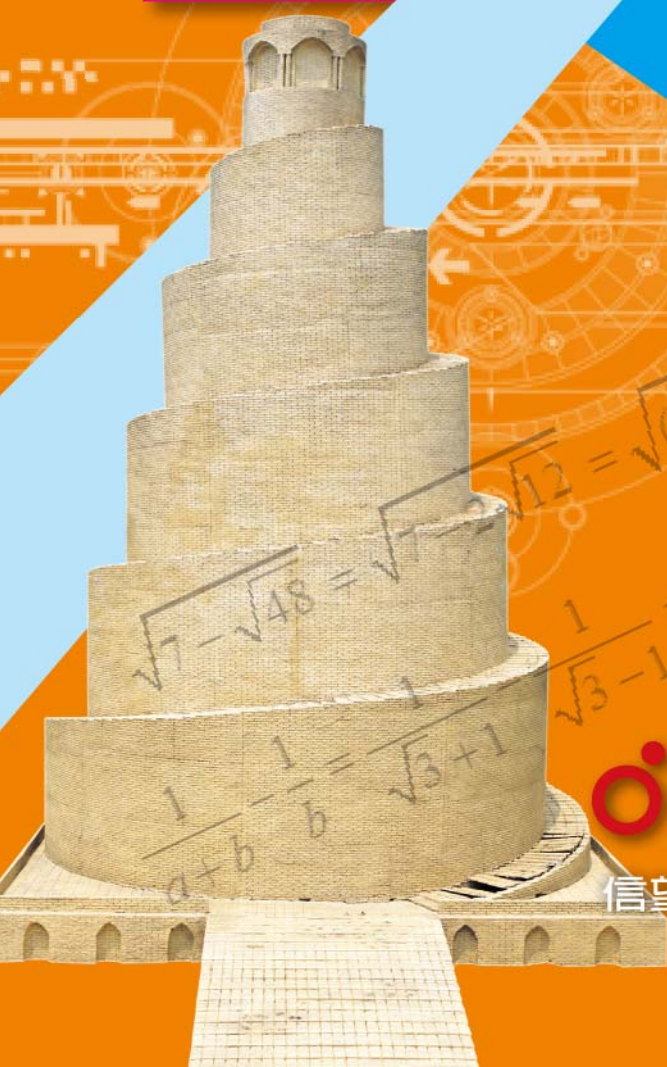


數學 3

進階
講義

二階行列式

成功高中 · 陳冠宏 老師



信望愛文教基金會

10-4-1 二階行列式



定理敘述

1. 二階行列式的定義： $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$
2. 二階行列式的性質（高階行列式亦適用）

直的稱為行，橫的稱為列

- (1) 行列互換，其值不變

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

- (2) 兩行（列）對調，其值變號

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b & a \\ d & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix}$$

- (3) 兩行（列）成比例，其值為 0

$$\begin{vmatrix} a & b \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ak & a \\ ck & c \end{vmatrix} = 0$$

- (4) 某一行（列）每一數都是 0，其值為 0

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & 0 \\ b & 0 \end{vmatrix} = 0$$

- (5) 同一行（列）可提出同一倍數

$$\begin{vmatrix} ka & kb \\ c & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} ka & b \\ kc & d \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$$

- (6) 任一行（列）同乘以 k 倍加至另一行（列），其值不變

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c + ak & d + bk \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b + ak \\ c & d + ck \end{vmatrix}$$

- (7) 加法分裂性

$$\begin{vmatrix} a + e & b \\ c + f & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} e & b \\ f & d \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} a + s & b + t \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} s & t \\ c & d \end{vmatrix}$$



定理證明或說明

➤ 二階行列式的性質

依二階行列式的定義，將左右兩邊展開即得證。

關鍵字

二階行列式

例題 1

試計算 $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : 35

解： $\begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 4 \times 5 - 3 \times (-5) = 35$

例題 2

試計算 $\begin{vmatrix} 2013 & 2014 \\ 102 & 103 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : 1911

解： $\begin{vmatrix} 2013 & 2014 \\ 102 & 103 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2013 & 1 \\ 102 & 1 \end{vmatrix}$ (將第 1 行乘-1 倍，加至第 2 行)
 $= 2013 - 102 = 1911$

例題 3

試計算 $\begin{vmatrix} 3 & 9 \\ 8 & 24 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : 0

解：第 2 行為第 1 行的 3 倍，兩行成比例，其值為 0

例題 4

試計算 $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 8 & 0 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : 0

解：第 2 行全為 0，其值為 0

例題 5

試計算 $\begin{vmatrix} 10 & 105 \\ 11 & 14 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : 1015

解： $\begin{vmatrix} 10 & 105 \\ 11 & 14 \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} 2 & 21 \\ 11 & 14 \end{vmatrix} = 5 \times 7 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 11 & 2 \end{vmatrix} = 35 \times (33 - 4) = 1015$

例題 6

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 5$ ，則 $\begin{vmatrix} 3a - 2c & 3b - 2d \\ a + 2c & b + 2d \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : 40

解：

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 3a - 2c & 3b - 2d \\ a + 2c & b + 2d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 4a & 4b \\ a + 2c & b + 2d \end{vmatrix} \quad (\text{第 2 列乘 1 倍加到第 1 列}) \\ &= 4 \begin{vmatrix} a & b \\ a + 2c & b + 2d \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} a & b \\ 2c & 2d \end{vmatrix} \quad (\text{第 1 列乘 -1 倍加到第 2 列}) \\ &= 4 \times 2 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 40 \end{aligned}$$



溫故知新

習題 1

關於二階行列式，下列哪些敘述是正確的？

- (A) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$ (B) $\begin{vmatrix} 5a & 5b \\ 5c & 5d \end{vmatrix} = 5 \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ (C) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c & d \\ a & b \end{vmatrix} = 0$
 (D) $\begin{vmatrix} 12 & 13 \\ 24 & 26 \end{vmatrix} = 0$ (E) $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a + 10b & b \\ c + 10d & d \end{vmatrix} = 0$

習題 2

試計算 $\begin{vmatrix} 2012 & 2014 \\ 2013 & 2015 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 3

試計算 $\begin{vmatrix} 14 & 30 \\ 9 & 21 \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 4

設 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 2$ ， $\begin{vmatrix} a & e \\ c & f \end{vmatrix} = 3$ ，求 $\begin{vmatrix} a & 3b - 4e \\ c & 3d - 4f \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 5

若 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = 6$ ，則 $\begin{vmatrix} 3a - 2c & 3b - 2d \\ 2a + c & 2b + d \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 6

已知 $\begin{vmatrix} 5\alpha - 7\beta & 4\alpha + \beta \\ 5\gamma - 7\delta & 4\gamma + \delta \end{vmatrix} = 66$ ，求 $\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \underline{\hspace{2cm}}$

習題 7

【學測 99】

已知 a, b 為整數且行列式 $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4$ ，則絕對值 $|a + b|$ 為何？

(1)16 (2)31 (3)32 (4)39 (5)條件不足，無法確定



習題 1：(A)(C)(D)(E)

習題 2：-2

習題 3：24

習題 4：-6

習題 5：42

習題 6：2

習題 7：(3)

解： $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow 35 - ab = 4 \Rightarrow ab = 31$ ， $\begin{vmatrix} a & 31 & 1 & -31 & -1 \\ b & 1 & 31 & -1 & -31 \end{vmatrix} \therefore |a + b| = 32$ ，故選(3)。