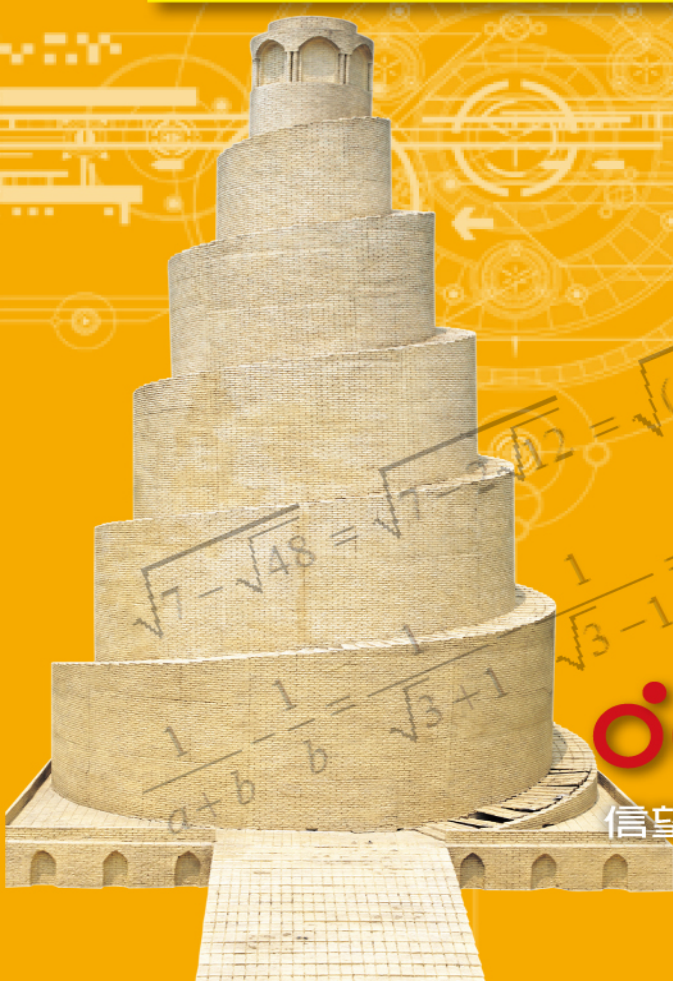


104 學測解析

數學科

陳清海 老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\equiv$

大學入學考試中心
104 學年度學科能力測驗試題
數學考科

第壹部分：選擇題（占 50 分）

一、單選題（占 20 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 5 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 每週同一時間點紀錄某植物的成長高度，連續五週的數據為

$$a_1=1, a_2=2, a_3=6, a_4=15, a_5=31$$

請問此成長高度數列滿足下列選項中哪一個式子？

- (1) $a_{t+1}=3a_t-1, t=1, 2, 3, 4$
- (2) $a_t=t!, t=1, 2, 3, 4, 5$
- (3) $a_{t+1}=a_t+t^2, t=1, 2, 3, 4$
- (4) $a_t=2^t-1, t=1, 2, 3, 4$
- (5) $a_{t+1}=t \cdot a_t+1, t=1, 2, 3, 4$

Ans : (3)

【詳解】

直接代入驗證即知。

n	1	2	3	4	5		
a(n)	1	2	6	15	31		
(1)	1	2	5	14	41		
(2)	1	2	6	24	120		
(3)	1	2	6	15	31		
(4)	1	3	7	15	31		
(5)	1	3	10	31	124		

2. 第 1 天獲得 1 元，第 2 天獲得 2 元，第 3 天獲得 4 元，第 4 天獲得 8 元，依此每天獲得的錢為前一天的兩倍，如此進行到第 30 天，試問這 30 天所獲得的錢，總數最接近下列哪一個選項？
- (1) 10,000 元
 - (2) 1,000,000 元
 - (3) 100,000,000 元
 - (4) 1,000,000,000 元
 - (5) 1,000,000,000,000 元

Ans : (4)

【詳解】

$$S_{30} = 1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^{29} = \frac{1 \cdot (2^{30} - 1)}{2 - 1} = 2^{30} - 1,$$

$$\log 2^{30} = 30 \cdot \log 2 = 30 \cdot 0.3010 = 9.03,$$

首數為 9，故 2^{30} 為 10 位數。

選(4).

