



數學基礎自學講義

解二元一次聯立方程式

姓名

班級

B2 2-2 二元一次聯立方程式



★ 大括號的意義。



概念 1 二元一次聯立方程式的意義



① 二元一次方程式

② 二元一次聯立方程式

【舉例】

① $x+y=3$, $x-y=1$, $2x+3y=5$, $3x+4y=7$,
這些都是 _____ 。

② $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$, $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ 3x+4y=7 \end{cases}$

這些都是 _____ 。



牛刀小試 1

1. 下列為某學校班級學生的座號及姓名

小刀班

座號	1	2	3	4
姓名	炭刺郎	迷豆子	伊之豬	善魚

小海班

座號	1	2	3	4
姓名	魯夫	喬八	娜鎂	香吉士

一位爺爺到學校找孫子，但他忘記孫子的名字，你能幫忙嗎？

線索一：「是小刀班的學生。」

線索二：「座號是 3 號。」

(1) 爺爺孫子的名字是 _____ 。

(2) 你必須用幾個線索才找到爺爺孫子的名字？為什麼？

結論：聯立方程式的意義

一個未知數需要 1 個方程式(線索)，二個未知數需要 2 個以上方程式(線索)，
哪一個班級？座號是幾號？有 2 個未知數需要 2 個以上方程式(線索)才能找到答案，因此將
方程式用大括號並列，就稱為聯立方程組。

(3) 請寫出一組聯立方程組，讓大家猜猜你的答案。



概念 2 二元一次聯立方程式的解

① 求 $x+y=3$ 的解 $\Rightarrow \square + \triangle = 3$

x	
y	

有 組

② 求 $x-y=1$ 的解 $\Rightarrow \square - \triangle = 1$

x	
y	

有 組

③ 求 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解 $\Rightarrow \begin{cases} \square + \triangle = 3 \\ \square - \triangle = 1 \end{cases}$

意思是 _____。

① 二元一次聯立方程式的解，通常有 _____ 組。

● 解的表示方法：

_____。



牛刀小試 2

1. 二元一次聯立方程式的解

(1) 求 $x+y=8$ 的解 $\Rightarrow \square + \square = 8$

x	3	4	5	6
y				

(2) 求 $x-y=2$ 的解 $\Rightarrow \square - \square = 2$

x	3	4	5	6
y				

(3) 由(1)(2) $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$

是 $x+y=8$ 和 $x-y=2$ 共同的解，

因此 $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$ 就是 $\begin{cases} x+y=8 \\ x-y=2 \end{cases}$

的解。

2. 二元一次聯立方程式的解

(1) 求 $2x+y=11$ 的解 $\Rightarrow 2 \times \square + \square = 11$

x	1	2	3	4
y				

(2) 求 $x-y=1$ 的解 $\Rightarrow \square - \square = 1$

x	1	2	3	4
y				

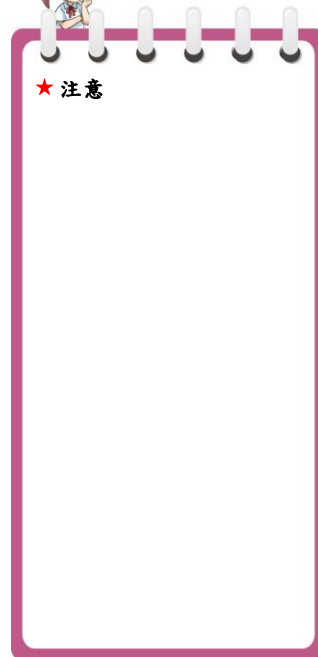
(3) 由(1)(2) $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$

是 $2x+y=11$ 和 $x-y=1$ 共同的解，

因此 $\begin{cases} x = \underline{\hspace{2cm}} \\ y = \underline{\hspace{2cm}} \end{cases}$ 就是 $\begin{cases} 2x+y=11 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解



★ 注意



例題 1 求聯立方程式的解

① 以下哪個選項是 $\begin{cases} x+y=3 \\ x-y=1 \end{cases}$ 的解？

(A) $\begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases}$

(B) $\begin{cases} x=3 \\ y=2 \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$

(D) $\begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$



牛刀小試 3

1. 下列何者是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+y=1 \\ x-y=3 \end{cases}$ 的解？答：_____。

