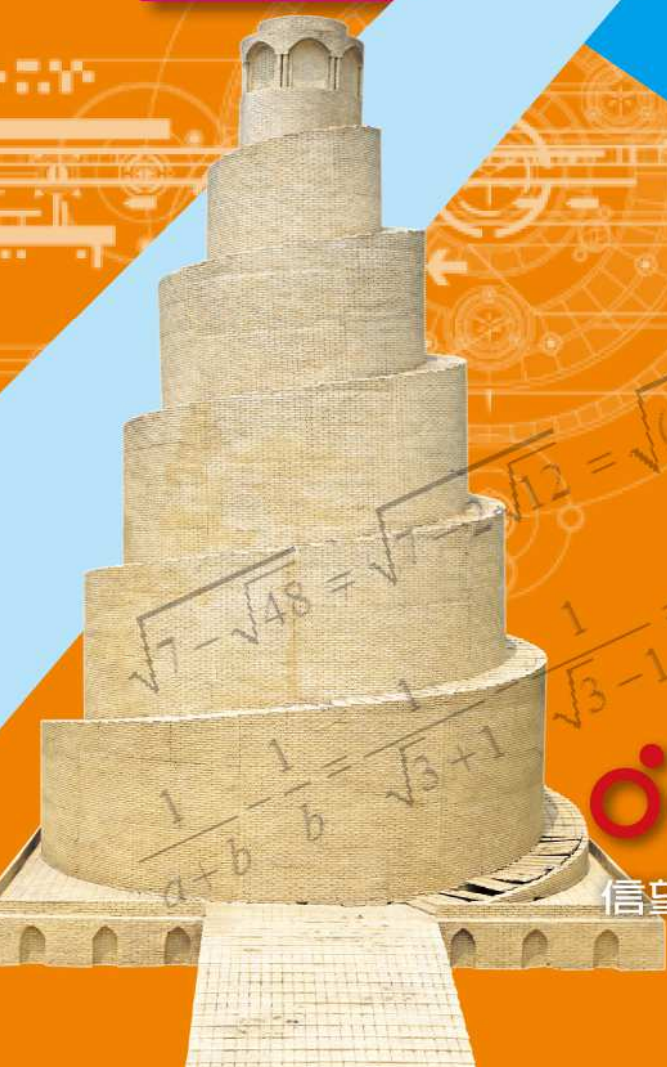


數學 1 進階講義

換底公式

景美女中・林哲安老師



信望愛文教基金會

3-3-3 換底公式

定理敘述

對數的換底公式：

設 a 、 b 、 c 均大於 0，且 $a \neq 1$ ， $c \neq 1$ ，

$$\text{則 } \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

定理證明或說明

證明：設 $\log_c b = x$ ， $\log_c a = y$ ，可知 $b = c^x$ ， $a = c^y$ 。

因為 $b = c^x = (c^y)^{\frac{x}{y}} = a^{\frac{x}{y}}$ ，所以可得 $\log_a b = \frac{x}{y} = \frac{\log_c b}{\log_c a}$ 。

注意事項

底數要大於 0 且不等於 1，真數要大於 0

單元內容

例題 1

求 $\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_{27} 6} + \frac{1}{\log_{24} 6}$ 的值。

Ans：

$$\frac{1}{\log_2 6} + \frac{1}{\log_{27} 6} + \frac{1}{\log_{24} 6} = \log_6 2 + \log_6 27 + \log_6 24 = \log_6 (2 \times 27 \times 24) = \log_6 6^4 = 4$$

例題 2

試求 $\log_7 4 \times \log_2 9 \times \log_9 13 \times \log_{13} 49$ 的值。

Ans :

$$\text{所求} = \frac{\log 2^2}{\log 7} \times \frac{\log 3^2}{\log 2} \times \frac{\log 13}{\log 3^2} \times \frac{\log 7^2}{\log 13} = \frac{2\log 2}{\log 7} \times \frac{2\log 3}{\log 2} \times \frac{\log 13}{2\log 3} \times \frac{2\log 7}{\log 13} = 4$$

例題 3

設 $\log_{10} 3 = a$ 、 $\log_{10} 5 = b$ ，請將下列各式用 a 、 b 表示。

(1) $\log_5 15$ 。 (2) $\log_2 25$ 。

Ans :

$$(1) \log_5 15 = \frac{\log_{10} 15}{\log_{10} 5} = \frac{\log_{10} 3 + \log_{10} 5}{\log_{10} 5} = \frac{a+b}{b}。$$

$$(2) \log_2 125 = \frac{\log_{10} 125}{\log_{10} 2} = \frac{\log_{10} 5^3}{\log_{10} \left(\frac{10}{5}\right)} = \frac{3\log_{10} 5}{\log_{10} 10 - \log_{10} 5} = \frac{3b}{1-b}。$$