3. 有兩組供機器運作的配件 A、B，其單獨發生故障的機率分別為 0.1，0.15。只有當 A，B 都發生故障時，此機器才無法運作。A，B 兩配件若用串接方式，前面故障會導致後面故障，但若後面故障則不會影響前面的故障情形；若用並列方式，則故障情形互不影響。若考慮以下三種情形：

(一) 將 B 串接於 A 之後

(二) 將 A 串接於 B 之後

(三) 將 A，B 獨立並列

在情況(一)、(二)、(三)之下，機器無法運作的機率分別為 P_1 ， P_2 ， P_3 。

請選出正確選項。

- (1) $P_1 > P_2 > P_3$
- (2) $P_2 > P_1 > P_3$
- (3) $P_3 > P_2 > P_1$
- (4) $P_3 > P_1 > P_2$
- (5) $P_1 = P_2 > P_3$

Ans : (2)

【詳解】

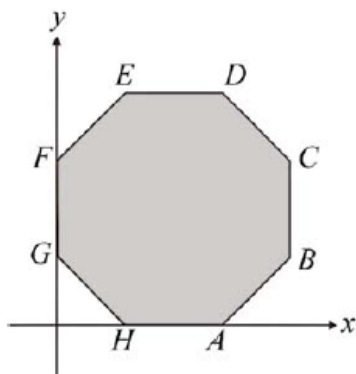
$$P_1 = P(A \text{ 故障}) = 0.1,$$

$$P_2 = P(B \text{ 故障}) = 0.15,$$

$$P_3 = P(A \text{ 故障且 } B \text{ 故障}) = 0.1 \times 0.15 = 0.015,$$

$$P_2 > P_1 > P_3. \quad \text{選(2)}$$

4. 一線性規劃問題的可行解區域為座標平面上的正八邊形 $ABCDEFGH$ 及其內部，如下圖。已知目標函數 $ax+by+3$ (其中 a, b 為實數) 的最大值只發生在 B 點。請問當目標函數改為 $3-bx-ay$ 時，最大值會發生在下列哪一點？
(1) A ，(2) B ，(3) C ，(4) D ，(5) E 。



Ans : (1)

【詳解】

設邊長為 1， $\overline{AB}$ 的斜率為 1，

$f(x, y) = ax + by + 3 = 0$ 的斜率為 $-\frac{a}{b} > 1$ ，

$B(1+2\sqrt{2}, \sqrt{2})$ 代入得 $(1+2\sqrt{2})a + \sqrt{2}b + 3$ 為最大值。

$g(x, y) = 3 - bx - ay = 0$ 的斜率為 $-\frac{b}{a}$ ， $0 < -\frac{b}{a} < 1$ ，

故最大或最小值可能發生在

$A(1+\sqrt{2}, 0)$ 或 $E(\sqrt{2}, 1+2\sqrt{2})$ ，

$g(1+\sqrt{2}, 0) = 3 - (1+\sqrt{2})b$

二、多選題（占 30 分）

說明：第 5 題至第 10 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 小明參加某次路跑 10 公里組的比賽，下表為小明手錶所紀錄之各公里的完成時間、平均心率及步數：

	完成時間	平均心率	步數
第一公里	5:00	161	990
第二公里	4:50	162	1000
第三公里	4:50	165	1005
第四公里	4:55	162	995
第五公里	4:40	171	1015
第六公里	4:41	170	1005
第七公里	4:35	173	1050
第八公里	4:35	181	1050
第九公里	4:40	171	1050
第十公里	4:34	188	1100

在這 10 公里的比賽過程，請依據上述數據，選出正確的選項。

- (1) 由每公里的平均心率得知小明最高心率為 188
- (2) 小明此次路跑，每步距離的平均小於 1 公尺
- (3) 每公里完成時間和每公里平均心率的相關係數為正相關
- (4) 每公里步數和每公里平均心率的相關係數為正相關
- (5) 每公里完成時間和每公里步數的相關係數為負相關

Ans：(2)(4)(5)

【詳解】

	完成時間x	離差x	方差x	平均心率y	離差y	方差y	步數z	離差z	方差z	xy	xz	yz
第一公里	300	16	256	161	-9.4	88.36	990	-36	1296	-150.4	-576	338.4
第二公里	290	6	36	162	-8.4	70.56	1000	-26	676	-50.4	-156	218.4
第三公里	290	6	36	165	-5.4	29.16	1005	-21	441	-32.4	-126	113.4
第四公里	295	11	121	162	-8.4	70.56	995	-31	961	-92.4	-341	260.4
第五公里	280	-4	16	171	0.6	0.36	1015	-11	121	-2.4	44	-6.6
第六公里	281	-3	9	170	-0.4	0.16	1005	-21	441	1.2	63	8.4
第七公里	275	-9	81	173	2.6	6.76	1050	24	576	-23.4	-216	62.4
第八公里	275	-9	81	181	10.6	112.36	1050	24	576	-95.4	-216	254.4
第九公里	280	-4	16	171	0.6	0.36	1050	24	576	-2.4	-96	14.4
第十公里	274	-10	100	188	17.6	309.76	1100	74	5476	-176	-740	1302.4
加總	2840		752	1704		688.4	10260		11140	-624	-2360	2566
平均	284		75.2	170.4		68.84	1026		1114			
							9.747			-0.867	-0.8154	0.9266