(A) $x=1, y=0$

(B) $x=3, y=0$

(C) $x=2, y=-1$

(D) $x=-2, y=1$

2. 下列何者是二元一次聯立方程式 $\begin{cases} x+2y=3 \\ x-y=-6 \end{cases}$ 的解？答：_____。

(A) $x=1, y=1$

(B) $x=0, y=-6$

(C) $x=3, y=-3$

(D) $x=-3, y=3$



溫故知新

1

解一元一次方程式

解下列各一元一次方程式：

(1) $x + 1 = 3$

(2) $2x = 3$

(3) $2x + 1 = 3$

(4) $x - 2 = -3$

(5) $-3x = 6$

(6) $-3x - 1 = 4$



牛刀小試 4

1. 求下列一元一次方程式

(1) $x + 2 = 4$

(2) $x - 3 = -4$

(3) $3x = 5$

(4) $-4x = 8$

(5) $3x + 1 = 7$

(6) $-5x - 1 = 9$

2. 求下列一元一次方程式

(1) $x + 3 = -7$

(2) $4x = -5$

(3) $-3x = -6$

(4) $3x + 1 = -8$

(5) $2x - 1 = 7$

(6) $-4x - 1 = 7$



概念 3 代入消去法



一、甚麼是代入消去法？

二、重點在

【舉例】

解 $\begin{cases} x+y=3 \\ y=1 \end{cases}$ 。

★把 $y=1$ 代入的意思就是

_____。



牛刀小試 5

1. 求下列聯立方程式

(1) $\begin{cases} x = 5 \\ x + y = 9 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 4 \\ x - y = 3 \end{cases}$

2. 求下列聯立方程式

(1) $\begin{cases} x + y = 7 \\ y = 2 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - y = 6 \\ y = 4 \end{cases}$



例題 2 用代入消去法解二元一聯立方程式 1

解 $\begin{cases} x = 2y \dots\dots ① \\ x + y = 6 \dots ② \end{cases}$ 。

★ ①式知道 x 就是

_____。

★ ②式遇到 x 就代入(换成)

_____。



牛刀小試 6

1. 求下列聯立方程式

(1) $\begin{cases} x = 3y \\ x + y = 12 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = 4y \\ x - y = 9 \end{cases}$

2. 求下列聯立方程式

(1) $\begin{cases} x + y = 15 \\ y = 2x \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x - y = 4 \\ y = 3x \end{cases}$



例題 3 用代入消去法解二元一聯立方程式 2

解 $\begin{cases} x = y + 1 \dots\dots ① \\ x + y = 7 \dots\dots ② \end{cases}$ 。

★ ①式知道 x 就是

_____。

★ ②式遇到 x 就代入 (換成)

_____。

★ 記得 $y+1$ 要加上

_____。



牛刀小試 7

1. 求下列聯立方程式

(1) $\begin{cases} x = y + 2 \\ x + y = 8 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x = y - 1 \\ x + y = 7 \end{cases}$

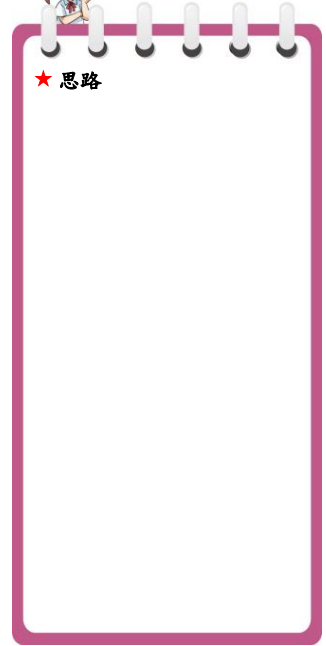
2. 求下列聯立方程式

(1) $\begin{cases} x + y = 9 \\ y = x + 1 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x + y = 11 \\ y = x - 1 \end{cases}$



★ 思路



例題 4 用代入消去法解二元一聯立方程式 3

請用代入消去法解 $\begin{cases} x+y=3 \dots\dots ① \\ x-y=1 \dots\dots ② \end{cases}$ 。



牛刀小試 8

1. 求下列聯立方程式

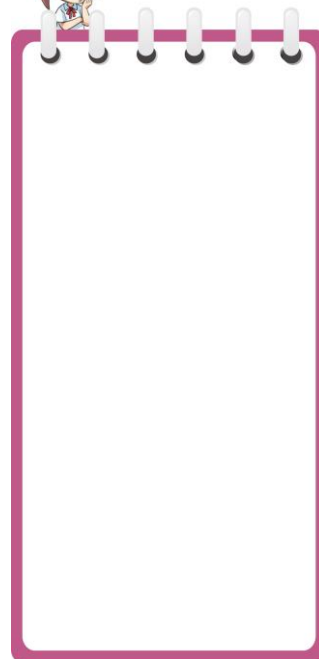
$$(1) \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+y=11 \\ x-y=1 \end{cases}$$

