高中數學 進階講義

平面上的線性變換與二階方陣

陳清海 老師

信望愛文教基金會

lt99ok434 平面上的線性變換與二階方陣

主題一、平面上的線性變換

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$．在坐標平面上，當點 $P(x, y)$ 依關係式

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

變換成點 $P'(x', y')$ 時，我們稱二階方陣 A 將點 $P(x, y)$ 作線性變換到點 $P'(x', y')$，而點 $P'(x', y')$ 稱為點 $P(x, y)$ 的對應點．

【例題 1】【配合課本例 1】

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$．

(1) 求點 $P(2，-1)$經過 A 作線性變換後所對應之點 P'的坐標．

(2) 求一點 Q，使得它經過 A作線性變換後的對應點爲 $Q'(-1，2)$．

Ans：(1) (–1，0)，(2) (5，–2)

【詳解】

(1) 因爲$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$，所以點 P'的坐標爲(–1，0)．

(2) 設 Q 的坐標爲$(x，y)$．因爲$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}$，

所以$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ -2\end{bmatrix}$．

故 Q 的坐標爲(5，–2)．

【類題 1】

設二階方陣 $A=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$．

(1) 求點 $P(-1，2)$經過 A作線性變換後所對應之點 P'的坐標．

(2) 求一點 Q，使得它經過 A 作線性變換後的對應點爲 $Q'(3，2)$．

Ans：(1) (5，8)，(2) (–9，4)

【詳解】

(1) 因爲$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\ 8\end{bmatrix}$，所以點 P'的坐標爲(5，8)．

(2) 設 Q 的坐標爲$(x，y)$．因爲$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}$，

所以$\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-9\\ 4\end{bmatrix}$．

故 Q 的坐標爲(–9，4)．

【例題 2】【配合課本例 2】

已知點 $P(8，5)$與 $Q(3，2)$經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別爲 $P'(1，2)$與 $Q'(-1，1)$，求二階方陣 A．

Ans：$\begin{bmatrix}7 & -11\\ -1 & 2\end{bmatrix}$

【詳解】

設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$．依題意，可列得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

將上列 2 式合併寫成

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

故二階方陣 A 為

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 8 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 7 & -11 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

【類題 2】

已知點 $P(6，5)$與 $Q(7，6)$經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為 $P'(1，3)$與 $Q'(4，1)$，求二階方陣 A．

Ans：$\begin{bmatrix} -14 & 17 \\ 13 & -15 \end{bmatrix}$

【詳解】

設 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$．依題意，可列得

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 \\ 5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 \\ 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

將上列 2 式合併寫成

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

故二階方陣 A 為

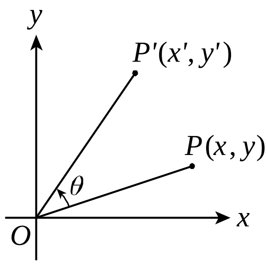
$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 7 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1}\begin{bmatrix} 6 & -7 \\ -5 & 6 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -14 & 17 \\ 13 & -15 \end{bmatrix}.$$

主題二、旋轉的矩陣表示

在坐標平面上，若以原點O爲中心，將點$P(x,y)$依逆時針方向旋轉θ角後得點$P'(x',y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

並稱矩陣$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$爲旋轉矩陣 .



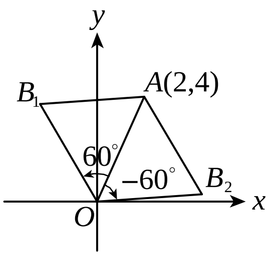
【例題 3】【配合課本例 3】

已知正三角形 OAB 二頂點坐標為 $O(0，0)$，$A(2，4)$，求頂點 B 的坐標．

Ans：$(1-2\sqrt{3}，2+\sqrt{3})$或$(1+2\sqrt{3}，2-\sqrt{3})$

【詳解】

如下圖，B 點有二解，



其一是將 A 以 O 為中心旋轉 $60°$，得點 B_1；

其二是將 A 以 O 為中心旋轉 $-60°$，得點 B_2．

利用旋轉的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix} \cos 60° & -\sin 60° \\ \sin 60° & \cos 60° \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1-2\sqrt{3} \\ 2+\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} \cos(-60°) & -\sin(-60°) \\ \sin(-60°) & \cos(-60°) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1+2\sqrt{3} \\ 2-\sqrt{3} \end{bmatrix},$$

得 B_1 的坐標為 $(1-2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3}$,

B_2 的坐標為 $(1+2\sqrt{3}, 2-\sqrt{3}$.