- (1) 最高心率大於 188
- (2) 每步距離平均為 $\frac{10000}{10260} = 9.747$ 公尺
- (3) 每公里完成時間和每公里平均心率的相關係數為 -0.867
- (4) 每公里步數和每公里平均心率的相關係數為 0.9266
- (5) 每公里完成時間和每公里步數的相關係數為 -0.8

選(2)(4)(5).

6. 設 $f(x)$ 是首項係數為 1 的實係數二次多項式。請選出正確的選項。

- (1) 若 $f(2)=0$ ，則 $x-2$ 可整除 $f(x)$
- (2) 若 $f(2)=0$ ，則 $f(x)$ 為整係數多項式
- (3) 若 $f(\sqrt{2})=0$ ，則 $f(-\sqrt{2})=0$
- (4) 若 $f(2i)=0$ ，則 $f(-2i)=0$
- (5) 若 $f(2i)=0$ ，則 $f(x)$ 為整係數多項式

Ans : (1)(4)(5)

【詳解】

- (1) 因式定理
- (2) 不一定。例如 $f(x)=(x-2)(x-\sqrt{2})$
- (3) 不一定(須為有理係數)
- (4) 虛根成對定理
- (5) $x=2i \Rightarrow x^2=-4 \Rightarrow f(x)=x^2+4$

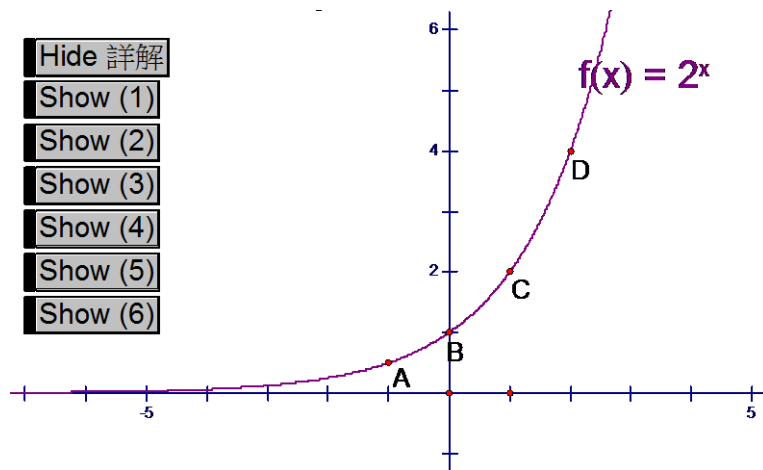
選(1)(4)(5).

7. 坐標平面上，在函數圖形 $y=2^x$ 上，標示 A、B、C、D 四個點，其 x 坐標分別為 -1、0、1、2。請選出正確的選項。

- (1) 點 B 落在直線 AC 下方
- (2) 在直線 AB、直線 BC、直線 CD 中，以直線 CD 的斜率最大
- (3) A、B、C、D 四個點，以 B 最靠近 x 軸
- (4) 直線 $y=2x$ 與 $y=2^x$ 的圖形有兩個交點
- (5) 點 A 與點 C 對稱於 y 軸

Ans : (1)(2)(4)

【詳解】



由上圖知選(1)(2)(4).

8. 坐標平面上有一雙曲線，其漸近線為 $x-y=0$ 和 $x+y=0$ 。關於此雙曲線的性質，請選出正確選項。

- (1) 此雙曲線的方程式為 $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = 1$ 或 $\frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = -1$ ，其中 r 為非零實數
- (2) 此雙曲線的實軸長等於共軛軸長
- (3) 若點 (a, b) 為雙曲線在第一象限上一點，則當 $a > 1000$ 時， $|a-b| < 1$
- (4) 若點 (a, b) ， (a', b') 為雙曲線在第一象限上兩點且 $a < a'$ ，則 $b < b'$
- (5) 此雙曲線同時對稱於 x 軸與 y 軸

