



B3 4-1 因式分解一元二次方程式



概念 ① 一元二次方程式的意義

$$\begin{array}{c} \boxed{} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 2\boxed{x^2} + 3\boxed{x} + 1 = 0 \\ \uparrow \quad \quad \uparrow \\ \boxed{} \quad \boxed{} \end{array}$$

☆筆記

一元二次方程式就是化簡後可寫成_____

(其中_____)的形式。



牛刀小試 ①

1. 判斷下列各式是不是一元二次方程式，「是」的請畫○，「不是」的請畫×

☐ (1) $3x + 5 = 0$

☐ 一元(未知數)

☐ 二次(最高次方)

☐ 方程式(=)

☐ (2) $2x^2 + x = 7$

☐ 一元

☐ 二次

☐ 方程式

☐ (3) $x^2 - 1 = 0$

☐ 一元

☐ 二次

☐ 方程式

☐ (4) $5x^2 - 4x - 3 = 0$

☐ 一元

☐ 二次

☐ 方程式

☐ (5) $3x^2 - 4x + 5$

☐ 一元

☐ 二次

☐ 方程式

2. 判斷下列各式是不是一元二次方程式，「是」的請畫○，「不是」的請畫×

☐ (1) $3x - 2 = 0$

☐ (2) $x^2 - 5x = 0$

☐ (3) $3x^2 + 1 = 0$

☐ (4) $5x^2 - 6x - 7 = 0$

☐ (5) $3x^2 - 5x + 1$



例題 ① 判別一元二次方程式



判斷下列各式是不是一元二次方程式，「是」的請畫○，「不是」的請畫×，並請說明理由 ☆筆記

☐ (1) $2x+3=5$ 理由：_____

☐ (2) x^2+3x-5 理由：_____

☐ (3) $x^2=5$ 理由：_____

☐ (4) $(x-5)(2x+3)=0$ 理由：_____

☐ (5) $x^2+2x+3=(x-1)(x+2)$ 理由：_____



牛刀小試 2

1. 判斷下列各式是哪種式子，填入格子內。

(A)一元一次式 (B)一元一次方程式

(C)二元一次式 (D)二元一次方程式

(E)一元二次式 (F)一元二次方程式

(1) $3x-4$ 是 _____。

(2) $3x^2+4x+5$ 是 _____。

(3) $x-6y=5$ 是 _____。

(4) $3x-7=8$ 是 _____。

(5) $x+2y-5$ 是 _____。

(6) $3x^2+3=x+2$ 是 _____。

2. 試判斷下列各式是否為一元二次方程式，是的畫○，不是的畫×。

☐ (1) $5x-2x^2=9$

☐ (2) $(4x+1)(x-6)=5$

☐ (3) $(2x-4)(x+1)=2x^2-5x+9$

☐ (4) $3x^2=x$

☐ (5) $3x^2+3x+2=(x+2)(2x+1)$

☐ (6) $x^2=4y^2$



(1) $x=2$ ，計算 x^2 和 $-x^2$ 的值

☆筆記

(2) $x=-3$ ，計算 $3x^2$ 和 $-2x^2$ 的值

☆ 3×2^2 怎麼算？

1. 先算 $2^2=2 \times 2$ (自乘 2 遍)

2. 再乘數字 3

$$\begin{aligned} 3 \times 2^2 &= 3 \times (2 \times 2) \\ &= 3 \times 4 = 12 \end{aligned}$$



