集，集合 $A=\{1,\ 2\}$ 與 $B=\{2,\ 3\}$ 爲 U 的兩個子集，求

(1) $(A\cup B)'$

(2) $A'\cap B'$

(3) $(A\cup B)'$ 與 $A'\cap B'$ 是否相等?

【詳解】

(1) 因爲 $A\cup B=\{1,\ 2,\ 3\}$, 所以 $(A\cup B)'=\{4\}$.

(2) 因爲 $A'=\{3,\ 4\}$, $B'=\{1,\ 4\}$, 所以 $A'\cap B'=\{4\}$.

(3) 由(1)(2)知 $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

【例題 7】【配合課本例 5】

設宇集 U 爲 1 到 100 的正整數組成的集合，A 爲 1 到 100 間 7 的倍數組成的集合，求 $n(A')$.

Ans：86

【詳解】

因爲 $100 = 7 \times 14 +$ ，所以 $n(A) = 14$ ．

故 $n(A') = n(U) - n(A) = 100 - 14 = 86$ ．

【類題 7】

在 1 到 200 的正整數中，不能被 3 整除的正整數有多少個?

Ans：134

【詳解】

設 A 爲 1 到 200 間能被 3 整除的正整數組成的集合．

因爲 $200 = 3 \times 66 +$ ，所以 $n(A) = 66$ ．

故 $n(A') = n(U) - n(A) = 200 - 66 = 134$ ．

【例題 8】【常考題】

設集合 $A = \{2,\ 4,\ a^2 - a + 3\}$， $B = \{-3,\ a+2,\ a^2 - 2a + 2,\ a+5\}$ 且 $A - B = \{5\}$，

求實數 a 的值．

Ans：2

【詳解】

因爲 $A - B = \{x \mid x \in A,\ x \notin B\}$ 且 $A - B = \{5\}$，

所以 $5 \in A$，即 $a^2 - a + 3 = 5$，

解得 $a = 2$ 或 -1 ．

(1) 當 $a = 2$ 時， $A = \{2,\ 4,\ 5\}$，$B = \{-3,\ 4,\ 2\}$，

此時 $A - B = \{5\}$ ．

(2) 當 $a = -1$ 時， $A = \{2,\ 4,\ 5\}$，$B = \{-3,\ 1,\ 5\}$，

此時 $A - B = \{2\}$，與題意不合．

故 $a = 2$ ．

【類題 8】

設集合 $A=\{2,\ 4,\ a^2+1\}$，$B=\{-4,\ 3a+1,\ a+3\}$ 且 $A\cap B=\{5\}$，求實數 a 的值．

Ans：2

【詳解】

因為 $A\cap B=\{5\}$，所以 $5\in A$ ．因此，

$a^2+1=5\Rightarrow a=\pm 2$ ．

(1) 當 $a=2$ 時，$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{-4,\ 7,\ 5\}$，

此時 $A\cap B=\{5\}$ ．

(2) 當 $a=-2$ 時，$A=\{2,\ 4,\ 5\}$，$B=\{-4,\ -5,\ 1\}$，

此時 $A\cap B=\varnothing$，與題意不合．

故 $a=2$ ．

主題三、基本計數原理

1. 窮舉法：將所有符合條件的方法一一列出的計數法．
2. 樹狀圖：解題時用來分析題目的圖示法，形如樹枝狀的分枝．
3. 一一對應原理：設 A 與 B 是兩個元素個數為有限個的集合．若集合 A 與 B 之間可以建立一一對應的關係，則這兩個集合的元素個數必相等，即 $n(A)=n(B)$．

【例題 9】【配合課本例 6】

美國職棒大聯盟總冠軍賽採七戰四勝制，若比完第三場時洋基隊以一勝兩敗落後道奇隊，則

(1) 利用樹狀圖描述往後比賽所有可能的情形?

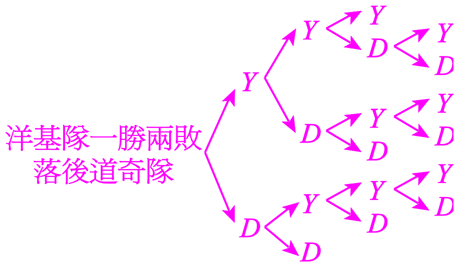
(2) 往後比賽共有多少種可能的情形? 又其中洋基隊獲得冠軍的情形有幾種?