2. 求下列聯立方程式

$$(1) \begin{cases} x+y=10 \\ x-y=4 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+y=10 \\ x-2y=1 \end{cases}$$



概念 4 加減消去法 1

還記得例題 4 的問題嗎？

$$\text{解 } \begin{cases} x+y=3 \dots\dots ① \\ x-y=1 \dots\dots ② \end{cases},$$

除了用代入消去法，有沒有更好的方法？



牛刀小試 9

1. 求下列聯立方程式

$$(1) \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+y=5 \\ x-y=3 \end{cases}$$

2. 求下列聯立方程式

$$(1) \begin{cases} x+y=10 \\ x-y=2 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x+y=7 \\ x-y=1 \end{cases}$$



例題 5 消消樂 1

(1) 消去 x

$$\begin{array}{r} 3x \\ \square) 3x \\ \hline \end{array}$$

(2) 消去 y

$$\begin{array}{r} 2y \\ \square) -2y \\ \hline \end{array}$$

(3) 消去 x

$$\begin{array}{r} 7x \\ \square) -7x \\ \hline \end{array}$$

(4) 消去 y

$$\begin{array}{r} -8y \\ \square) -8y \\ \hline \end{array}$$

(5) 消去 x

$$\begin{array}{r} \square) \begin{cases} x+y=7 \dots\dots ① \\ x-y=3 \dots\dots ② \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

(6) 消去 y

$$\begin{array}{r} \square) \begin{cases} x+y=7 \dots\dots ① \\ x-y=3 \dots\dots ② \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

(7) 消去 x

$$\begin{array}{r} \square) \begin{cases} 2x+3y=5 \dots\dots ① \\ -2x+3y=1 \dots\dots ② \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

(8) 消去 y

$$\begin{array}{r} \square) \begin{cases} 2x+3y=5 \dots\dots ① \\ -2x+3y=1 \dots\dots ② \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

★我發現：

(1) 如果符號相同

要相_____。

(2) 如果符號不同

要相_____。



牛刀小試 10

1. (1) 消去 x

$$\begin{array}{r} 2x \\ \square) 2x \\ \hline \end{array}$$

(2) 消去 y

$$\begin{array}{r} 5y \\ \square) 5y \\ \hline \end{array}$$

(3) 消去 x

$$\begin{array}{r} 4x \\ \square) -4x \\ \hline \end{array}$$

(4) 消去 y

$$\begin{array}{r} 4y \\ \square) -4y \\ \hline \end{array}$$

2. (1) 消去 x

$$\square) \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\square) \begin{cases} x+y=6 \\ x-y=4 \end{cases}$$

(3) 消去 x

$$\square) \begin{cases} 4x+5y=14 \\ -4x+5y=6 \end{cases}$$

(4) 消去 y

$$\square) \begin{cases} 4x+5y=14 \\ -4x+5y=6 \end{cases}$$



例題 6 消消樂 2

(1) 消去 x

$$\begin{cases} x+y=3 & \text{.....①} \\ 2x+y=5 & \text{.....②} \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} x+y=3 & \text{.....①} \\ 2x+y=5 & \text{.....②} \end{cases}$$

(3) 消去 x

$$\begin{cases} 2x-y=4 & \text{.....①} \\ x-y=1 & \text{.....②} \end{cases}$$

(4) 消去 y

$$\begin{cases} 2x-y=4 & \text{.....①} \\ x-y=1 & \text{.....②} \end{cases}$$

★ 我發現：

要消去之前要先

_____。



牛刀小試 11

1. (1) 消去 x

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=8 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 2x+y=8 \end{cases}$$

3. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ x-y=2 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 2x-y=5 \\ x-y=2 \end{cases}$$

2. (1) 消去 x

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=9 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} x+y=5 \\ 3x+y=9 \end{cases}$$

4. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 3x-y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 3x-y=9 \\ x-y=1 \end{cases}$$



例題 7 消消樂 3

(1) 消去 x

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & \text{.....①} \\ -x - y = -3 & \text{.....②} \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 2x + y = 5 & \text{.....①} \\ -x - y = -3 & \text{.....②} \end{cases}$$

(3) 消去 x

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \text{.....①} \\ -x + 3y = 2 & \text{.....②} \end{cases}$$

(4) 消去 y

$$\begin{cases} 2x + y = 3 & \text{.....①} \\ -x + 3y = 2 & \text{.....②} \end{cases}$$

★ 我發現：

如果加和減都可以，
我會選擇用____法，
比較不容易出錯。



牛刀小試 12

1. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -x - y = -4 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 2x + y = 7 \\ -x - y = -4 \end{cases}$$

3. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ -x + 3y = 3 \end{cases}$$

2. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ -x - y = -5 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 3x + y = 9 \\ -x - y = -5 \end{cases}$$

4. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 3x + y = 11 \\ -x + 2y = 1 \end{cases}$$



例題 8 消消樂 4

(1) 消去 x

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & \dots\dots ① \\ x + y = 2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 & \dots\dots ① \\ x + y = 2 & \dots\dots ② \end{cases}$$

(3) 消去 x

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 & \dots\dots ① \\ 6x + y = -1 & \dots\dots ② \end{cases}$$

(4) 消去 y

$$\begin{cases} 3x - 4y = 7 & \dots\dots ① \\ 6x + y = -1 & \dots\dots ② \end{cases}$$

★我發現：

消去 x 或 y 都可以
的時候，要選擇

_____。



牛刀小試 13

1. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 2x + 3y = 12 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

3. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 6x + y = 19 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 3x - 4y = 5 \\ 6x + y = 19 \end{cases}$$

2. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 3x + 2y = 11 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

4. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 8x - y = 15 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 4x + 3y = 11 \\ 8x - y = 15 \end{cases}$$



例題 9 消消樂 5

(1) 消去 x

$$\begin{cases} 3x + 4y = -1 & \text{.....①} \\ x - 3y = 4 & \text{.....②} \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 3x + 4y = -1 & \text{.....①} \\ x - 3y = 4 & \text{.....②} \end{cases}$$

(3) 消去 x

$$\begin{cases} -3x + 4y = -2 & \text{.....①} \\ 2x + 3y = 7 & \text{.....②} \end{cases}$$

(4) 消去 y

$$\begin{cases} -3x + 4y = -2 & \text{.....①} \\ 2x + 3y = 7 & \text{.....②} \end{cases}$$

★ 我發現：

把係數變相同可以選擇

_____。



牛刀小試 14

1. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 3x + 4y = 2 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

3. (1) 消去 x

$$\begin{cases} -3x + 4y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} -3x + 4y = 7 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

2. (1) 消去 x

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x - 4y = 6 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} 4x + 3y = 5 \\ x - 4y = 6 \end{cases}$$

4. (1) 消去 x

$$\begin{cases} -2x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

(2) 消去 y

$$\begin{cases} -2x + 3y = -1 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$



概念 5 加減消去法 2

從前面的消消樂練習我們可以知道，

要使用「加減消去法」消去一個未知數的重點是：

- **整理對齊** —— (1) x 和 y 放 _____ 邊，數字放 _____ 邊。
(2) 遇到分數化成 _____。
- 把 x 或 y 的數字變相同。
- 同號相 _____，異號相 _____。
- 如果加或減都可以，要用 _____ 法比較好。



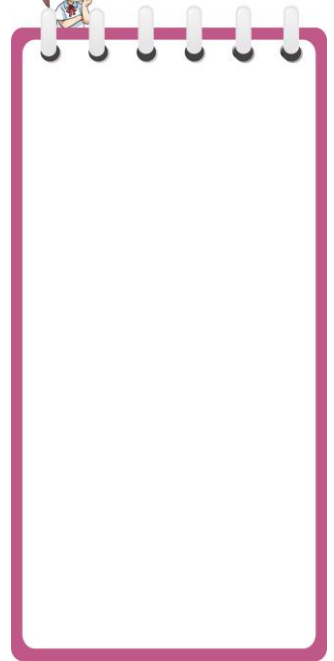
牛刀小試 15

1. 解 $\begin{cases} 5x + 4y = 3 \\ 4x - 3y = -10 \end{cases}$

2. 解 $\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ 3x - 2y = 8 \end{cases}$