牛刀小試 3

1. $x=3$ ，計算下列各值

(1) x^2 的值

(2) $-x^2$ 的值

2. $x=-2$ ，計算

(1) $3x^2$ 的值

(2) $-2x^2$ 的值

3. $x=4$ ，計算下列各值

(1) x^2 的值

(2) $-x^2$ 的值

4. $x=-5$ ，計算

(1) $3x^2$ 的值

(2) $-2x^2$ 的值



概念

②

一元二次方程式的「解」或「根」



2 是否為一元二次方程式 $x^2 - 3x + 2 = 0$ 的解？

☆筆記

1. 將 x 用某數字 1、2... 代入方程式中
2. 「解」或「根」：
計算後的數值可使_____，
則某數字就稱方程式的「解或根」



牛刀小試 4

1. (1) 1 是不是方程式 $x^2 + 3x - 10 = 0$ 的解？

2. (1) 5 是否為方程式 $x^2 - 3x - 10 = 0$ 的解？

(2) 3 是不是方程式 $2x^2 - 3x - 9 = 0$ 的解？

(2) -2 是否為方程式 $4x^2 + 9x - 2 = 0$ 的解？

**例題****②****判別是不是解**

(1) -1 是不是方程式 $5x^2 + 3x - 2 = 0$ 的解？

☆筆記

(2) -2 是不是方程式 $(x-3)(x+2)=0$ 的解？

**牛刀小試 5**

1. (1) -7 是否為方程式 $(x+7)(3x+5)=0$ 的解？

(2) 2 是否為方程式 $(5x-2)(3x+5)=12$ 的解？

(3) 想想看，符合 $(\square+2) \times (\square-5)=0$ 則 $\square$ 可以填那些數？

$\square$ 內的數就是方程式的解

2. (1) 下列各數中，哪些是一元二次方程式 $x^2 - x = 6$ 的解？

- (A) $x=3$ (B) $x=1$
(C) $x=2$ (D) $x=-2$

答：_____。

(2) 下列各數中，哪些是一元二次方程式 $2x^2 - 2x = 12$ 的解？

- (A) $x=3$ (B) $x=1$
(C) $x=2$ (D) $x=-2$

答：_____。

(3) 由(1)(2)中，請問一元二次方程式 $x^2 - x = 6$ 和 $2x^2 - 2x = 12$ 的解是否相同？答：_____。



(1) $x-3=0$

(2) $2x+6=0$

☆筆記

(3) $3x-4=0$

(4) $-x+5=0$



牛刀小試 6

1. 解一元一次方程式

(1) $x-3=0$

(4) $3x-4=0$

(2) $x+4=0$

(5) $-x+5=0$

(3) $2x+6=0$

(6) $-x-4=0$



概念

③ $A \times B = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$



$$(x - 3)(x + 2) = 0$$

☆筆記

$A \times B = 0$ ，則_____。



牛刀小試 7

1. 解一元二次方程式

(1) $(x - 3)(x + 7) = 0$

(2) $(x - 2)(x + 11) = 0$

(3) $(x - 9)(x - 12) = 0$

2. 解一元二次方程式

(1) $(x - 4)(x + 5) = 0$

(2) $(x - 5)(x + 1) = 0$

(3) $(x - 8)(x - 4) = 0$

**例題****③** $A \times B = 0$ ，則 $A = 0$ 或 $B = 0$ 

(1) $x(3x-1)=0$

(2) $(2x-1)(2x+3)=0$

☆筆記

**牛刀小試 8****1. 解一元二次方程式**

(1) $x(x+2)=0$

(4) $(2x-4)(7x+14)=0$

(2) $x(2x+3)=0$

(5) $(8x-4)(10x+5)=0$

(3) $3x(4x-1)=0$

(6) $(3x-1)(3x+4)=0$



(1) $x^2 + x$

(2) $3x^2 - 5x$

☆筆記

(3) $x + 5x - 1 + (x - 2)(x - 1)$

(4) $(x - 2)^2 + 3(x - 2)$



牛刀小試 9

1. 利用提公因式作因式分解

(1) $x^2 - x$

(2) $5x^2 + 4x$

(3) $(x + 3)(x + 5) + (x - 2)(x + 5)$

(4) $(x + 6)(x - 3) + (x - 3)(x + 7)$

(5) $(x - 5)^2 + 2(x - 5)$

(6) $(2x - 3)^2 + 4(2x - 3)$



概念

④ 利用提公因式解一元二次方程式



$$x^2 - 3x = 0$$

☆筆記

將二次方程分

解成() () = 0

$$\begin{array}{c} \swarrow \quad \searrow \\ () = 0 \text{ 或 } () = 0 \end{array}$$