Ans：(2) 4

【詳解】

(1) 利用樹狀圖描述如下：

（其中 Y 表洋基隊勝，D 表道奇隊勝）

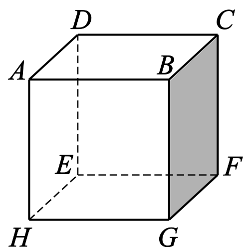


(2) 由(1)的樹狀圖得知，共有 10 種可能情形．

其中洋基隊獲得冠軍的情形有 4 種．

【類題 9】

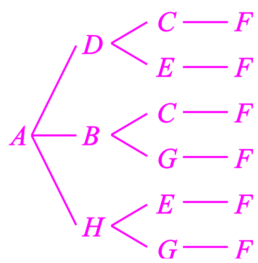
如圖，一隻螞蟻從 A 點出發，沿著正立方體的稜線走到 F 點，試問最短的路徑共有幾條?



Ans：6

【詳解】

利用樹狀圖描述如下：



故最短的路徑共有 6 條．

【例題 10】【配合課本例 7】

學校舉辦桌球單打比賽，每場比賽必分出勝負，採單敗淘汰賽（即任何一位選手只要輸一場比賽就被淘汰出局）．在每一輪比賽中，將選手盡可能的配對比賽，若遇該輪爲奇數位選手時，則讓剩下的一位輪空．依下列參賽人數計算出總共要比賽幾場才能產生冠軍：

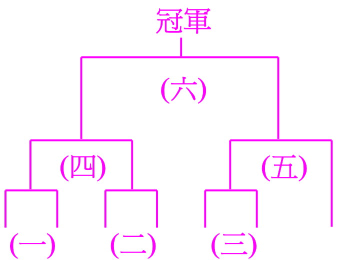
(1) 7 人參賽．

(2) 32 人參賽．

Ans：(1) 6，(2) 31

【詳解】

(1) 利用樹狀圖，將賽程安排如下：



由上圖得知，共要比賽 6 場才能產生冠軍．

(2) 設 A 爲所有比賽場次組成的集合，

B 爲所有失敗者組成的集合．

因爲每一場比賽只會產生一個失敗者，

而且每位選手最多只失敗一次，

所以比賽場次與失敗者之間有一一對應的關係，

即集合 A 與 B 之間可以建立一一對應的關係．

根據一一對應原理可知，$n(A)=n(B)$．

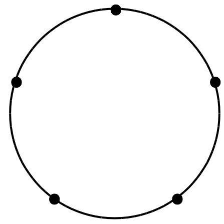
因爲最後只有冠軍一個人從來不曾失敗，

所以失敗者的人數 $n(B)=32-1=31$ 人．

故共要比賽 $n(A)=31$ 場才能產生冠軍．

【類題 10】

已知圓周上有 5 個不同的點．設 A 爲以這 5 點中的 4 點爲頂點之所有四邊形組成的集合，B 爲以這 5 點決定的弦在圓內的所有交點組成的集合．



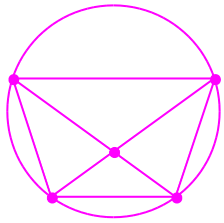
(1) 請問集合 A 與 B 可以建立一一對應的關係嗎?

(2) 求 $n(A)$ 與 $n(B)$ 的值．

Ans：(1) 可，(2) 5；5

【詳解】

(1) 因爲圓的內接四邊形之兩對角線恰交一點，所以兩弦在圓內的交點與圓的內接四邊形之間有一一對應的關係，即集合 A 與 B 之間可以建立一一對應的關係．



(2) 因爲將圓上的 5 個點中的任一點去掉，以所得的 4 點爲頂點皆可形成四邊形，

所以 $n(A)=5$ ．根據一一對應原理可知，

$n(B)=n(A)=5$ ．

主題四、加法原理、乘法原理與取捨原理

1. 加法原理：若完成某件工作的方法，依其性質可分成 k 類，
   且第 1 類有 m_1 種方法，第 2 類有 m_2 種方法，⋯，
   第 k 類有 m_k 種方法，
   則完成這件工作的方法共有 $m_1+m_2+\cdots+m_k$ 種．
2. 乘法原理：若完成某件工作要經過 k 個步驟，
   且第 1 個步驟中有 m_1 種方法，第 2 個步驟中有 m_2 種方法，
   ⋯，第 k 個步驟有 m_k 種方法，則完成這件工作的方法
   共有 $m_1\times m_2\times\cdots\times m_k$ 種．
3. 取捨原理：設 A, B, C 是三個有限個元素的集合．

   (1) $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$．

   (2) $n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)$．

【例題 11】【配合課本內文】

同時擲兩粒大小不同的骰子，求點數和為 4 的倍數之情形共有幾種?