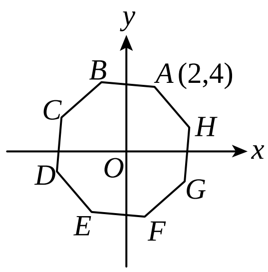
故頂點 B 的坐標為

$(1-2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$ 或 $(1+2\sqrt{3}, 2-\sqrt{3})$ ．

【類題 3】

如下圖，已知中心為原點 O 的正八邊形之一個頂點為 $A(2，4)$，

求此正八邊形的另二個頂點 D 與 G 的坐標．



Ans：$D(-3\sqrt{2}$，$-\sqrt{2})$，$G(4$，$-2)$

【詳解】

將 A 以 O 為中心旋轉 135°，得點 D；

將 A 以 O 為中心旋轉 270°，得點 G．

利用旋轉的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix}\cos 135^\circ & -\sin 135^\circ \\ \sin 135^\circ & \cos 135^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\sqrt{2}\\-\sqrt{2}\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}\cos 270^\circ & -\sin 270^\circ \\ \sin 270^\circ & \cos 270^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ -1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\-2\end{bmatrix},$$

得 $D(-3\sqrt{2},-\sqrt{2})$，$G(4$，$-2)$．

【例題 4】【常考題】

(1) 已知 $A_\theta=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$，**求證：$A_\alpha A_\beta = A_{\alpha+\beta}$．**

(2) 化簡 $\begin{bmatrix}\cos 53^\circ & -\sin 53^\circ \\ \sin 53^\circ & \cos 53^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 37^\circ & -\sin 37^\circ \\ \sin 37^\circ & \cos 37^\circ\end{bmatrix}$．

Ans：(1) 見解析，(2) $\begin{bmatrix}0 & -1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}$

【詳解】

(1) $A_\alpha A_\beta=\begin{bmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\beta & -\sin\beta \\ \sin\beta & \cos\beta\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta & -\cos\alpha\sin\beta-\sin\alpha\cos\beta \\ \sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta & -\sin\alpha\sin\beta+\cos\alpha\cos\beta\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(\alpha+\beta) & -\sin(\alpha+\beta) \\ \sin(\alpha+\beta) & \cos(\alpha+\beta)\end{bmatrix}=A_{\alpha+\beta},$$

故得證．

(2) 利用(1)的結果，得

$$原式=\begin{bmatrix}\cos(53^\circ+37^\circ) & -\sin(53^\circ+37^\circ)\\ \sin(53^\circ+37^\circ) & \cos(53^\circ+37^\circ)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & -\sin 90^\circ\\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}.$$

【類題 4】

化簡 $\begin{bmatrix}\cos 28^\circ & \sin 28^\circ\\ -\sin 28^\circ & \cos 28^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 17^\circ & \sin 17^\circ\\ -\sin 17^\circ & \cos 17^\circ\end{bmatrix}$.

Ans： $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$

【詳解】

$$原式=\begin{bmatrix}\cos(-28^\circ) & -\sin(-28^\circ)\\ \sin(-28^\circ) & \cos(-28^\circ)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos(-17^\circ) & -\sin(-17^\circ)\\ \sin(-17^\circ) & \cos(-17^\circ)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(-45^\circ) & -\sin(-45^\circ)\\ \sin(-45^\circ) & \cos(-45^\circ)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}.$$

【例題 5】【常考題】

已知 $0^\circ<\theta<180^\circ$ 滿足 $A=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$**，且** $A^4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$**，求 θ.**

Ans：90°

【詳解】

由旋轉矩陣的幾何意義，可推得

$$A^4=\begin{bmatrix}\cos 4\theta & -\sin 4\theta\\ \sin 4\theta & \cos 4\theta\end{bmatrix}.$$

因為 $A^4=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，所以 $\cos 4\theta=1$，$\sin 4\theta=0$.

又 $0^\circ<4\theta<720^\circ$，故 $4\theta=360^\circ \Rightarrow \theta=90^\circ$.

【類題 5】

已知 $A=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ \sqrt{3} & 1\end{bmatrix}$**，求** $\boldsymbol{A^6}$ **.**

Ans：$\begin{bmatrix}64 & 0\\ 0 & 64\end{bmatrix}$

【詳解】

將矩陣 A 改寫為

$A=2\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}=2\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & -\sin 60^\circ\\ \sin 60^\circ & \cos 60^\circ\end{bmatrix}$．因此，

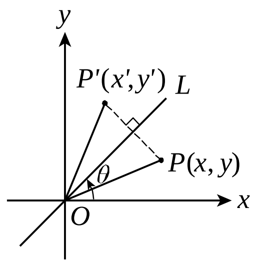
$A^6=2^6\begin{bmatrix}\cos 360^\circ & -\sin 360^\circ\\ \sin 360^\circ & \cos 360^\circ\end{bmatrix}=64\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}64 & 0\\ 0 & 64\end{bmatrix}$．

主題三、鏡射的矩陣表示

在坐標平面上，L是過原點且與x軸正向夾角為θ的直線，若點$P\left(x,y\right)$對直線L鏡射得點$P'\left(x',y'\right)$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