牛刀小試 10

1. 利用提公因式解一元二次方程式

(1) $x^2 + x = 0$

(2) $x^2 - x = 0$

(3) $x^2 + 4x = 0$

(4) $x^2 - 5x = 0$

2. 利用提公因式解一元二次方程式

(1) $x^2 + 8x = 0$

(2) $x^2 - 7x = 0$

(3) $x^2 + 9x = 0$

(4) $x^2 - 6x = 0$

**例題****4****利用提公因式解一元二次方程 (單項)**

(1) $3x^2 + 4x = 0$

(2) $x^2 - x = 0$

(3) $-x^2 + 6x = 0$

☆筆記

**牛刀小試 11****1. 解一元二次方程式**

(1) $3x^2 - 2x = 0$

(2) $4x^2 + 7x = 0$

(3) $9x^2 + 3x = 0$

(4) $8x^2 - 4x = 0$

(5) $-x^2 + 4x = 0$

(6) $-3x^2 + 8x = 0$



例題 5 利用提公因式解一元二次方程式 (多項)



(1) $(x+3)(2x+7)=(x+3)(x+1)$ (2) $(x-2)^2=3(x-2)$

☆筆記



牛刀小試 12

1. 解一元二次方程式

(1) $(2x+5)(x-2)=(x+2)(x-2)$
 移 $(2x+5)(x-2)-(x+2)(x-2)=0$
 提 $(x-2)[(2x+5)-(x+2)]=0$
 去 $(x-2)(2x+5-x-2)=0$
 併 $(x-2)(x+3)=0$
 算

(2) $(3x+7)(x-4)=(x+2)(x-4)$
 移
 提
 去
 併
 算

(3) $(2x+5)(x+1)=(x-7)(x+1)$
 移
 提
 去
 併
 算

2. 解一元二次方程式

(1) $(x-3)^2=5(x-3)$

(2) $(3x+2)^2=4(3x+2)$

(3) $(2x-3)^2+4(2x-3)=0$



溫故知新 ④ 運用十字交乘法作因式分解



(1) $x^2 + 8x + 7$

(2) $x^2 - 6x + 5$

☆筆記

(3) $2x^2 + 9x - 5$

(4) $3x^2 - 2x - 5$



牛刀小試 13

1. 運用十字交乘法作因式分解

(1) $x^2 + 8x + 7$

$$\begin{array}{r} x \quad \diagup \quad \square \\ x \quad \diagdown \quad \square \\ \hline \square x + \square x = 8x \end{array}$$

(2) $x^2 - 6x + 5$

$$\begin{array}{r} x \quad \diagup \quad \square \\ x \quad \diagdown \quad \square \\ \hline \square x + \square x = -6x \end{array}$$

(3) $x^2 + 8x - 9$

$$\begin{array}{r} x \quad \diagup \quad \square \\ x \quad \diagdown \quad \square \\ \hline \square x + \square x = 8x \end{array}$$

(4) $x^2 - 2x - 8$

$$\begin{array}{r} x \quad \diagup \quad \square \\ x \quad \diagdown \quad \square \\ \hline \square x + \square x = -2x \end{array}$$

(5) $2x^2 - 3x - 5$

$$\begin{array}{r} x \quad \diagup \quad \square \\ x \quad \diagdown \quad \square \\ \hline \square x + \square x = -3x \end{array}$$

(6) $3x^2 + 2x - 5$

$$\begin{array}{r} x \quad \diagup \quad \square \\ x \quad \diagdown \quad \square \\ \hline \square x + \square x = 2x \end{array}$$