例題 4

設 $a = \log_2 3$ 、 $b = \log_3 11$ ，將下列各式用 a 、 b 表示：

(1) $\log_2 11$ (2) $\log_{66} 99$

Ans :

$$(1) \log_2 11 = \frac{\log_3 11}{\log_3 2} = \frac{b}{\frac{1}{a}} = ab。$$

$$\text{或直接觀察 } \log_2 11 = \frac{\log_3 11}{\log_3 2} = \frac{b}{\frac{1}{a}} = ab$$

$$(2) \log_{66} 99 = \frac{\log_2 99}{\log_2 66} = \frac{\log_2 (3^2 \cdot 11)}{\log_2 (2 \cdot 3 \cdot 11)} = \frac{2\log_2 3 + \log_2 11}{1 + \log_2 3 + \log_2 11} = \frac{2a + ab}{1 + a + ab}。$$

例題 5

已知 $a^3 = x$ ， $\log_b x = 8$ ， $\log_c x = 24$ ，求 $\log_{abc} x$ 的值。

Ans :

$$a^3 = x \Rightarrow \log_x a = \frac{1}{\log_a x} = \frac{1}{3} ,$$

$$\log_x b = \frac{1}{\log_b x} = \frac{1}{8} ,$$

$$\log_x c = \frac{1}{\log_c x} = \frac{1}{24} .$$

$$\text{因此, } \log_{abc} x = \frac{1}{\log_x abc} = \frac{1}{\log_x a + \log_x b + \log_x c} = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{24}} = 2 .$$

例題 6

已知 $\log_2 3 = a$, $\log_3 7 = b$ 、 $\log_5 7 = c$, 試以 a 、 b 與 c 表示 $\log_{42} 420$ 。

Ans :

$$\begin{aligned} \log_{42} 420 &= \frac{\log_3 420}{\log_3 42} = \frac{\log_3 (4 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7)}{\log_3 (2 \cdot 3 \cdot 7)} = \frac{\log_3 2^2 + \log_3 3 + \log_3 5 + \log_3 7}{\log_3 2 + \log_3 3 + \log_3 7} \\ &= \frac{2\log_3 2 + 1 + \log_3 5 + \log_3 7}{\log_3 2 + 1 + \log_3 7} = \frac{\frac{2}{a} + 1 + \frac{b}{c} + b}{\frac{1}{a} + 1 + b} = \frac{2c + ac + ab + abc}{c + ac + abc} . \end{aligned}$$

$$(\log_3 7 = b , \log_7 5 = \frac{1}{c} , \log_3 7 \log_7 5 = \log_3 5 = \frac{b}{c})$$

例題 7

設 $a = \log\left(1 + \frac{1}{7}\right)$, $b = \log\left(1 + \frac{1}{49}\right)$, 試以 a , b 表示 $\log 4$ 。

Ans :

$$a = \log\left(1 + \frac{1}{7}\right) = \log \frac{8}{7} = \log 8 - \log 7 = \log 2^3 - \log 7 = 3\log 2 - \log 7 ,$$

$$b = \log\left(1 + \frac{1}{49}\right) = \log \frac{50}{49} = \log 50 - \log 49 = \log \frac{100}{2} - \log 7^2 = 2 - \log 2 - 2\log 7 ,$$

$$2a - b = 7\log 2 - 2 , \text{ 可得 } 7\log 2 = 2a - b + 2 ,$$

$$\log 2 = \frac{2a - b + 2}{7} .$$

$$\log 4 = \frac{4a - 2b + 4}{7}。$$



溫故知新

習題 1

$$\left(\log_2 \frac{1}{3}\right) \left(\log_3 \frac{1}{4}\right) \left(\log_4 \frac{1}{5}\right) \left(\log_5 \frac{1}{6}\right) \left(\log_6 \frac{1}{7}\right) \left(\log_7 \frac{1}{8}\right) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

習題 2

設 $\log_2 3 = a$ ， $\log_3 7 = b$ ，試以 a 、 b 表示 $\log_{84} 56 = \underline{\hspace{2cm}}。$

習題 3

$\log_2 3 = a$ ， $\log_2 5 = b$ ，則以 a 、 b 表示 $\log_{100} 150 = \underline{\hspace{2cm}}。$

習題 4

已知 a 、 b 為正整數，若 $\frac{a}{\log_2 200} + \frac{b}{\log_5 200} = 1$ ，試求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}。$

習題 5

已知 $\log_a x = 2$ ， $\log_b x = 3$ ， $\log_c x = 4$ ，求 $\log_{abc} x$ 的值。

習題 6

設 $\log \frac{3}{25} = a$ ， $\log 45 = b$ ，試以 a 、 b 表示 $\log 25 = \underline{\hspace{2cm}}。$



解答與解析

習題 1 : 3

習題 2 : $\frac{3+ab}{2+a+ab}$

習題 3 : $\frac{1+a+2ab}{2+2ab}$

習題 4 : $(3, 2)$

習題 5 : $\frac{12}{13}$

習題 6 : $\frac{2b-4a}{5}$