並稱矩陣$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$為鏡射矩陣．



【例題 6】【配合課本例 4】

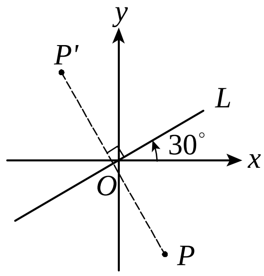
已知直線 $L:y=\frac{1}{\sqrt{3}}x$，求點 $P(2，-4)$對於直線 L 的對稱點 P'的坐標．

Ans：$(1-2\sqrt{3}，2+\sqrt{3})$

【詳解】

因為 L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 30°的直線，

所以利用鏡射的矩陣表示，計算



$$\begin{bmatrix}\cos 60° & \sin 60°\\ \sin 60° & -\cos 60°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2\sqrt{3}\\2+\sqrt{3}\end{bmatrix},$$

得對稱點 P'的坐標為 $(1-2\sqrt{3}, 2+\sqrt{3})$．

【類題 6】

已知直線 L：$y=-x$，求點 $P(3，2)$對直線 L 鏡射之對應點 P'的坐標．

Ans：$(-2，-3)$

【詳解】

因為 L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 135°的直線，

所以利用鏡射的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix}\cos 270° & \sin 270°\\ \sin 270° & -\cos 270°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & -1\\-1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\-3\end{bmatrix},$$

得對稱點 P'的坐標為$(-2，-3)$．

【例題 7】【配合課本內文】

寫出下列各直線為鏡射軸的鏡射矩陣：

(1) 直線 $y=x$．　(2) x 軸．　(3) y 軸．

Ans：(1) $\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$，(2) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$，(3) $\begin{bmatrix}-1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$

【詳解】

因為 $y=x$，x 軸與 y 軸分別是過原點且與

x 軸正向夾角為 45°，0°與 90°的直線，所以

(1) 鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix}\cos 90° & \sin 90°\\ \sin 90° & -\cos 90°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}$．

(2) 鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & -\cos 0^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(3) 鏡射矩陣為 $\begin{bmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & -\cos 180^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

【類題 7】

利用鏡射矩陣，求點 P(3，2)對於下列直線的對稱點坐標：

(1) 直線 $y=x$． (2) x 軸． (3)y 軸．

Ans：(1) (2，3)，(2) (3，−2)，(3) (−3，2)

【詳解】

(1) 因為 $\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，

所以對稱點坐標為(2，3)．

(2) 因為 $\begin{bmatrix} \cos 0^\circ & \sin 0^\circ \\ \sin 0^\circ & -\cos 0^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$，

所以對稱點坐標為(3，−2)．

(3) 因為 $\begin{bmatrix} \cos 180^\circ & \sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & -\cos 180^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \end{bmatrix}$，

所以對稱點坐標為(−3，2)．

【例題 8】【常考題】

已知二階方陣 ***A***，***B*** 滿足 ***A*** 在平面上的作用是對直線 $L: y=-\sqrt{3}x$ 的鏡射，

且 $AB=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$．選出正確的選項：

(1) *AB*＝*BA*，(2) *A*＋*B*＝*O*，(3) 方陣 *B* 所對應的平面變換為旋轉，

(4) − *A* 是 *B* 的反方陣．

Ans：(1)(2)(4)

【詳解】

因為 L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 120°的直線，所以

$$A=\begin{bmatrix} \cos 240^\circ & \sin 240^\circ \\ \sin 240^\circ & -\cos 240^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$

因為 $AB=\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$，所以

$$B=A^{-1}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\end{bmatrix}=-A\ .$$

(1) $AB=A(-A)=(-A)A=BA$.

(2) $A+B=A+(-A)=O$.

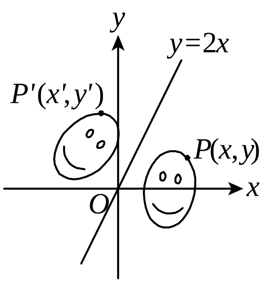
(3) 因爲方陣 B 不能寫成 $\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}$ 的形式，所以不是旋轉矩陣 .

(4) 因爲 $B^{-1}=\frac{1}{-1}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\-\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}=-A$，所以 $-A$ 是 B 的反方陣 .

故選(1)(2)(4) .

【類題 8】

如下圖，直線 $y=2x$ 爲兩圖形的對稱軸，即對圖形上每一個坐標 (x,y)，存在一個方陣 $\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}$，使得 $\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$，求 a，b，c，d 的值 .



Ans：$a=-3$，$b=4$，$c=4$，$d=3$

【詳解】

因爲 L 是過原點且與 x 軸正向夾角爲 θ 的直線，

其中 $\tan\theta=2$，所以

$$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=2\times\frac{2}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5},$$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1=2(\frac{1}{\sqrt{5}})^2-1=-\frac{3}{5}\ .$$

因此，$\frac{1}{5}\begin{bmatrix}a&b\\c&d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos 2\theta&\sin 2\theta\\\sin 2\theta&-\cos 2\theta\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\\\frac{4}{5}&\frac{3}{5}\end{bmatrix}$.