$$x^2 - 3x + 2 = 0$$

☆筆記

因為沒有公因式，可利用十字交乘法分解成()()=0

再解一元一次方程式



牛刀小試 14

1. 利用十字交乘法解方程式

(1) $x^2 - 7x + 10 = 0$

(2) $x^2 + 7x + 12 = 0$

(3) $x^2 - 11x + 18 = 0$

2. 利用十字交乘法解方程式

(1) $x^2 - 4x - 21 = 0$

(2) $x^2 + 2x - 15 = 0$

(3) $x^2 - 5x - 24 = 0$

**例題****6****利用十字交乘法解一元二次方程式**

(1) $x^2 + 4x + 3 = 0$

(2) $3x^2 - 16x + 5 = 0$

(3) $3x^2 + 14x - 5 = 0$

☆筆記

**牛刀小試 15****1. 解一元二次方程式**

(1) $3x^2 + 8x + 5 = 0$

(2) $2x^2 + 11x + 15 = 0$

(3) $2x^2 - 13x + 21 = 0$

(4) $3x^2 - 10x + 8 = 0$

2. 解一元二次方程式

(1) $2x^2 + 5x - 7 = 0$

(2) $3x^2 + 7x - 20 = 0$

(3) $2x^2 - x - 6 = 0$

(4) $3x^2 - 5x - 2 = 0$



(1) $x^2 - 5^2$

(2) $4x^2 - 9$

☆筆記

(3) $x^2 + 4x + 2^2$

(4) $4x^2 - 12x + 9$



牛刀小試 16

1. 利用乘法公式作因式分解

(1) $x^2 - 4^2$

$$= (\quad + \quad) (\quad - \quad)$$

(2) $x^2 - 4$

$$= (\quad)^2 - (\quad)^2$$

$$= (\quad + \quad) (\quad - \quad)$$

(3) $49x^2 - 25$

$$= (\quad)^2 - (\quad)^2$$

$$= (\quad + \quad) (\quad - \quad)$$

(4) $x^2 + 18x + 9^2$

$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot (\quad) + 9^2$$

$$= (\quad)^2$$

(5) $x^2 + 6x + 9$

$$= x^2 + 2 \cdot x \cdot (\quad) + (\quad)^2$$

$$= (\quad)^2$$

(6) $9x^2 - 24x + 16$

$$= (\quad)^2 - 2 \cdot (\quad) \cdot (\quad) + (\quad)^2$$

$$= (\quad)^2$$



概念

⑥

利用乘法公式解一元二次方程式



$$\blacksquare x^2 - 4 = 0$$

$$\blacksquare x^2 - 4x + 4 = 0$$

☆平—平兩相加乘兩相減

$$1. ()^2 - ()^2 = [+ ()][- ()]$$

2. 有些二次方程式只看見一個根，因為是二次方程式，表示 2 個解是一樣的，為了強調有兩根，所以用「重根」。



牛刀小試 17

1. 利用乘法公式解一元二次方程式

$$(1) x^2 - 25 = 0$$

$$()^2 - ()^2 = 0$$

$$(\quad + \quad)(\quad - \quad) = 0$$

$$(2) x^2 - 9 = 0$$

$$(3) x^2 - 16 = 0$$

$$(4) x^2 - 81 = 0$$

2. 利用乘法公式解一元二次方程式

$$(1) x^2 + 14x + 49 = 0$$

$$x^2 + 2 \cdot x \cdot () + ()^2 = 0$$

$$(\quad)^2 = 0$$

$$x = (\quad) \text{ or } x = (\quad)$$

$$(2) x^2 + 16x + 64 = 0$$

$$(3) x^2 - 20x + 100 = 0$$

$$(4) x^2 - 12x + 36 = 0$$

**例題****7****利用乘法公式解一元二次方程式**

(1) $4x^2 - 9 = 0$

(2) $x^2 - 6x + 9 = 0$

(3) $16x^2 + 24x + 9 = 0$

☆筆記

**牛刀小試 18****1. 解一元二次方程式**

(1) $64x^2 - 9 = 0$

(2) $49x^2 - 16 = 0$

(3) $25x^2 - 121 = 0$

(4) $4x^2 - 25 = 0$

2. 解一元二次方程式

(1) $9x^2 + 24x + 16 = 0$

(2) $16x^2 + 56x + 49 = 0$

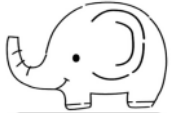
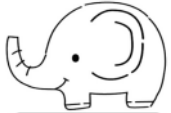
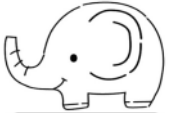
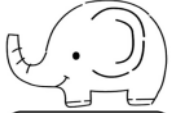
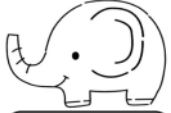
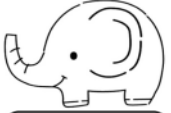
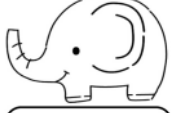
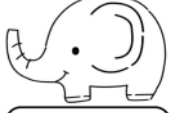
(3) $4x^2 - 4x + 1 = 0$