Ans : (1)(2)(4)(5)

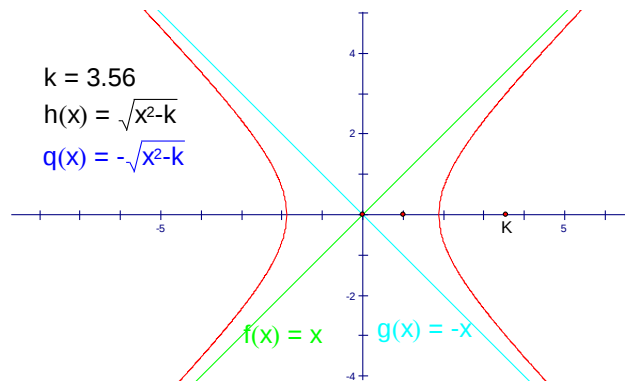
【詳解】

- (1) 漸近線為 $x-y=0$ 和 $x+y=0$ 的雙曲線為
 $(x-y)(x+y) = \pm r$.

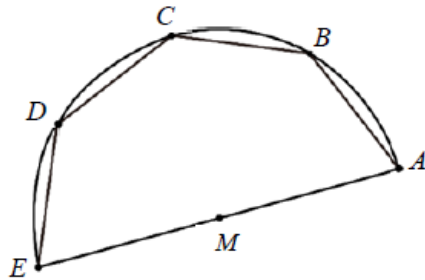
$$\text{故可為 } \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = 1 \text{ 或 } \frac{x^2}{r^2} - \frac{y^2}{r^2} = -1$$

- (2) 等軸雙曲線，故實軸長等於共軛軸長
- (3) 例如 $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y) = 2001$ ，
取 $a=1001$ ， $b=1000$
- (4) 在第一象限必為增函數
- (5) x 軸與 y 軸均為其對稱軸

選(1)(2)(4)(5).



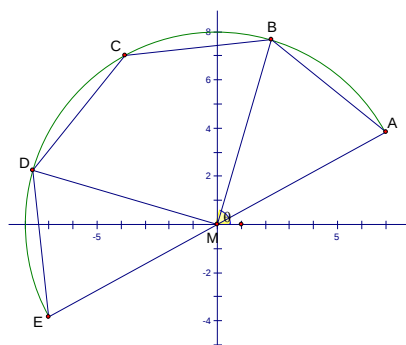
9. 如圖，以 M 為圓心， $MA=8$ 為半徑畫圓， AE 為該圓的直徑， B 、 C 、 D 三點皆在圓上，且 $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DE}$ 。若 $\overrightarrow{MD} = 8(\cos(\theta + 90^\circ), \sin(\theta + 90^\circ))$ 。請選出正確的選項。



- (1) $\overrightarrow{MA} = 8(\cos \theta, \sin \theta)$
- (2) $\overrightarrow{MC} = 8(\cos(\theta + 45^\circ), \sin(\theta + 45^\circ))$
- (3) (內積) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} = 8$
- (4) (內積) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 0$
- (5) $\overrightarrow{BD} = 8(\cos \theta + \cos(\theta + 90^\circ), \sin \theta + \sin(\theta + 90^\circ))$

Ans : (2)(4)

【詳解】



如上圖， $\overrightarrow{MB}$ 與軸正向的夾角為 θ ， $\angle BMD = 90^\circ$ ，

(1) 向量 $\overrightarrow{MA} = 8(\cos(\theta - 45^\circ), \sin(\theta - 45^\circ))$

(2) 向量 $\overrightarrow{MC} = 8(\cos(\theta + 45^\circ), \sin(\theta + 45^\circ))$

(3) (內積) $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MA} = 8 \times 8 \times \cos 0^\circ = 64$

(4) (內積) $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MD} = 8 \times 8 \times \cos 90^\circ = 0$

(5) $\overrightarrow{BD} = 8(\cos(\theta + 90^\circ) - \cos \theta, \sin(\theta + 90^\circ) - \sin \theta)$

故選(2)(4)

10. 某一班共有 45 人，問卷調查有手機與平板電腦的人數。從統計資料顯示此班有 35 人有手機，而有 24 人有平板電腦。設

A 為同時有手機與平板電腦的人數

B 為有手機，但沒有平板電腦的人數

C 為沒有手機，但有平板電腦的人數

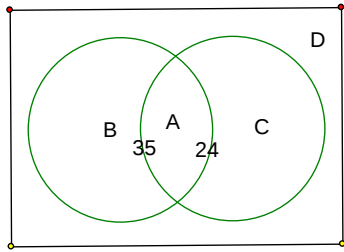
D 為沒有手機，也沒有平板電腦的人數

請選出恆成立的不等式選項

(1) $A > B$ ，(2) $A > C$ ，(3) $B > C$ ，(4) $B > D$ ，(5) $C > D$ 。

Ans：(2)(3)(4)

