

數學 4

進階
講義

等軸雙曲線、共軛雙曲
線、雙曲線的伸縮

淡水商工 · 方志元 老師



信望愛文教基金會

14-3-5, 14-3-6 等軸雙曲線、共軛雙曲線、雙曲線的伸縮

定理敘述

(1)若貫軸與共軛軸等長，稱為**等軸雙曲線**。

(a) 標準式為：左右型： $\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ；上下型： $-\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1$ ($a > 0$)

(b) 不論是左右型或上下型，兩漸近線都互相垂直，其方程式為 $(x-h) \pm (y-k) = 0$

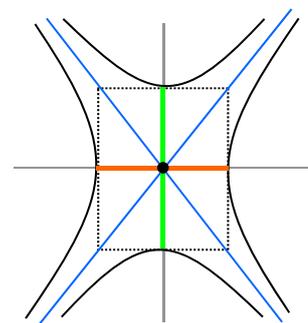
(2)右圖兩個雙曲線，一個為左右型，另一個為上下型，

且這兩個雙曲線有相同的中心點及漸近線，

則這兩個雙曲線互為**共軛雙曲線**。

(a) 由右圖可知，左右型的雙曲線的貫軸及共軛軸
會變成上下型雙曲線的共軛軸及貫軸。

(b) 兩個共軛雙曲線的標準式僅負號的位置不同而已。



(3)雙曲線的伸縮：將中心點為原點的雙曲線，以原點為中心，水平方向伸縮 s 倍，鉛垂方向伸縮 t 倍，則新的圖形仍為雙曲線。

(a) 已知左右型雙曲線為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$)，經伸縮後變為 $\frac{x^2}{(sa)^2} - \frac{y^2}{(tb)^2} = 1$

(b) 已知上下型雙曲線為 $-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$ ($a, b > 0$)，經伸縮後變為 $-\frac{x^2}{(sb)^2} + \frac{y^2}{(ta)^2} = 1$

定理證明或說明

(1)雙曲線的伸縮：

假設左右型雙曲線為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$)，設 $P(x, y)$ 為雙曲線上一點，以原點為中心，水平方向伸縮 s 倍，鉛垂方向伸縮 t 倍後，得新的點 $P'(x', y')$ 則

$$\begin{cases} x' = sx \\ y' = ty \end{cases} \quad \text{整理得} \quad \begin{cases} x = \frac{1}{s}x' \\ y = \frac{1}{t}y' \end{cases}$$

代回原雙曲線方程式得 $\frac{\left(\frac{1}{s}x'\right)^2}{a^2} - \frac{\left(\frac{1}{t}y'\right)^2}{b^2} = 1$ ，整理得 $\frac{(x')^2}{s^2a^2} - \frac{(y')^2}{t^2b^2} = 1$ ，也是一個雙曲線。

關鍵字

雙曲線、等軸雙曲線、共軛雙曲線、伸縮

例題 1

已知一等軸雙曲線的中心點為 $(0,0)$ ，兩焦點距離為 8，貫軸平行 x 軸，試求此雙曲線方程式。

Ans :

設此雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{a^2} = 1$ ，則 $c^2 = a^2 + a^2 = 4^2 = 16$ ，得 $a^2 = 8$ ， $a = \sqrt{8}$

故雙曲線方程式為 $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$ 。

例題 2

試求雙曲線 $\frac{(x-2)^2}{16} - \frac{(y-4)^2}{9} = 1$ 的共軛雙曲線。

Ans :

原雙曲線為左右型，中心點為 $(2,4)$ ，貫軸的一半長 $a = 4$ ，共軛軸的一半長 $b = 3$ 。

則共軛雙曲線為上下型，中心點亦為 $(2,4)$ ，貫軸的一半長為 3，共軛軸的一半長為 4，

故方程式為 $-\frac{(x-2)^2}{16} + \frac{(y-4)^2}{4} = 1$ 。

例題 3

將雙曲線 $-\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{9} = 1$ 以原點為中心，伸縮 2 倍，所得新雙曲線方程式為何？

Ans :

當沒有特別說明水平或鉛垂方向時，代表兩個方向同時伸縮相同倍數，

故新方程式為 $-\frac{x^2}{(2 \times 1)^2} + \frac{y^2}{(2 \times 3)^2} = 1$ 化簡得 $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$ 。

溫故知新

習題 1

已知 Γ 為一等軸雙曲線，試求兩漸近線的夾角。

習題 2

坐標平面上的一雙曲線 Γ ，其方程式為 $-\frac{x^2}{7} + \frac{y^2}{9} = 1$ ，若其共軛雙曲線為 Γ' ，

試求：(1) Γ' 的貫軸長；(2) Γ' 的焦點坐標。

習題 3

將雙曲線 $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$ 以原點為中心，水平方向伸縮 3 倍，鉛垂方向伸縮 2 倍，則伸縮後的新方程式為何？

解答與解析

習題 1 : 90° 。

習題 2 : (1) $2\sqrt{7}$ (2) $(\pm 4, 0)$ 。

習題 3 : $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{36} = 1$