(4) $25x^2 - 20x + 4 = 0$

檢核區



1. 先解出方程式，將答案寫在象腿下的格子中，若答案一根是正整數請將大象著色。
2. 將著色後的大象連起來，形成一個數字，請寫下著色後的數字為_____。

$(2x-4)(2x+5)=0$  	$x^2-4x=0$  	$x(x-2)+3(x-2)=0$ 
$x^2+5x-6=0$  	$3x^2+11x+6=0$  	$2x^2+9x+7=0$ 
$x^2-7x-18=0$  	$3x^2-4x-4=0$  	$(x-4)(2x-7)=0$ 
$x^2-7x=0$  	$9x^2+12x+4=0$  	$x^2-25=0$ 
$5x^2-3x-14=0$  	$x^2-12x+20=0$  	$x^2-6x+9=0$ 



牛刀小試 1

- (1) ×
(2) ○
(3) ○
(4) ○
(5) ×
- (1) ×
(2) ○
(3) ○
(4) ○
(5) ×

牛刀小試 2

- (1) A
(2) E
(3) D
(4) B
(5) C
(6) F
- (1) ○
(2) ○
(3) ×
(4) ○
(5) ○
(6) ×

牛刀小試 3

- (1) 9 (2) -9
- (1) 12 (2) -8
- (1) 16 (2) -16
- (1) 75 (2) -50

牛刀小試 4

- (1) 不是
(2) 是
- (1) 是
(2) 不是

牛刀小試 5

- (1) 是
(2) 不是
(3) -2, 5
- (1) A、D
(2) A、D
(3) 是

牛刀小試 6

- (1) $x=3$
(2) $x=-4$
(3) $x=-3$
(4) $x=\frac{4}{3}$
(5) $x=5$
(6) $x=-4$

牛刀小試 14

牛刀小試 7

- (1) $x=3$ 或 $x=-7$
(2) $x=2$ 或 $x=-11$
(3) $x=9$ 或 $x=12$
- (1) $x=4$ 或 $x=-5$
(2) $x=5$ 或 $x=-1$
(3) $x=8$ 或 $x=4$

牛刀小試 8

- (1) $x=0$ 或 -2
(2) $x=0$ 或 $-\frac{3}{2}$
(3) $x=0$ 或 $\frac{1}{4}$
(4) $x=2$ 或 -2
(5) $x=\frac{1}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$
(6) $x=\frac{1}{3}$ 或 $-\frac{4}{3}$

牛刀小試 9

- (1) $x(x-1)$
(2) $x(5x+4)$
(3) $(2x+1)(x+5)$
(4) $(2x+13)(x-3)$
(5) $(x-3)(x-5)$
(6) $(2x+1)(2x-3)$

牛刀小試 10

- (1) $x=0$ 或 -1
(2) $x=0$ 或 1
(3) $x=0$ 或 -4
(4) $x=0$ 或 5
- (1) $x=0$ 或 -8
(2) $x=0$ 或 7
(3) $x=0$ 或 -9
(4) $x=0$ 或 6

牛刀小試 11

- (1) $x=0$ 或 $\frac{2}{3}$
(2) $x=0$ 或 $-\frac{7}{4}$
(3) $x=0$ 或 $-\frac{1}{3}$
(4) $x=0$ 或 $\frac{1}{2}$
(5) $x=0$ 或 4
(6) $x=0$ 或 $\frac{8}{3}$

牛刀小試 12

- (1) $x=2$ 或 -3
移 $(2x+5)(x-2)-(x+2)(x-2)=0$
提 $(x-2)[(2x+5)-(x+2)]=0$
去 $(x-2)(2x+5-x-2)=0$
併 $(x-2)(2x+5-x-2)=0$
(2) $x=4$ 或 $-\frac{5}{2}$
(3) $x=-1$ 或 -12
- (1) $x=3$ 或 8
(2) $x=-\frac{2}{3}$ 或 $\frac{2}{3}$
(3) $x=\frac{3}{2}$ 或 $-\frac{1}{2}$