Ans：9

【詳解】

分成以下三類:

(1) 點數和為 4:

有 $(1, 3), (2, 2), (3, 1)$ 共 3 種情形．

(2) 點數和為 8:

有 $(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)$ 共 5 種情形．

(3) 點數和為 12:

有 $(6, 6)$ 共 1 種情形．

故共有 $3+5+1=9$ 種情形．

【類題 11】

同時丟三枚大小不同的硬幣，求奇數個正面的情形共有幾種?

Ans：4

【詳解】

分成以下兩類:

(1) 恰一正面:

有(正, 反, 反)，(反, 正, 反)，(反, 反, 正) 共 3 種情形．

(2) 恰三正面: 有(正, 正, 正)共 1 種情形．

故共有 $3+1=4$ 種情形．

【例題 12】【配合課本例 8】

餐廳有主菜、湯及飲料等三樣餐點．其中主菜有牛排、豬排及雞排三種；湯則有玉米濃湯、海鮮湯與蔬菜湯三種；飲料則提供咖啡或紅茶．每位客人只能從主菜、湯及飲料種類中各任選一種，請問有多少種點餐方式?

Ans：18

【詳解】

選一種主菜有 3 種選法，

選一種湯有 3 種選法，

選一種飲料有 2 種選法．
利用乘法原理，
得點餐方式共有 $3\times3\times2=18$ 種．

【類題 12】

從 5 種報紙、4 種週刊及 3 種月刊中各訂一種，共有多少種訂法?

Ans：60

【詳解】

利用乘法原理，得訂法共有 $5\times4\times3=60$ 種．

【例題 13】【配合課本例 9】

在 180 的正因數中，求

(1) 正因數有多少個?

(2) 是完全平方者有多少個?

(3) 是 2 的倍數者有多少個?

(4) 是 2 的倍數但不是 3 的倍數者有多少個?

(5) 所有正因數的總和．

Ans：(1) 18，(2) 4，(3) 12，(4) 4，(5) 546

【詳解】

將 180 質因數分解得到 $180=2^2\times3^2\times5$ ．

(1) 因為 180 的正因數可寫成 $2^a\times3^b\times5^c$ 的形式，
其中 a 可為 0，1，2；b 可為 0，1，2；c 可為 0，1．
因此 180 的正因數有 $3\times3\times2=18$ 個．

(2) 若正因數中是完全平方者，則
a 可為 0，2；b 可為 0，2；c 可為 0．
因此共有 $2\times2\times1=4$ 個．

(3) 若正因數中是 2 的倍數者，則
a 可為 1，2；b 可為 0，1，2；c 可為 0，1．
因此共有 $2\times3\times2=12$ 個．

(4) 若正因數中是 2 的倍數但不是 3 的倍數者，則
a 可為 1，2；b 必為 0；c 可為 0，1．
因此共有 $2\times1\times2=4$ 個．

(5) 所有正因數的總和為

$$\left(2^0+2^1+2^2\right)\left(3^0+3^1+3^2\right)\left(5^0+5^1\right)=7\times13\times6=546\ .$$

【類題 13】

在 540 的正因數中，求

(1) 正因數有多少個?

(2) 是完全平方者有多少個?

(3) 是 2 的倍數者有多少個?

(4) 是 2 的倍數但不是 3 的倍數者有多少個?