【詳解】



$$14 \leq n(A) \leq 24$$

A	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
B	21	20	19	18	17	16	15	14	13	12	11
C	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
D	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

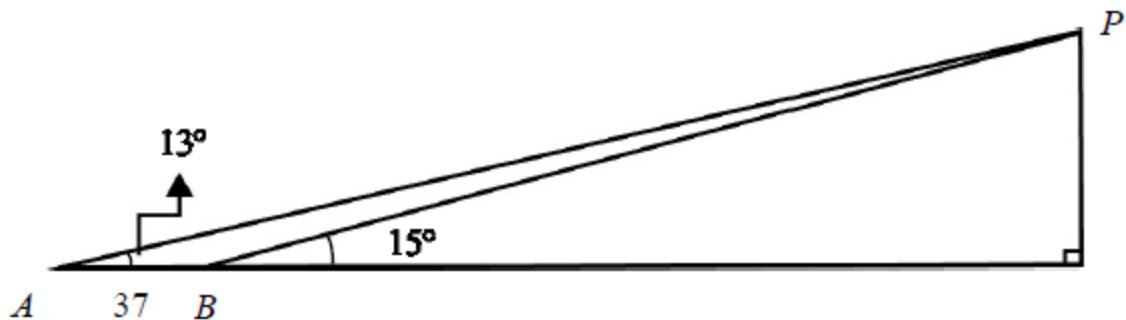
由上表知應選(2)(3)(4).

第貳部分：選填題（占 50 分）

說明：1.第 A 至 J 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號（11–37）。

2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 如圖，老王在平地點 A 測得遠方山頂點 P 的仰角為 13° 。老王朝著山的方向前進 37 公丈後來到點 B，在測得山頂點 P 的仰角為 15° 。則山高約為_____公丈。
(四捨五入至個位數， $\tan 13^\circ \approx 0.231$ ， $\tan 15^\circ \approx 0.268$)



Ans : 62

【詳解】

設山高為 x ，B 到山底的距離為 y ，則

$$x = y \times \tan 15^\circ = (y + 37) \times \tan 13^\circ$$

$$\Rightarrow y \times \tan 15^\circ - y \times \tan 13^\circ = 37 \times \tan 13^\circ$$

$$\Rightarrow y = \frac{37 \times \tan 13^\circ}{\tan 15^\circ - \tan 13^\circ}$$

$$\Rightarrow x = \frac{37 \times \tan 13^\circ}{\tan 15^\circ - \tan 13^\circ} \times \tan 15^\circ$$

$$= \frac{37 \times 0.231}{0.268 - 0.231} \times 0.268$$

$$= 61.908$$

約為 62 公丈。

- B. 不透明袋中有 3 白 3 紅共 6 個球，球大小形狀相同，僅顏色相異。甲、乙、丙、丁、戊 5 人依甲第一、乙第二、……、戊第五的次序，從袋中各取一球，取後不放回。試問在甲、乙取出不同色球的條件下，戊取得紅球的機率為_____。
(化為最簡分數)

Ans : $\frac{1}{2}$

【詳解】

甲乙取完後，袋中有 2 白 2 紅。

P(戊紅)

$$= P(\text{丙白丁白}) + P(\text{丙白丁紅}) + P(\text{丙紅丁白}) + P(\text{丙紅丁紅})$$

$$= \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} + \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} \times 0$$

$$= \frac{1}{2}.$$

- C. 小燦預定在陽台上種植玫瑰、百合、菊花和向日葵等四種盆栽。如果陽台上的空間最多能種 8 盆，可以不必填滿，並且每種花至少一盆，則小燦買盆栽的方法共有_____種。