牛刀小試 13

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad +1 \\ x \quad \quad \quad +7 \\ \hline 1x+7x=8x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad -1 \\ x \quad \quad \quad -5 \\ \hline (-1x)+(-5x)=-6x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad -1 \\ x \quad \quad \quad +9 \\ \hline (-1x)+9x=8x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad +2 \\ x \quad \quad \quad -4 \\ \hline +2x+(-4x)=-2x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad +1 \\ 2x \quad \quad \quad -5 \\ \hline +2x+(-5x)=-3x \end{array}$$

$$\begin{array}{r} x \quad \quad \quad -1 \\ 3x \quad \quad \quad +5 \\ \hline (-3x)+5x=2x \end{array}$$

1. (1) $x=2$ 或 5
 (2) $x=-3$ 或 -4
 (3) $x=2$ 或 9
2. (1) $x=-3$ 或 7
 (2) $x=3$ 或 -5
 (3) $x=-3$ 或 8

牛刀小試 15

1. (1) $x=-1$ 或 $-\frac{5}{3}$
 (2) $x=-3$ 或 $-\frac{5}{2}$
 (3) $x=3$ 或 $\frac{7}{2}$
 (4) $x=2$ 或 $\frac{4}{3}$
2. (1) $x=1$ 或 $-\frac{7}{2}$
 (2) $x=-4$ 或 $\frac{5}{3}$
 (3) $x=-\frac{3}{2}$ 或 2
 (4) $x=2$ 或 $-\frac{1}{3}$

牛刀小試 16

1. (1) x^2-4^2
 $= (x+4)(x-4)$
- (2) x^2-4
 $= (x)^2-(2)^2$
 $= (x+2)(x-2)$
- (3) $49x^2-25$
 $= (7x)^2-(5)^2$
 $= (7x+5)(7x-5)$
- (4) $x^2+18x+9^2$
 $= x^2+2 \cdot x \cdot (9) + 9^2$
 $= (x+9)^2$
- (5) x^2+6x+9
 $= x^2+2 \cdot x \cdot (3) + (3)^2$
 $= (x+3)^2$
- (6) $9x^2-24x+16$
 $= (3x)^2-2 \cdot (3x) \cdot (4) + (4)^2$
 $= (3x-4)^2$

牛刀小試 17

1. (1) $x=\pm 5$
 $(x)^2-(5)^2=0$
 $(x+5)(x-5)=0$
 (2) $x=\pm 3$
 (3) $x=\pm 4$
 (4) $x=\pm 9$
2. (1) $x=-7$ (重根)
 $x^2+2 \cdot x \cdot (7) + (7)^2=0$
 $(x+7)^2=0$
 $x=(-7)$ or $x=(-7)$

(2) $x = -8$ (重根)

(3) $x = 10$ (重根)

(4) $x = 6$ (重根)

牛刀小試 18

1. (1) $x = \pm \frac{3}{8}$

(2) $x = \pm \frac{4}{7}$

(3) $x = \pm \frac{11}{5}$

(4) $x = \pm \frac{5}{2}$

2. (1) $x = -\frac{4}{3}$ (重根)

(2) $x = -\frac{7}{4}$ (重根)

(3) $x = \frac{1}{2}$ (重根)

(4) $x = \frac{2}{5}$ (重根)

檢核區

1.

$x = 2$ 或 $-\frac{5}{2}$	$x = 0$ 或 4	$x = -3$ 或 2
$x = -6$ 或 1	$x = -3$ 或 $-\frac{2}{3}$	$x = -1$ 或 $-\frac{7}{2}$
$x = -2$ 或 9	$x = -\frac{2}{3}$ 或 2	$x = 4$ 或 $\frac{7}{2}$
$x = 0$ 或 7	$x = -\frac{2}{3}$ (重根)	$x = \pm 5$
$x = -\frac{7}{5}$ 或 2	$x = 2$ 或 10	$x = 3$ (重根)

2. 6