

選修數學

進階

講義

上

弧長與弧度與角度換算

大同高中·陳盈穎老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

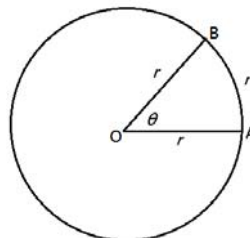
$\equiv$

16-1-1&2 弧長與弧度與角度換算

定理敘述

1. 弧度

如圖， $\angle AOB$ 為圓 O 上之一個圓心角，
若 $\widehat{AB}$ 弧長恰為半徑 r ，
則定義 $\angle AOB$ 的大小為 1 弧度 (radian)，
其中 $\angle AOB$ 的大小與半徑 r 無關。



2. 扇形的弧長

若一扇形的半徑為 r ，圓心角為 θ (弧度)，則其弧長 $s = r\theta$

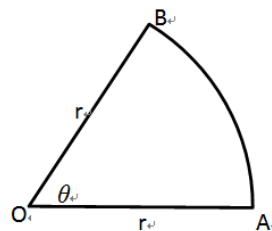
定理證明或說明

1. 若 $\widehat{AB}$ 弧長為 $2r$ ，則 $\angle AOB = 2$ 弧度；若 $\widehat{AB}$ 弧長為 $3r$ ，則 $\angle AOB = 3$ 弧度，若 $\angle AOB = 180^\circ$ ，則 $\widehat{AB}$ 弧長即為半圓弧長 πr ，故 $\angle AOB$ 的大小亦可視為 π 弧度，所以 $180^\circ = \pi$ (弧度)，因此，得以下表格：

弧度	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	2π
度	30°	45°	60°	90°	180°	360°

我們可進一步的推論出 $1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.01745$ 弧度， 1 弧度 $= \frac{180^\circ}{\pi} \approx 57.3^\circ$ 。其中 $\pi \approx 3.1416$ 即為我們熟知的圓周率。而在表示角度時，常省略弧度，故 $\angle AOB = \pi$ ，即代表 $\angle AOB = 180^\circ$ 。

2. 如圖， $\widehat{AB}$ 弧長 $s = 2\pi \cdot r \times \frac{\theta}{360^\circ}$ 其中圓心角 θ 的單位為度度量，可改寫為 $2\pi \cdot r \times \frac{\theta}{2\pi} = r\theta$ ，其中圓心角 θ 的單位為弧度量 $\therefore$ 弧長 $s = r\theta$ 。



關鍵字

弧度、弧長



注意事項

$$\pi^\circ \approx 3.1416^\circ \neq 180^\circ ; \sin 1 \approx \sin 57.3^\circ \neq \sin 1^\circ$$

例題 1

$57^\circ = x$ (弧度)，請問 x 之值為多少？

Ans : $\frac{57\pi}{180}$

解： $180^\circ = \pi$ (弧度) $\Rightarrow 57^\circ = \frac{57\pi}{180}$ (弧度)

例題 2

θ 為 -10 (弧度)之最小正同界角，則 $\theta =$ _____ 弧度。

Ans : $-10 + 4\pi$

解： $-4\pi < -10 < -3\pi \Rightarrow \theta = -10 + 4\pi$

例題 3

10 (弧度)為第 _____ 象限角。

Ans : 三

解：因為 $3\pi < 10 < 4\pi$ ，得 10 (弧度)為第三象限角

例題 4

設 $a = \sin(\pi^2)$ 、 $b = \cos(\pi^2)$ 、 $c = \tan(\pi^2)$ ，則 a 、 b 、 c 之大小順序為何？

Ans : $b < a < c$

解：因為 $\pi^2 \approx 3.14\pi$ 且 $3\pi \leq 3.14\pi \leq \frac{13}{4}\pi$ ，所以 π^2 為第三象限角

$$-1 < b < -\frac{\sqrt{2}}{2} < a < 0 < c, \text{ 故得 } b < a < c$$

例題 5

已知一圓半徑為 10，則當其圓心角為 $\frac{\pi}{6}$ 時，對應之弧長為_____

Ans : $\frac{5\pi}{3}$

解： $s = r\theta = 10 \times \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}$