(5) 所有正因數的總和．

Ans：(1) 24，(2) 4，(3) 16，(4) 4，(5) 1680

【詳解】

將 540 質因數分解得到 $540=2^2\times3^3\times5$．

(1) 因為 540 的正因數可寫成 $2^a\times3^b\times5^c$的形式，
其中 a 可為 0，1，2； b 可為 0，1，2，3； c 可為 0，1．
因此 540 的正因數有 $3\times4\times2=24$ 個．

(2) 若正因數中是完全平方者，則
a 可為 0，2； b 可為 0，2； c 必為 0．
因此共有 $2\times2\times1=4$ 個．

(3) 若正因數中是 2 的倍數者，則
a 可為 1，2； b 可為 0，1，2，3； c 可為 0，1．
因此共有 $2\times4\times2=16$ 個．

(4) 若正因數中是 2 的倍數但不是 3 的倍數者，則
a 可為 1，2； b 必為 0； c 可為 0，1．
因此共有 $2\times1\times2=4$ 個．

(5) 所有正因數的總和為

$$\left(2^0+2^1+2^2\right)\left(3^0+3^1+3^2+3^3\right)\left(5^0+5^1\right)=7\times40\times6=1680\ .$$

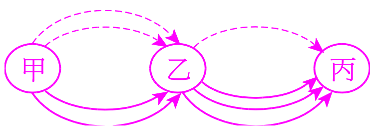
【例題 14】【配合課本例 10】

自甲地到乙地有電車路線 2 條，公車路線 2 條，自乙地到丙地有電車路線 1 條，公車路線 3 條．今自甲地經乙地再到丙地，若甲地到乙地與乙地到丙地兩次選擇的路線中，電車與公車路線各選一次，則共有多少種路線安排?

Ans：8

【詳解】

依題意圖示如下：



其中虛線表電車路線，實線表公車路線．

因爲電車與公車路線各選一次，

所以路線安排可分成以下二類：

(1) 先電車再公車：有 $2\times3=6$ 種路線．

(2) 先公車再電車：有 $2\times1=2$ 種路線．

故由加法原理得知，共有 $6+2=8$ 種路線．

【類題 14】

從甲地到乙地有 12 條道路，其中有 5 條雙向道，4 條由甲地到乙地的單行道，3 條由乙地到甲地的單行道．求從甲地到乙地再回到甲地，且去程與回程走不同的路，共有多少種路線安排．

Ans：67

【詳解】

分類如下：

(1) 甲到乙走雙向道：有 $5\times(4+3)=35$ 種路線．

(2) 甲到乙走單行道：有 $4\times(5+3)=32$ 種路線．

故由加法原理得知，共有 $35+32=67$ 種路線．

【例題 15】【常考題】

用 25 根相同的火柴棒，共可圍出幾個不全等的三角形?

Ans：16

【詳解】

設三邊的火柴棒數爲 a, b, c，且 $a\geq b\geq c$．

由三角形兩邊之和必大於第三邊，推得 $a\leq12$．

依 a 的值由大而小討論如下：

a	(b,c)	三角形個數
12	(12,1)，(11,2)，(10,3)，(9,4)，(8,5)，(7,6)	6
11	(11,3)，(10,4)，(9,5)，(8,6)，(7,7)	5
10	(10,5)，(9,6)，(8,7)	3
9	(9,7)，(8,8)	2

其中 a 值比 9 小不合．故共可圍出

$6+5+3+2=16$ 個不全等的三角形．

【類題 15】

三邊長爲整數，且周長爲 20 的不全等三角形共有多少個?

Ans：8

【詳解】

設三邊的邊長爲 a，b，c，且 a≧b≧c．
由三角形兩邊之和必大於第三邊，推得 a≦9．
依 a 的值由大而小討論如下：

a	(b,c)	三角形個數
9	(9,2)，(8,3)，(7,4)，(6,5)	4
8	(8,4)，(7,5)，(6,6)	3
7	(7,6)	1

其中 a 值比 7 小不合．
故共可圍出 4＋3＋2＝8 個不全等的三角形．

【例題 16】【常考題】

在1到1000的連續正整數中，
(1) 數字內含有5的數（如345，255等）共有多少個?
(2) 若一一寫出這1000個數，則共寫了多少個5?