解得 $a=-3$，$b=4$，$c=4$，$d=3$.

主題四、伸縮的矩陣表示

在坐標平面上，若以原點 O 爲中心，將點 $P(x, y)$ 沿著 x 軸方向伸縮 h 倍

（ $h>0$ ），沿著 y 軸方向伸縮 k 倍（ $k>0$ ），得點 $P'(x', y')$，則

$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

並稱矩陣 $\begin{bmatrix} h & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$ 爲伸縮矩陣 .

【例題 9】【配合課本例 5】

已知正方形 $ABCD$ 四頂點坐標為 $A(2,2)$，$B(-2，2)$，$C(-2，-2)$，$D(2，-2)$．

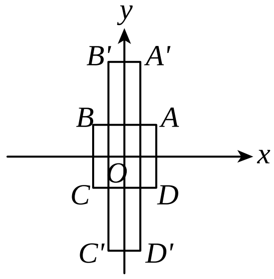
將此四個頂點分別以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍，沿著 y 軸方向伸縮 3 倍，得 A'，B'，C'，D'四點，求四邊形 $A'B'C'D'$的面積．

Ans：(2)(4)

【詳解】

在伸縮的矩陣表示中，代入 $A(2,2)$，

得 $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$，即 $A'(1，6)$．



同樣的方法，可得

$B'(-1，6)$，$C'(-1，-6)$，$D'(1，-6)$．

因為四邊形 $A'B'C'D'$是長為 2 寬為 12 的矩形，

所以其面積為 $2\times12=24$．

【類題 9】

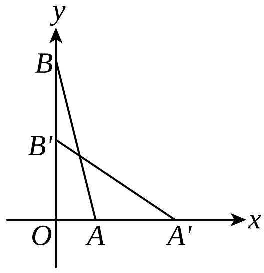
已知直角三角形 OAB 的三頂點坐標為 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(0,4)$，
將此三個頂點分別以原點 O 為中心，沿著 x 軸方向伸縮 3 倍，
沿著 y 軸方向伸縮 $\frac{1}{2}$ 倍，得 O'，A'，B'三點，求△ $O'A'B'$的面積．

Ans：3

【詳解】

在伸縮的矩陣表示中，代入 $A(1,0)$，

得 $\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}$，即 $A'(3,0)$．



同樣的方法，可得 $B'(0,2)$，$O'(0,0)$，

即 O 點的對應點是自己本身．

因為△ $O'A'B'$是底為 3 高為 2 的三角形，

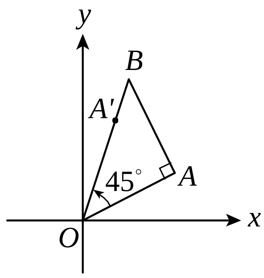
所以其面積為 $\frac{3\times2}{2}=3$．

【例題 10】【配合課本例 6】

在坐標平面上，等腰直角三角形 OAB 滿足 $\angle A=90°$，$O(0，0)$，$A(4，2)$，B 在第一象限，求 B 的坐標．

Ans：(2，6)

【詳解】



如下圖，先將 A 以 O 爲中心旋轉 45°，得點 A'；
再將 A'以 O 爲中心，沿著 x 軸及 y 軸方向皆伸縮 $\sqrt{2}$ 倍，
就可得 B 點．
利用旋轉及伸縮的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 45° & -\sin 45°\\ \sin 45° & \cos 45°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & \sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 3\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 6\end{bmatrix},$$

得 B 的坐標爲(2，6)．

【類題 10】

在坐標平面上，已知矩形 $OABC$ 滿足 $\overline{OA}:\overline{OC}=1:\sqrt{3}$，且

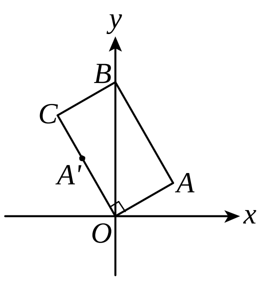
$O(0，0)$，$A(\sqrt{3}\ ,1)$，B 與 C 均在 x 軸的上方，求

(1) C 的坐標．
(2) B 的坐標．

Ans：(1) $(-\sqrt{3},3)$ ，(2) (0，4)

【詳解】

(1) 如下圖，先將 A 以 O 爲中心旋轉 90°，得點 A'；



再將 A'以 O 爲中心，沿著 x 軸及 y 軸方向皆伸縮 $\sqrt{3}$ 倍，就可得 C 點．
利用旋轉及伸縮的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\ 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0\\ 0 & \sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ \sqrt{3}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{3}\\ 3\end{bmatrix},$$

得 C 的坐標爲 $(-\sqrt{3},3)$．

(2) 因爲 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(\sqrt{3},1)+(-\sqrt{3},3)=(0,,$