Ans : 70

【詳解】

設購買玫瑰 x 、百合 y 、菊花 z 、向日葵 u ，

即求 $x + y + z + u \leq 8$ 的正整數解

$x + y + z + u = 4$ 的正整數解有 1 種，

$x + y + z + u = 5$ 的正整數解有 $C_3^4 = 4$ 種，

$x + y + z + u = 6$ 的正整數解有 $C_3^5 = 10$ 種，

$x + y + z + u = 7$ 的正整數解有 $C_3^6 = 20$ 種，

$x + y + z + u = 8$ 的正整數解有 $C_3^7 = 35$ 種，

故共有 $1+4+10+20+35=70$ 種。

- D. 平面 $x-y+z=0$ 與三平面 $x=2$ ， $x-y=-2$ ， $x+y=2$ 分別相交所得的三直線可圍成一個三角形。此三角形之周長化成最簡根式，可表為 $a\sqrt{b}+c\sqrt{d}$ ，其中 a 、 b 、 c 、 d 為正整數且 $b < d$ ，則 $a=$ _____， $b=$ _____， $c=$ _____， $d=$ _____。

Ans： $a=6$ ， $b=2$ ， $c=2$ ， $d=6$

【詳解】

$$\text{解} \begin{cases} x-y+z=0 \\ x=2 \\ x-y=-2 \end{cases} \quad \text{得 } A(2, 4, 2),$$

$$\text{解} \begin{cases} x-y+z=0 \\ x=2 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \text{得 } B(2, 0, -2),$$

$$\text{解} \begin{cases} x-y+z=0 \\ x-y=-2 \\ x+y=2 \end{cases} \quad \text{得 } C(0, 2, 2),$$

周長 $AB+BC+CA$

$$= \sqrt{0+16+16} + \sqrt{4+4+16} + \sqrt{4+4+0}$$

$$= 4\sqrt{2} + 2\sqrt{6} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}$$

故 $a=6$ ， $b=2$ ， $c=2$ ， $d=6$

- E. 坐標平面上，直線 L_1 與 L_2 的方程式分別為 $x+2y=0$ 與 $3x-5y=0$ 。為了確定平面上某一個點 P 的座標，從 L_1 上的一點 Q_1 偵測得向量 $\overrightarrow{Q_1P} = (-7, 9)$ ，再從 L_2 上的點 Q_2 偵測得向量 $\overrightarrow{Q_2P} = (-6, -8)$ ，則 P 點的坐標為_____。

Ans： $(9, 1)$

【詳解】

設 $Q_1(-2t, t)$ ， $Q_2(5s, 3s)$ ， $P(x, y)$ ，則

$$\overrightarrow{Q_1P} = (x+2t, y-t) = (-7, 9),$$

$$\Rightarrow x+2t=-7, y-t=9 \Rightarrow x+2y=11 \cdots \cdots (1)$$

$$\overrightarrow{Q_2P} = (x-5s, y-3s) = (-6, -8),$$

$$\Rightarrow x-5s=-6, y-3s=-8 \Rightarrow 3x-5y=22 \cdots \cdots (2)$$

$$(1) \times 5 + (2) \times 2 \Rightarrow 11x = 99 \Rightarrow x = 9$$

$$\text{代入}(1) \Rightarrow 9 + 2y = 11 \Rightarrow y = 1$$

即 $P(9, 1)$ 。

- F. 小華準備向銀行貸款 3 百萬元當作創業基金，其年利率為 3%，約定三年期滿一次還清貸款的本利和。銀行貸款一般以複利(每年複利一次)計息還款，但給小華創業優惠改以單利計息還款。試問在此優惠下，小華三年期滿還款時可以比一般複利計息少繳_____元。

Ans : 8181

【詳解】

複利的本利和為 $300 \times 1.03^3 = 327.8181$ ，

單利的本利和為 $300 \times (1 + 0.03 \times 3) = 327$ ，

故少繳 $327.8181 - 327 = 0.8181$ 元。

- G. 某一公司，有 A、B、C 三個營業據點，開始時各有 36 位營業員，為了讓營業員了解各據點的業務狀況，所以進行兩次調動。每次調動都是

將當時 A 據點營業員的 $\frac{1}{6}$ 調到 B 據點， $\frac{1}{6}$ 調到 C 據點；

將當時 B 據點營業員的 $\frac{1}{6}$ 調到 A 據點， $\frac{1}{3}$ 調到 C 據點；

將當時 C 據點營業員的 $\frac{1}{6}$ 調到 A 據點， $\frac{1}{6}$ 調到 B 據點；

則兩次調動後，C 據點有_____位營業員。

Ans : 44

【詳解】

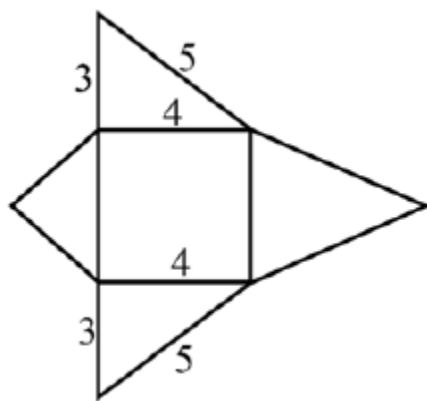
$$\text{轉移矩陣為 } \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}, X_0 = \begin{bmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \end{bmatrix},$$

$$X_1 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 36 \\ 36 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 30 \\ 42 \end{bmatrix},$$

$$X_2 = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 36 \\ 30 \\ 42 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 \\ 28 \\ 44 \end{bmatrix}$$