Ans：(1) 271，(2) 300

【詳解】

(1) 依數字內含 5 的個數，分類如下：

① 恰含一個 5：

$\boxed{5}$，$\boxed{5}\boxed{\ }$，$\boxed{\ }\boxed{5}$，$\boxed{5}\boxed{\ }\boxed{\ }$，$\boxed{\ }\boxed{5}\boxed{\ }$，$\boxed{\ }\boxed{\ }\boxed{5}$

↑ ↑ ↑ ↑ ↑ ↑

1 個 9 個 8 個 9×9＝81 個 8×9＝72 個 8×9＝72 個

共有 1+9+8+81+ 72+ 72= 24個．

② 恰含二個 5：$\boxed{5}\boxed{5}$，$\boxed{5}\boxed{5}\boxed{\ }$，$\boxed{5}\boxed{\ }\boxed{5}$，$\boxed{\ }\boxed{5}\boxed{5}$

↑ ↑ ↑ ↑

1 個 9 個 9 個 8 個

共有 1＋9＋9＋8＝27 個．

③ 恰含三個 5：就$\boxed{5}\boxed{5}\boxed{5}$這 1 個．

故含有 5 的數共有 243＋27＋1＝271 個．

(2) 由(1)可得，共寫了 243× 1+ 27× 2+ 1× 3= 30個．

【類題 16】

若一一寫出1到1000的連續正整數，則共寫了多少個0？

Ans：192

【詳解】

依數字內含 0 個數分類如下：

(1) 恰含一個 0：

$\square\boxed{0}$ ， $\square\square\boxed{0}$ ， $\square\boxed{0}\square$

↑ ↑ ↑

9 個　$9\times 9=81$ 個　$9\times 9_{81}$ 個

共有 $9+81+81=171$ 個．

(2) 恰含二個 0：$\square\boxed{0}\boxed{0}$

↑

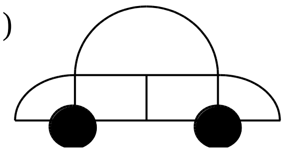
9 個

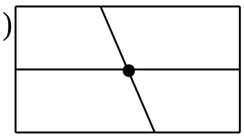
(3) 恰含三個 0：就 1000 這一個．

故共寫了 $171\times 1+9\times 2+1\times 3=192$ 個．

【例題 17】【常考題】

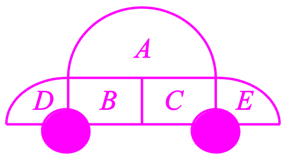
用黃、紅、藍、綠、紫等五種顏色塗下列各圖中的空白區域，每區域只塗一色，顏色可重複使用，但相鄰的區域不同顏色，各有多少種塗法?

(1)


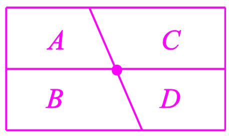
(2)


Ans：(1) 960，(2) 260

【詳解】



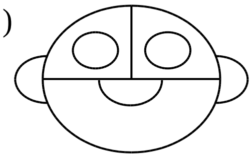
(1) 如圖，依 ABCDE 的順序著色．
根據題意，ABCDE 五個區域可著的顏色種類
分別為 5，4，3，4，4 種，
因此共有 $5\times 4\times 3\times 4\times 4=960$ 種塗法．

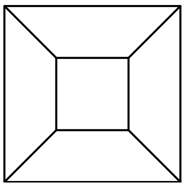


(2) 如圖，依 ABCDE 的順序著色．
根據題意，ABCDE 四個區域可著的顏色種類可分為
下列 2 種情形：
① 若 BC 同色，則 ABCD 四個區域可著的顏色種類
分別為 5，4，1，1 種，因此有 $5\times 4\times 1\times 1=80$ 種．
② 若 BC 異色，則 ABCD 四個區域可著的顏色種類
分別為 5，4，3，3 種，因此有 $5\times 4\times 3\times 3=180$ 種．
根據加法原理，共有 $80+180=260$ 種塗法．

【類題 17】

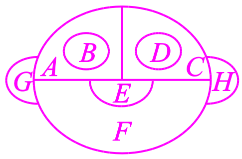
用 5 種不同顏色塗下列各圖中的空白區域，每區域只塗一色，顏色可重複使用，但相鄰的區域不同顏色，各有多少種塗法?