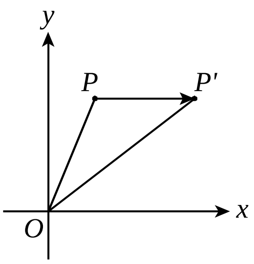
所以 B 的坐標爲(0，4)．

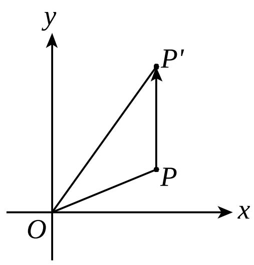
主題五、推移的矩陣表示

1. 沿 x 軸：在坐標平面上，若將點 $P(x,y)$ 沿 x 軸推移 y 坐標的 k 倍，

得點 $P'(x',y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+ky \\ y \end{bmatrix}.$$





2. 沿 y 軸：在坐標平面上，若將點 $P(x,y)$ 沿 y 軸推移 x 坐標的 k 倍，

得點 $P'(x',y')$，則

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ kx+y \end{bmatrix}.$$

【例題 11】【配合課本例 7】

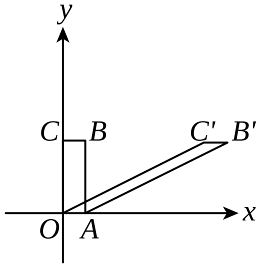
設四邊形 $OABC$ 的四頂點坐標爲 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,3)$，$C(0,3)$．
將此四個頂點分別沿 x 軸推移 y 坐標 2 倍，得 O'，A'，B'，C'四點，
求四邊形 $O'A'B'C'$的面積．

Ans：3

【詳解】

在推移的矩陣表示中，代入 $C(0,3)$，

得 $\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\3\end{bmatrix}$，即 $C'(6,3)$．



同樣的方法，可得 $O'(0,0)$，$A'(1,0)$，$B'(7,3)$，
即 O 與 A 兩點的對應點是自己本身．
因爲四邊形 $O'A'B'C'$是底爲 1 高爲 3 的平行四邊形，
所以其面積爲 $1\times 3=3$．

【類題 11】

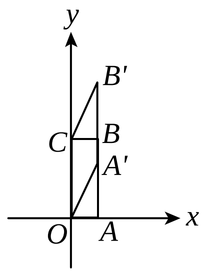
設四邊形 $OABC$ 的四頂點坐標爲 $O(0,0)$，$A(1,0)$，$B(1,3)$，$C(0,3)$．
將此四個頂點分別沿 y 軸推移 x 坐標 2 倍，得 O'，A'，B'，C'四點，
則四邊形 $O'A'B'C'$的面積爲何?

Ans：3

【詳解】

在推移的矩陣表示中，代入 $A(1,0)$，

得 $\begin{bmatrix}1 & 0\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$，即 $A'(1,2)$．



同樣的方法，可得 $O'(0,0)$，$B'(1,5)$，$C'(0,3)$，
即 O 與 C 兩點的對應點是自己本身．
因爲四邊形 $O'A'B'C'$是底爲 3 高爲 1 的平行四邊形，
所以其面積爲 $3\times 1=3$．

主題六、線性變換的面積比公式

在坐標平面上，設$\triangle ABC$經線性變換$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$後成$\triangle A'B'C'$．若

$\triangle ABC$的面積爲Δ，$\triangle A'B'C'$的面積爲Δ'，則

$\Delta'=\left|\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\right|\cdot\Delta$．

【例題 12】【配合課本例 8】

已知二階方陣 $M=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，$\Delta ABC$ 的三頂點坐標為 $A(2，0)$，$B(3，-1)$，$C(-2，1)$，且 ΔABC 經二階方陣 M 線性變換後成 $\Delta A'B'C'$，求 $\Delta A'B'C'$ 的面積．

Ans：15

【詳解】

因為向量 $\overrightarrow{AB}=(1,-1)$，$\overrightarrow{AC}=(-4,1)$，所以 ΔABC 的面積為

$$\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}1 & -1\\ -4 & 1\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|-3|=\frac{3}{2}\ .$$

利用線性變換的面積比公式，得 $\Delta A'B'C'$ 的面積為

$$\left|\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 2 & 4\end{vmatrix}\right|\cdot\Delta ABC\text{ 的面積}=|-10|\frac{3}{2}=15\ .$$

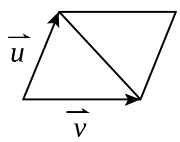
【類題 12】

已知二階方陣 $M=\begin{bmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\end{bmatrix}$，向量 $\overrightarrow{u}=(3,2)$，$\overrightarrow{v}=(4,1)$，求以 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 所張出的平行四邊形經二階方陣 M 線性變換後的四邊形面積．