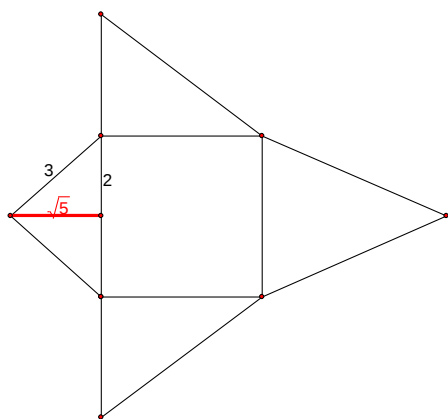
C 據點有 44 位營業員。

- H. 將一底面為正方形的四角錐，其展開圖如下圖所示，其中兩側面的三角形邊長為 3，4，5，則此角錐的體積為_____。(化為最簡根式)



Ans : $\frac{16\sqrt{5}}{3}$

【詳解】

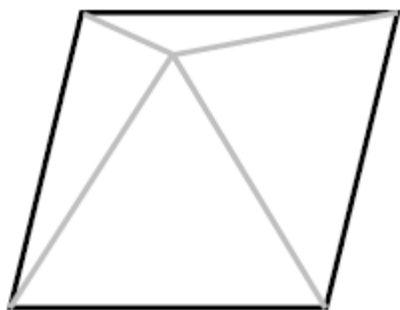


如上圖，摺回後，此四角錐的高為 $\sqrt{5}$ ，

故此角錐的體積為 $4 \times 4 \times \sqrt{5} \div 3 = \frac{16\sqrt{5}}{3}$ 。

- I. 在空間中，一個斜面的「坡度」定義為斜面與水平面夾角 θ 的正切值 $\tan\theta$ 。
若一金字塔(底部為一正方形，四個斜面為等腰三角形)的每一個斜面的坡度
皆為 $\frac{2}{5}$ ，如圖。則相鄰斜面的夾角的餘弦函數的絕對值為_____。

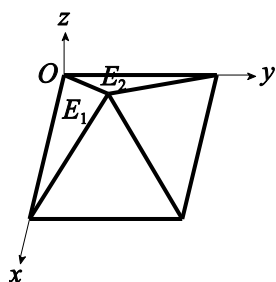
(化為最簡分數)



Ans : $\frac{25}{29}$

【詳解】

建立空間坐標系，如下圖。



依題意，得兩斜面方程式為

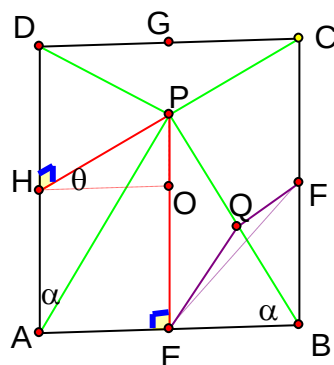
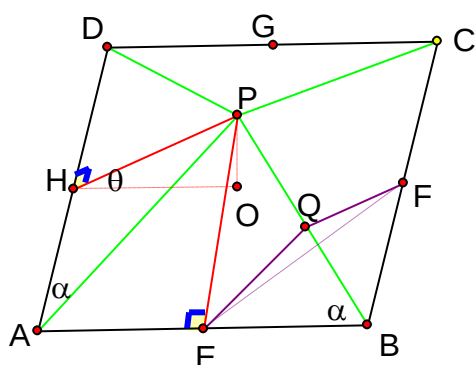
$$E_1 : z = \frac{2}{5}y \Rightarrow E_1 : 2y - 5z = 0 ,$$

$$E_2 : z = \frac{2}{5}x \Rightarrow E_2 : 2x - 5z = 0 .$$

利用兩法向量 $\vec{n}_1 = (0, 2, -5)$, $\vec{n}_2 = (2, 0, -5)$, 得

$$|\cos \theta| = \frac{\left| \frac{\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|} \right|}{\left| \frac{25}{\sqrt{29} \times \sqrt{29}} \right|} = \frac{25}{29}$$