(1) 

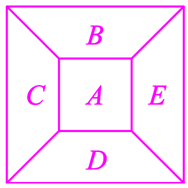
(2) 

Ans：(1) 17280，(2) 420

【詳解】



(1) 如圖，依 ABCDEFGH 的順序著色．
根據題意，abcdefgh 八個區域可著的顏色種類分別爲
5，4，4，4，3，2，3，3 種，
因此共有 $5\times4\times4\times4\times3\times2\times3\times3=17280$ 種塗法．



(2) 如圖，依 ABCDE 的順序著色．
根據題意，ABCDE 五個區域可著的顏色種類
可分爲下列 2 種情形：
① 若 BD 同色，則 ABCDE 五個區域可著的顏色種類分別爲
5，4，3，1，3 種，因此有 $5\times4\times3\times1\times3=180$ 種塗法．
② 若 BD 異色，則 ABCDE 五個區域可著的顏色種類分別爲
5，4，3，2，2 種，因此有 $5\times4\times3\times2\times2=240$ 種塗法．
根據加法原理，共有 $180+240=420$ 種塗法．

【例題 18】【配合課本例 11】

從 1 到 500 的正整數中，
(1) 是 3 的倍數或 5 的倍數者有多少個?
(2) 是 3 的倍數但不是 5 的倍數者有多少個?

Ans：(1) 233，(2) 133

【詳解】

設 A，B 分別是 1 到 500 的正整數中，
3 的倍數與 5 的倍數組成的集合．
(1) 利用取捨原理，得

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

$$=166+100-33=233\ .$$

故 3 的倍數或 5 的倍數者有 233 個．

(2) 所求 $=n(A)-n(A\cap B)=166-33=13$.

【類題 18】

老師規定全班 40 位同學，在校運期間大隊接力與趣味競賽兩個項目至少擇一參加．已知參加大隊接力的有 20 人，兩個項目都參加的有 10 人，求參加趣味競賽的有多少人?

Ans：30

【詳解】

設 A，B 分別是參加大隊接力與趣味競賽同學組成的集合．

利用取捨原理

$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$，得

$40=20+n(B)-10\Rightarrow n(B)=30$.

故參加趣味競賽的有 30 人．

【例題 19】【配合課本例 12】

班上共有 40 位同學，喜歡籃球的有 23 人，喜歡棒球的有 18 人，喜歡桌球的有 14 人；喜歡籃球與棒球的有 12 人，喜歡棒球與桌球的有 5 人，喜歡籃球與桌球的有 6 人；三種球類都喜歡的有 2 人．請問此班在三種球類中，

(1) 至少喜歡一種球類的有多少人?

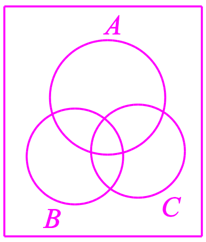
(2) 三種球類都不喜歡的有多少人?

(3) 喜歡籃球與棒球但不喜歡桌球的有多少人?

Ans：(1) 34，(2) 6，(3) 10

【詳解】

(1) 設 A，B，C 分別表示喜歡籃球，棒球，桌球的人組成的集合．利用取捨原理，得



$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)=23+18+14-12-5-6+2=34$.

故三種球類中，至少喜歡一種球類的有 34 人．

(2) 所求為 $40-34=6$（人）．

(3) 所求為 $n(A\cap B)-n(A\cap B\cap C)=12-2=10$（人）．

【類題 19】

在 1 到 100 的正整數中，

(1) 是 2, 3 和 7 中某一個數的倍數者共有多少個?

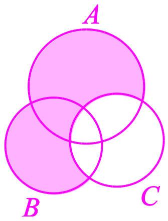
(2) 是 2 的倍數或 3 的倍數，但不是 7 的倍數者共有多少個?

Ans：(1) 72，(2) 58

【詳解】

設 A，B，C 分別表示 1 到 100 的正整數中分別爲 2，3，7 倍數的數組成的集合．

(1) 利用取捨原理，得所求爲



$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$$

$$+n(A\cap B\cap C)=50+33+14-16-4-7+2=72\ .$$

(2) 利用文氏圖，得所求爲

$$n(A\cup B)-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)$$

$$=(50+33-16)-7-4+2=58\ .$$

lt99ok221 重要精選考題

基礎題 ▶▶▶

1. 設集合 $A=\{1,\ 2\}$， $B=\{x\,|\,x^2+ax+b=0\}$， 且 $A=B$， 求實數 $a,\ b$ 的值．

Ans： $a=-3,\ b=2$

【詳解】
B：$(x-1)(x-2)=0$
$\Rightarrow x^2-3x+2=0$
$\Rightarrow a=-3$，$b=2$。

2. 設集合 $A=\{x\,|\,x^2-ax-4=0\}$， $B=\{x\,|\,x^2+ax+b=0\}$ 且 $A\cap B=\{1\}$，

求實數 $a,\ b$ 的值．

Ans： $a=-3,\ b=2$

【詳解】
$x^2-ax-4=0$，$x=1$ 代入
$\Rightarrow 1-a-4=0 \Rightarrow a=-3$。
$x^2+ax+b=0$
$\Rightarrow x^2-3x+b=0$，$x=1$ 代入
$\Rightarrow 1-3+b=0$
$\Rightarrow b=2$。