Ans：35

【詳解】

因為以 $\overrightarrow{u}$，$\overrightarrow{v}$ 所張出的平行四邊形面積為



$$\left|\begin{vmatrix}3 & 2\\ 4 & 1\end{vmatrix}\right|=|-5|=5\ ,$$

且平行四邊形可由兩個全等三角形組成（如右圖），
所以線性變換後的四邊形面積為

$$\left|\begin{vmatrix}5 & 4\\ 3 & 1\end{vmatrix}\right|\cdot 5=|-7|\cdot 5=35\ .$$

重要精選考題

基礎題

1. 已知二階方陣 $A=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}$．

(1) 求點 $P(1，2)$經過 A 作線性變換後所對應之點 P'的坐標．

(2) 求一點 Q，使得它經過 A 作線性變換後的對應點為 $Q'(1，-1)$．

Ans：(1) (−1，0)，(2) (2，3)

【詳解】

(1) 因為 $\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\ 0\end{bmatrix}$，

所以點 P'的坐標為$(-1，0)$．

(2) 設 Q 的坐標為(x,y)．因為 $\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$，

所以 $\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5 & -3\\ -2 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\dfrac{1}{-1}\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ 3\end{bmatrix}$．

故 Q 的坐標為$(2，3)$．

2. 已知點 $P(2,1)$與 $Q(-1，2)$經過二階方陣 A 作線性變換後所對應的點分別為 $P'(4，10)$與 $Q'(3，5)$，求二階方陣 A．

Ans：$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}$

【詳解】

設 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$．依題意，可列得

$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 10\end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\ 5\end{bmatrix}$．

將上列 2 式合併寫成 $\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 10 & 5\end{bmatrix}$．

故二階方陣 A 為

$$\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 10 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 10 & 5\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}.$$

3. **將點 *P*(2,0)分別作下列各變換，求變換後的點坐標：**

(1) 以原點爲中心旋轉 30°．

(2) 對直線 $x-\sqrt{3}y=0$ 鏡射．

(3) 以原點爲中心，沿著 *x* 軸方向伸縮 2 倍，沿著 *y* 軸方向伸縮 3 倍．

(4) 沿 *y* 軸推移 *x* 坐標的 $\frac{1}{2}$ 倍．

Ans：(1) ($\sqrt{3}$，1)，(2) (1，$\sqrt{3}$)，(3) (4，0)，(4) (2，,1)

【詳解】

(1) 因爲 $\begin{bmatrix}\cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\sqrt{3}\\1\end{bmatrix}$,

所以變換後的點坐標爲($\sqrt{3}$，1)．

(2) 因爲直線是過原點且與 x 軸正向夾角爲 30°的直線，

所以利用鏡射的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix}\cos 60^\circ & \sin 60^\circ \\ \sin 60^\circ & -\cos 60^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\\sqrt{3}\end{bmatrix},$$

得變換後的點坐標爲$(1,\sqrt{3})$．

(3) 因爲 $\begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$,

所以變換後的點坐標爲(4,0)．

(4) 因爲 $\begin{bmatrix}1 & 0\\\frac{1}{2} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$，所以變換後的點坐標爲(2，1)．

4. **已知矩形 *OABC* 的二個頂點 *O*(0，0)，*A*(3，4)，$\overline{AB}=1$，且 *C* 在第二象限，求**

(1) *C* 的坐標．

(2) *B* 的坐標．

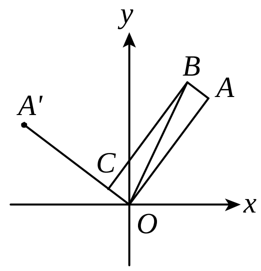
Ans：(1) $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$，(2) $(\frac{11}{5},\frac{23}{5})$

【詳解】

(1) 如右圖，因爲 $\overline{OA}=5$，$\overline{OC}=1$，

所以先將 A 以 O 爲中心旋轉 90°，得點 A'；

再將 A'以 O 為中心，



沿著 x 軸及 y 軸方向皆伸縮 $\frac{1}{5}$ 倍，就可得 C 點．

利用旋轉及伸縮的矩陣表示，計算

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 90° & -\sin 90°\\ \sin 90° & \cos 90°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{5} & 0\\ 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\end{bmatrix},$$

得 C 的坐標為 $(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})$．

(2) 因為 $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=(3,4)+(-\frac{4}{5},\frac{3}{5})=(\frac{11}{5},\frac{23}{5})$，

所以 B 的坐標為 $(\frac{11}{5},\frac{23}{5})$．

5. **已知二階方陣 $M=\begin{bmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{bmatrix}$，$A(3，1)$，$B(2，4)$，$C(-1，-2)$．**

若△ABC 經 M 線性變換後成△$A'B'C'$，則△$A'B'C'$的面積為何?