【另解】



前視圖

如上圖，O 為正方形 ABCD 的中心，P 為頂點。

因 $\tan \theta = \frac{2}{5}$, 令 $\overline{OP} = 2$, $\overline{OH} = 5$, 則

$$\overline{PH} = \overline{PE} = \sqrt{29} , \overline{PA} = \overline{PB} = \sqrt{54} .$$

在 $\triangle PBE$ 中， $\angle PBE = \alpha$, $\sin \alpha = \frac{\overline{PE}}{\overline{PB}} = \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{54}}$ 。

作 $\overline{EQ} \perp \overline{PB}$ 於 Q，則 $\overline{FQ} \perp \overline{PB}$ ，且兩面角為 $\angle EQF$ 。

在 $\triangle QEF$ 中， $\overline{QE} = \overline{QF} = \overline{BE} \cdot \sin \alpha = 5 \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{54}}$ ，

$\overline{EF} = 5\sqrt{2}$ ，利用餘弦定理得

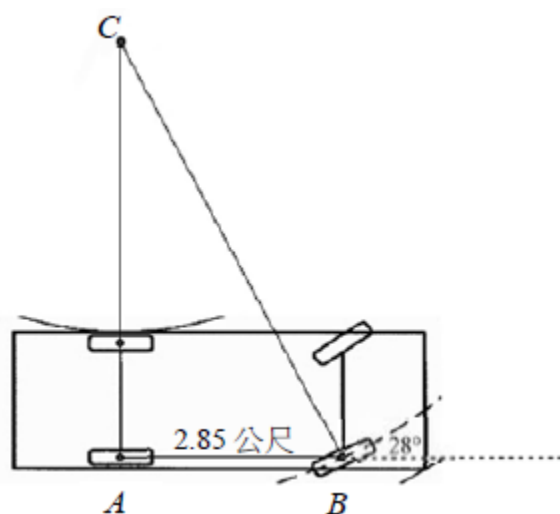
$$\cos \angle EQF = \frac{25 \cdot \frac{29}{54} + 25 \cdot \frac{29}{54} - (5\sqrt{2})^2}{2 \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{54}} \cdot 5 \cdot \frac{\sqrt{29}}{\sqrt{54}}} = \frac{\frac{29}{54} \cdot 2 - 2}{2 \cdot \frac{29}{54}} = \frac{58 - 108}{58} = \frac{-25}{29}$$

$$\text{故 } |\cos \angle EQF| = \frac{25}{29}.$$

J. 下圖為汽車迴轉示意圖。汽車迴轉時，將方向盤轉動到極限。以低速讓汽車進行轉向圓周運動，汽車轉向時所形成的圓周的半徑就是迴轉半徑，如圖中的 $\overline{BC}$ 即是。

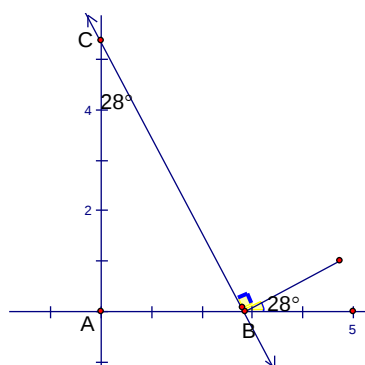
已知在低速前進時，圖中 A 處的輪胎行進方向與 $\overline{AC}$ 垂直，B 處的輪胎行進方向與 $\overline{BC}$ 垂直。在圖中，已知輪距 $\overline{AB}$ 為 2.85 公尺，方向盤轉到極限時，輪子方向偏了 28 度。試問此車的迴轉半徑 $\overline{BC}$ 為_____公尺。

(小數點後第一位以下四捨五入， $\sin 28^\circ \approx 0.4695$ ， $\cos 28^\circ \approx 0.8829$)



Ans : 6.1

【詳解】



如上圖， $\sin 28^\circ = \frac{AB}{BC}$

$$\Rightarrow \overline{BC} = \frac{\overline{AB}}{\sin 28^\circ} = \frac{2.85}{0.4695} \approx 6.07028$$

取 $BC = 6.1$.

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 $r (r \neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ (R 為 $\triangle ABC$ 外接圓半徑)

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，算術平均數 $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

標準差 $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\mu_X^2)}$

5. 二維數據 $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，相關係數 $r_{X,Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \mu_X)(y_i - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式 $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010, \log_{10} 3 \approx 0.4771, \log_{10} 5 \approx 0.6990, \log_{10} 7 \approx 0.8451$