3. 已知 $U=\{-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ 為宇集，集合 $A=\{-2,\ -1,\ 0\}$， $B=\{0,1,2\}$ 為

U 的兩個子集，求 $A'\cap B$ ．

Ans：{1，2}

【詳解】
$A'=\{1，2\}$，
故 $A'\cap B=\{1，2\}$。

4. 設集合 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$， $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$，試問滿足 $A\subset C\subset B$ 的集合 C 有多少個?

Ans：4 個

【詳解】

滿足 $A\subset C\subset B$的集合 C 相當於{4，5}的子集合個數，有

{1，2，3}，{1，2，3，4}，{1，2，3，5}，{1，2，3，4，5}共 4 個。

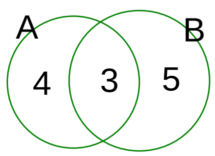
5. **已知** $n(A)=7,\ n(B)=8,\ n(A\cup B)=12$**，求** $n(A-B)$**的值．**

Ans：4

【詳解】

n(A∩B)＝n(A)＋n(B)－n(A∪B)＝7＋8－12＝3，

故 n(A－B)＝n(A)－n(A∩B)＝7－3＝4。



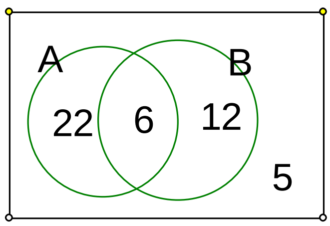
6. **老師出兩個習題給班上 45 人解，結果解出第一題的有 28 人，解出第二題的有 18 人，兩題都不會解的有 5 人，求**

(1) 兩題都解出來的有多少人?

(2) 只解出第二題的有多少人?

Ans：(1) 6 人，(2) 12 人

【詳解】



設 A 表解出第一題的人所組成的集合，

設 B 表解出第二題的人所組成的集合，

依題意知 n(A)＝28，n(B)＝18，n(A′∩B′)＝5，得

n(A∪B)＝45－5＝40，

根據迪摩根定律知

n(A∪B)＝n(A)＋n(B)－n(A∩B)，

⇒ 40＝28＋18－n(A∩B)

⇒ n(A∩B)＝6，

(1) 兩題都解出來的有 n(A∩B)＝6。

(2) 只解出第二題的有

n(B－A)＝n(B)－n(A∩B)＝18－6＝12。

7. **若數列** $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k,\ \cdots,\ a_{10}$ **中每一項皆為 1 或** -1**，則** $a_1+a_2+\cdots+a_k+\cdots+a_{10}$**之值有多少種可能?** **【99 學測】**

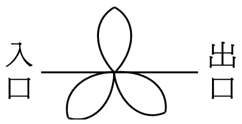
Ans：11 種

【詳解】

1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
值	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10

可能的值有 10，8，6，4，2，0，−2，−4，−6，−8，−10 共 11 種。

8. **右圖是科學館的參觀路線圖，若想不重複的走完每一個路徑，共有幾種不同的參觀路線?**



Ans：48 種

【詳解】
一開始有 6 個選擇，
回到出入口後有 4 個選擇，
最後有 2 個選擇，故有
$6\times4\times2=48$。

9. **小菱對穿著非常講究，某日出門前拿出不同的裙子 3 件、長褲 2 件、襯衫 5 件、褲襪 3 雙及短襪 3 雙．若裙子和長褲不同時穿，穿裙子時必穿褲襪，穿長褲時必穿短襪，則她的穿著有多少種不同的搭配方法?**

Ans：75 種

【詳解】
穿裙子時有 $3\times5\times3=45$ 種搭配，
穿長褲時有 $2\times5\times3=30$ 種搭配，
故共有 $45+30=75$ 種不同的搭配方法。

10. **有一個十字路口，規定不可迴轉，東西向可以左右轉，南北向不可以左轉，則在此路口共有多少種車流方向?**

Ans：10 種

【詳解】
東西向有 $3\times2=6$，
南北向有 $2\times2=4$，
故共有 $6+4=10$ 種車流方向。

11. **在 4200 的正因數中，求**

(1) 正因數有多少個?