Ans：15

【詳解】

因為向量 $\overrightarrow{AB}=(-1,3)$， $\overrightarrow{AC}=(-4,-3)$， 所以

△ABC 的面積為 $\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}-1 & 3\\ -4 & -3\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|15|=\frac{15}{2}$．

利用線性變換的面積比公式，得△$A'B'C'$的面積為

$\left|\begin{vmatrix}4 & 5\\ 6 & 7\end{vmatrix}\right|\cdot$△$ABC$ 的面積$=|-2|\cdot\frac{15}{2}=15$．

6. **下列哪些二階方陣可以使△ABC 經該方陣變換後面積保持不變?**

(1) $\begin{bmatrix}\cos 70° & -\sin 70°\\ \sin 70° & \cos 70°\end{bmatrix}$，**(2)** $\begin{bmatrix}\cos 70° & \sin 70°\\ \sin 70° & -\cos 70°\end{bmatrix}$，**(3)** $\begin{bmatrix}5 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，**(4)** $\begin{bmatrix}1 & 3\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，**(5)** $\begin{bmatrix}1 & 0\\ -3 & 1\end{bmatrix}$．

Ans：(1)(2)(4)(5)

【詳解】

計算 5 個行列式的絕對值:

(1) $\left|\begin{vmatrix}\cos 70^\circ & -\sin 70^\circ \\ \sin 70^\circ & \cos 70^\circ\end{vmatrix}\right|=|\cos^2 70^\circ+\sin^2 70^\circ|=|1|=1$.

(2) $\left|\begin{vmatrix}\cos 70^\circ & \sin 70^\circ \\ \sin 70^\circ & -\cos 70^\circ\end{vmatrix}\right|=|-\cos^2 70^\circ-\sin^2 70^\circ|=|-1|=1$.

(3) $\left|\begin{vmatrix}5 & 0 \\ 0 & 2\end{vmatrix}\right|=|10|=10$.

(4) $\left|\begin{vmatrix}1 & 3 \\ 0 & 1\end{vmatrix}\right|=|1|=1$.

(5) $\left|\begin{vmatrix}1 & 0 \\ -3 & 1\end{vmatrix}\right|=|1|=1$.

由線性變換的面積比公式，

得知經行列式的絕對值為 1 的方陣變換後，其面積保持不變．

故選(1)(2)(4)(5)．

7.　已知二階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}-1 \\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 \\ 2\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}5 \\ 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-10 \\ -7\end{bmatrix}$，求 A．

Ans：$\begin{bmatrix}2 & -5 \\ 1 & -3\end{bmatrix}$

【詳解】

將題目中 2 式合併寫成 $A\begin{bmatrix}-1 & 5 \\ -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -10 \\ 2 & -7\end{bmatrix}$．

故二階方陣 A 為

$$A=\begin{bmatrix}3 & -10 \\ 2 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 5 \\ -1 & 4\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}3 & -10 \\ 2 & -7\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{1}\begin{bmatrix}4 & -5 \\ 1 & -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -5 \\ 1 & -3\end{bmatrix}.$$

進階題

7.　已知直線 L：$x+2y+5=0$ 經方陣 $\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 2 & 3\end{bmatrix}$ 線性變換後成直線 L'，求 L' 的方程式．

Ans：$x-y=5$

【詳解】

直線 L 的參數式為 $\begin{cases}x=-2t-5 \\ y=t\end{cases}$（$t\in\mathbb{R}$）．因為

$\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2t-5 \\ t\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-t-5 \\ -t-10\end{bmatrix}$，

即點$(-2t-5，t)$經線性變換後的坐標為$(-t-5，-t-10)$，

所以直線 L'的參數式為

$$\begin{cases} x=-t-5 \\ y=-t-10 \end{cases}（t\in\mathbb{R}）.$$

故 L'的方程式為 $x-y=5$．

8. **已知將圓 $C：x^2+(y+2)^2=4$ 以原點為中心旋轉 120°後成另一圓 C'，圓 C'再對直線 $y=x$ 鏡射得圓 C''，求 C''的方程式．**

Ans：$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$

【詳解】

因為$\begin{bmatrix}\cos 90^\circ & \sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & -\cos 90^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ -2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}0 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 \\ -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 \\ \sqrt{3}\end{bmatrix}$$

所以圓心$(0，-2)$經變換後的坐標為$(1，\sqrt{3})$．

又圓 C''的半徑與圓 C 的半徑同為 2，

故 C''的方程式為$(x-1)^2+(y-\sqrt{3})^2=4$．

9. **已知有一伸縮變換將點 $P(1，-1)$變換成點 $P'(2，-3)$，求點 $Q(1，2)$在此變換下所對應的點坐標．**

Ans：$(2，6)$

【詳解】

設伸縮矩陣為$\begin{bmatrix}h & 0 \\ 0 & k\end{bmatrix}$．依題意，可列得

$$\begin{bmatrix}h & 0 \\ 0 & k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 \\ -3\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}h \\ -k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 \\ -3\end{bmatrix}.$$

解得 $h=2$，$k=3$，即伸縮矩陣為$\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 3\end{bmatrix}$．

又由$\begin{bmatrix}2 & 0 \\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 \\ 6\end{bmatrix}$，