例題 6

有一圓錐，其底圓半徑為 3，高為 4。將其側面展開為一扇形，請問此扇形之圓心角為_____弧度。

Ans : $\frac{6\pi}{5}$

解：由底圓半徑 3，高 4，得展開之扇形半徑為 5，弧長為 6π

又弧長 $s = r\theta$

$$\therefore 6\pi = 5\theta \Rightarrow \theta = \frac{6\pi}{5}$$



溫故知新

習題 1

將下列各角度數化為弧度：(1) 60° (2) 315° (3) -180°

習題 2

將下列各弧度化為度數：(1) $\frac{5\pi}{6}$ (2) $\frac{3\pi}{4}$ (3) -3π

習題 3

$50^\circ = x$ (弧度)，請問 x 之值為多少？

習題 4

θ 為 -3 (弧度) 之最小正同界角，則 $\theta =$ _____ 弧度。

習題 5

-10 (弧度) 為第 _____ 象限角。

習題 6

設 $a = \sin 2$ 、 $b = \cos 2$ ， $c = \tan 2$ ，則 a 、 b 、 c 之大小順序為何？

習題 7

已知一圓半徑為 5 ，當其圓心角為 x (弧度) 時，對應之弧長為 3 。試問 x 之值為？

習題 8

【學測 88】

有一輪子，半徑 50 公分，讓它在地上滾動 200 公分的長度，問輪子繞軸度。(度以下四捨五入)

習題 9

【學測 90】

兩條公路 k 及 m ，如果筆直延伸將交會於 C 處成 60° 夾角，如圖所示。為銜接此二公路，規劃在兩公路各距 C 處 450 公尺的 A 、 B 兩點間開拓成圓弧型公路，使 k, m 分別在 A, B 與此圓弧相切，則此圓弧長 _____ 公尺。(公尺以下四捨五入) 【 $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\pi \approx 3.142$ 】

習題 10

【學測 98】

令 $a = \cos(\pi^2)$ ，試問下列哪一個選項是對的？

(1) $a = -1$ (2) $-1 < a \leq -\frac{1}{2}$ (3) $-\frac{1}{2} < a \leq 0$ (4) $0 < a \leq \frac{1}{2}$ (5) $\frac{1}{2} < a \leq 1$



解答與解析

習題 1：(1) $\frac{\pi}{3}$ (2) $\frac{7\pi}{4}$ (3) $-\pi$

習題 2：(1) 150° (2) 135° (3) -540°

習題 3： $\frac{5\pi}{18}$

習題 4 : $-3 + \pi$

習題 5 : 一

習題 6 : $a > b > c$

習題 7 : $\frac{3}{5}$

習題 8 : 229

解：轉軸 $\frac{200}{50} = 4$ 弧度 $\approx 4 \times 57.3^\circ = 229.2^\circ$ ，故所求為 229

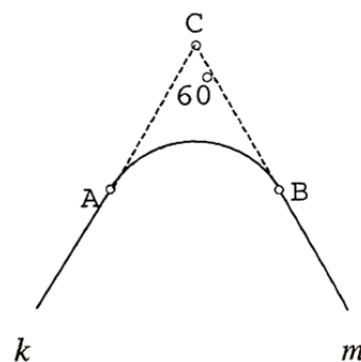
習題 9 : 544

解：設包含 $\widehat{AB}$ 之圓 C 的圓心為 O ，半徑 r

由 A 、 B 為切點，得 $\angle AOB = 120^\circ = \frac{2\pi}{3}$ (弧度)

$$\overline{AC} = 450 \Rightarrow r = \overline{OA} = \frac{450}{\sqrt{3}}$$

$$\widehat{AB} = r\theta = \frac{450}{\sqrt{3}} \times \frac{2\pi}{3} = 100\sqrt{3}\pi \approx 544，故所求為 544$$



習題 10 : (2)

解： $a = \cos(\pi^2) = \cos 3.14\pi = \cos 1.14\pi$

其中 $\pi \leq 1.14\pi \leq \frac{4}{3}\pi$ 為第三象限角，得 $-1 < a \leq -\frac{1}{2}$ ，故選(2)