3. 解 $\begin{cases} 5x + 2y = -1 \\ 3x + 5y = 26 \end{cases}$

4. 解 $\begin{cases} 7x + 5y = -1 \\ 5x - 7y = 31 \end{cases}$



例題 10 解含分數的二元一次聯立方程式

解
$$\begin{cases} x = 3y + 1 & \dots\dots ① \\ \frac{1}{2}x + 3y = 5 & \dots\dots ② \end{cases}$$



牛刀小試 16

1. 解
$$\begin{cases} x = 3y + 1 \\ \frac{1}{2}x + 3y = 14 \end{cases}$$

2. 解
$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ \frac{1}{3}x + 2y = 13 \end{cases}$$

3.

[解答]

P1 牛刀小試 1	略		2.(1) $x = -10$																																							
P2 牛刀小試 2	1.(1) <table><tr><td>x</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td><td>2</td></tr></table> (2) <table><tr><td>x</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td></tr><tr><td>y</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr></table> (3) $\begin{cases} x = 5 \\ y = 3 \end{cases}$ 2.(1) <table><tr><td>x</td><td>1</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>9</td><td>7</td><td>5</td><td>3</td></tr></table> (2) <table><tr><td>x</td><td>7</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td></tr><tr><td>y</td><td>6</td><td>5</td><td>4</td><td>3</td></tr></table> (3) $\begin{cases} x = 4 \\ y = 3 \end{cases}$	x	3	4	5	6	y	5	4	3	2	x	3	4	5	6	y	1	2	3	4	x	1	2	3	4	y	9	7	5	3	x	7	6	5	4	y	6	5	4	3	P5 牛刀小試 5 <
x	3	4	5	6																																						
y	5	4	3	2																																						
x	3	4	5	6																																						
y	1	2	3	4																																						
x	1	2	3	4																																						
y	9	7	5	3																																						
x	7	6	5	4																																						
y	6	5	4	3																																						

P10 牛刀小試 10	(1) $\square$, 0 (2) $\square$, 0 (3) $\square$ + , 0 (4) $\square$ + , 0 (5) $\square$ - , $2y = 2$ (6) $\square$ + , $2x = 10$ (7) $\square$ + , $10y = 20$ (8) $\square$ - , $8x = 8$	P13 牛刀小試 13	4 (1) $\square$ + , $7y = 14$ (2) $\square$ - , $7x = 21$
P11 牛刀小試 11	1 (1) $\square$ - , $y = 2$ (2) $\square$ - , $-x = -3$ 2 (1) $\square$ - , $2y = 6$ (2) $\square$ - , $-2x = -4$ 3 (1) $\square$ - , $y = 1$ (2) $\square$ - , $x = 3$ 4 (1) $\square$ - , $2y = 6$ (2) $\square$ - , $2x = 8$	P14 牛刀小試 14	2 (1) $\square$ - , $5y = 5$ (2) $\square$ + , $5x = 15$ 3 (1) $\square$ - , $-9y = -9$ (2) $\square$ + , $27x = 81$ 4 (1) $\square$ - , $7y = 7$ (2) $\square$ + , $28x = 56$
P12 牛刀小試 12	1.(1) $\square$ + , $-y = -1$ (2) $\square$ + , $x = 3$ 2 (1) $\square$ + , $-2y = -6$ (2) $\square$ + , $2x = 4$ 3 (1) $\square$ + , $7y = 14$ (2) $\square$ - , $7x = 21$		1 (1) $\square$ - , $13y = -13$ (2) $\square$ + , $13x = 26$ 2 (1) $\square$ - , $19y = -19$ (2) $\square$ + , $19x = 38$ 3 (1) $\square$ + , $17y = 17$ (2) $\square$ - , $-17x = 17$ 4 (1) $\square$ + , $5y = 5$ (2) $\square$ + , $5x = 10$

P15 牛刀小試 15	$1(1) \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$ $(2) \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$ $2(1) \begin{cases} x = -3 \\ y = 7 \end{cases}$ $(2) \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases}$		
P16 牛刀小試 16	$1(1) \begin{cases} x = 10 \\ y = 3 \end{cases}$ $(2) \begin{cases} x = 9 \\ y = 5 \end{cases}$		