得知 $Q(1，2)$在此變換下所對應的點坐標為$(2，6)$．

10. **將點 P 先以原點 O 為中心旋轉 $80°$，再對直線 $L:(\sqrt{3}-1)x-(\sqrt{3}+1)y=0$ 鏡射，其結果相當於對直線 $y=(\tan\theta)x$ 鏡射，若 $0°<\theta<180°$，則 θ 的度數為何?**

Ans：155°

【詳解】

因為直線 L 是過原點且與 x 軸正向夾角為 15°的直線，所以

$$\begin{bmatrix}\cos30° & \sin30° \\ \sin30° & -\cos30°\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos80° & -\sin80° \\ \sin80° & \cos80°\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos30°\cos80°+\sin30°\sin80° & -\cos30°\sin80°+\sin30°\cos80° \\ \sin30°\cos80°-\cos30°\sin80° & -\sin30°\sin80°-\cos30°\cos80°\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(30°-80°) & \sin(30°-80°) \\ \sin(30°-80°) & -\cos(30°-80°)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos(-50°) & \sin(-50°) \\ \sin(-50°) & -\cos(-50°)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\cos310° & \sin310° \\ \sin310° & -\cos310°\end{bmatrix},$$

即相當於對過原點且與 x 軸正向夾角為 155°的直線作鏡射，

即此直線為 $y=(\tan155°)x$，故 $\theta=155°$．

11. **設直線 $L:x+4y+2=0$ 經方陣 $\begin{bmatrix}a & -1 \\ 0 & b\end{bmatrix}$ 線性變換後成直線 $L':x-3y+4=0$，**

求實數 a，b 的值．

Ans：$a=2$，$b=-3$

【詳解】

在 L 上取(−2，0)與(2，−1)兩點．因為

$$\begin{bmatrix}a & -1 \\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 \\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2a \\ 0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}a & -1 \\ 0 & b\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 \\ -1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2a+1 \\ -b\end{bmatrix},$$

所以 $(-2a,0)$ 與 $(2a+1，-b)$ 兩點均落在直線 L' 上．

因此可列得 $\begin{cases}(-2a)-3\times0+4=0 \\ (2a+1)-3\times(-b)+4=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}-2a+4=0 \\ 2a+3b+5=0\end{cases}$．

解得 $a=2$，$b=-3$．

12. **已知 $k>0$ 且 $0°<\theta<360°$滿足$\begin{bmatrix}k&0\\0&k\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\cos\theta&-\sin\theta\\\sin\theta&\cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5\\5\end{bmatrix}$，求 k 與 θ.**

Ans：$k=5$，$\theta=135°$

【詳解】

令 $A(\sqrt{2},0)$，$B(-5，5)$，

則原式表示「以原點爲中心將點 A 旋轉 θ 角後，

再伸縮 k 倍，得點 B」．

因爲 A 在 x 軸正向上，且 $\overline{OB}$與 x 軸正向夾 135°，

且 $\dfrac{\overline{OB}}{\overline{OA}}=\dfrac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=5$，

所以 $k=5$，$\theta=135°$．

13. **已知 A 爲坐標平面上代表旋轉某個角度的二階方陣，且 $A^6=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$．**

選出可能是 A 的選項：

(1) $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$，**(2)** $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}$，**(3)** $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$，**(4)** $\begin{bmatrix}\cos300°&-\sin300°\\\sin300°&\cos300°\end{bmatrix}$，

(5) $\begin{bmatrix}\cos150°&\sin150°\\-\sin150°&\cos150°\end{bmatrix}$．

Ans：(1)(3)(5)

【詳解】

(1) $\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix}\cos90°&-\sin90°\\\sin90°&\cos90°\end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix}\cos540°&-\sin540°\\\sin540°&\cos540°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$．

(2) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{\sqrt{3}}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}&\frac{1}{2}\end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix}\cos60°&-\sin60°\\\sin60°&\cos60°\end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix}\cos360°&-\sin360°\\\sin360°&\cos360°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$．

(3) $\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2}&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&\frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix}\cos30°&-\sin30°\\\sin30°&\cos30°\end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix}\cos180°&-\sin180°\\\sin180°&\cos180°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&-1\end{bmatrix}$．

(4) $\begin{bmatrix}\cos300°&-\sin300°\\\sin300°&\cos300°\end{bmatrix}^6=\begin{bmatrix}\cos1800°&-\sin1800°\\\sin1800°&\cos1800°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$．

(5) $\begin{bmatrix} \cos150° & \sin150° \\ -\sin150° & \cos150° \end{bmatrix}^6 = \begin{bmatrix} \cos(-150°) & -\sin(-150°) \\ \sin(-150°) & \cos(-150°) \end{bmatrix}^6$

$= \begin{bmatrix} \cos(-900°) & -\sin(-900°) \\ \sin(-900°) & \cos(-900°) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos180° & -\sin180° \\ \sin180° & \cos180° \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

故選(1)(3)(5) .