(2) 是完全平方者有多少個?

(3) 是 15 的倍數者有多少個?

(4) 所有正因數的總和．

Ans：(1) 48 個，(2) 4 個，(3) 16 個，(4) 14880

【詳解】

$4200=2^3\times3\times5^2\times7=(2^2)\times(3^2)\times2\times3\times7$，

(1) 正因數有 $4\times2\times3\times2=48$ 個。

(2) $4200=(2^2)\times(3^2)\times2\times3\times7$，

完全平方者有 $2\times2=4$ 個。

(3) $4200=(3\times5)\times2^3\times5\times7$，故

15 的倍數者有 $4\times2\times2=16$ 個。

(4) 所有正因數的總和

$S=(1+2+4+8)(1+3)(1+5+25)(1+7)=14880$。

進階題 ▶▶▶

12. **若只使用 1000 元，500 元，100 元等三種紙鈔來支付 2000 元的費用，則共有多少種不同的支付方法?**

Ans：9 種

【詳解】

$1000x+500y+100z=2000$，即

$10x+5y+z=20$ 之非負整數解有

(0，0，20)，(0，1，15)，(0，2，10)，

(0，3，5)，(0，4，0)，(1，0，10)，

(1，1，5)，(1，2，0)，(2，0，0)，

共 9 種。

13. **教室有 4 個門，甲乙二人由不同的門進入再由不同的門出來，**

且不可由同一門進出，求共有多少種方法．

Ans：84 種

【詳解】

甲進，乙進，甲出，乙出，

$4\times3\times(1\times3+2\times2)=84$ 種走法。

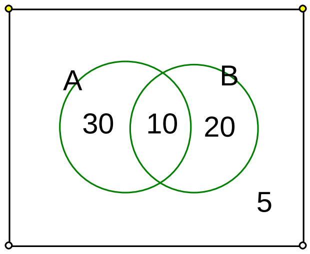
14. **設** U **為宇集，** A **與** B **為** U **的兩個子集．已知**

$n(A)=40,\ n(A'\cap B')=5,\ n(A'\cup B')=55,\ \ n(A\cup B)=60,$ **求下列各值：**

(1) $n(U)$**，(2)** $n(A\cap B)$**，(3)** $n(B)$**，(4)** $n(A'\cap B)$ **.**

Ans：(1) 65，(2) 10，(3) 30，(4) 20

【詳解】
如右圖，



(1) $n(U)=65$，

(2) $n(A\cap B)=10$，

(3) $n(B)=30$，

(4) $n(A'\cap B)=20$。

15. **三位正整數中，是 2 的倍數且是 3 的倍數，但不是 5 的倍數者，共有多少個?**
Ans：120 個

【詳解】
6 的倍數扣除 30 的倍數。

$$n=\left(\left[\frac{999}{6}\right]-\left[\frac{999}{30}\right]\right)-\left(\left[\frac{99}{6}\right]-\left[\frac{99}{30}\right]\right)$$

$=166-33-16+3=120$。

16. **在 1 到 1000 的正整數中，不能被** 2, 3, 4, 5, 6**整除者，共有多少個?**
Ans：266 個

【詳解】
2 或 3 或 5 的倍數有

$$\left[\frac{1000}{2}\right]+\left[\frac{1000}{3}\right]+\left[\frac{1000}{5}\right]-\left[\frac{1000}{6}\right]-\left[\frac{1000}{10}\right]-\left[\frac{1000}{15}\right]+\left[\frac{1000}{30}\right]$$

$=500+333+200-166-100-66+33=734$，
故不能被 2, 3, 4, 5, 整除者有 $1000-734=266$ 個。

17. **在**1**到** 200**的正整數中，與** 60**的最大公因數等於** 6**的數有多少個?**
Ans：14 個

【詳解】

6 的倍數共有 33 個。

在 1 到 33 中求與 10 互質者有

$\left[\frac{33}{2}\right]+\left[\frac{33}{5}\right]-\left[\frac{33}{10}\right]=16+6-3=19$，

故所求為 $33-19=14$ 個。