高中數學 進階講義

對數函數

陳清海 老師

信望愛文教基金會

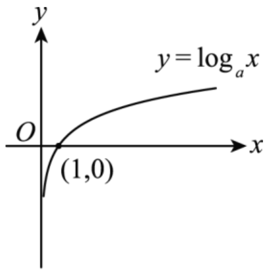
ok134　對數函數

一、對數函數

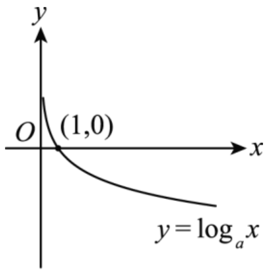
1. 定義：設 $a>0$，$a\neq 1$，$x>0$，稱 $y=f(x)=\log_a x$

   為以 a 為底數的對數函數．

2. 圖形與基本性質
   對數函數 $y=\log_a x$ 在 $a>1$ 與 $0<a<1$ 時的圖形如下：



$a>1$



$0<a<1$

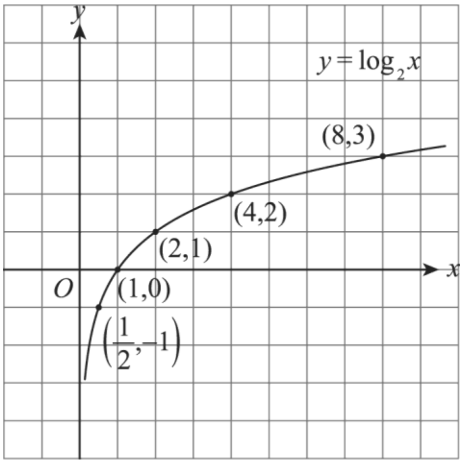
   函數圖形通過點 $(1,0)$，整個圖形在 y 軸右方，

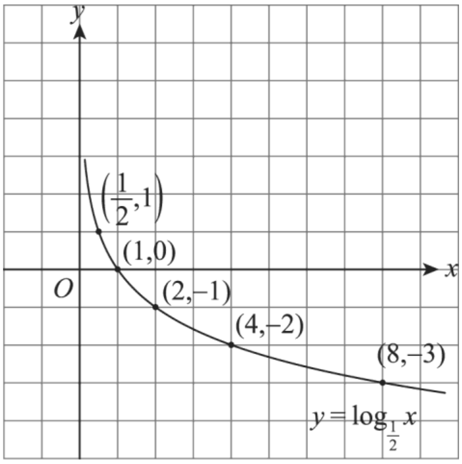
   且 y 軸為其漸近線．

【範例 1】

在下列的方格紙中作出 $y=\log_2 x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形．

【詳解】

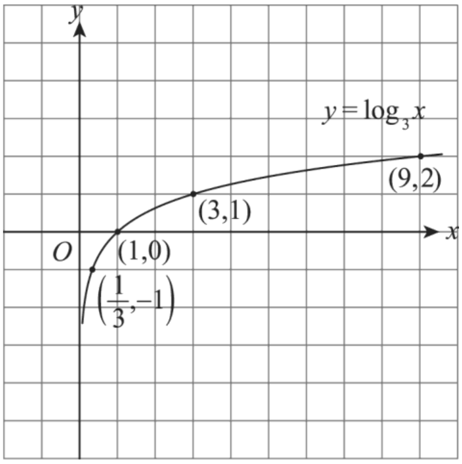


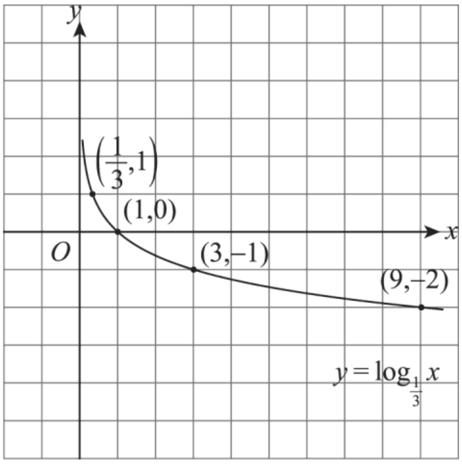


【演練 1】

已知 $y=\log_a x$ 的圖形與 $y=\log_3 x$ 的圖形對稱於 x 軸，試在下列的方格紙中作出 $y=\log_3 x$ 與 $y=\log_a x$ 的圖形．

【詳解】

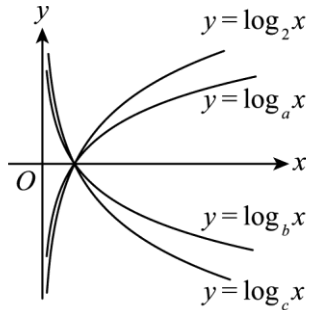




由圖可知： $a=\dfrac{1}{3}$．

【範例 2】

右圖為函數 $y=\log_a x$， $y=\log_b x$， $y=\log_c x$與 $y=\log_2 x$的圖形，且 $y=\log_c x$與 $y=\log_2 x$的圖形對稱於 x軸，選出正確的選項：



(1) $a>2$，
(2) $1<a<2$，
(3) $0<a<1$，
(4) $b>c$，
(5) $c=\frac{1}{2}$．

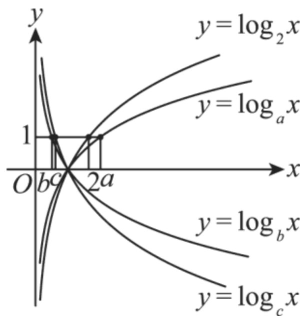
Ans：(1)(5)

【詳解】

由圖可知： $b<c<1<2<a$，

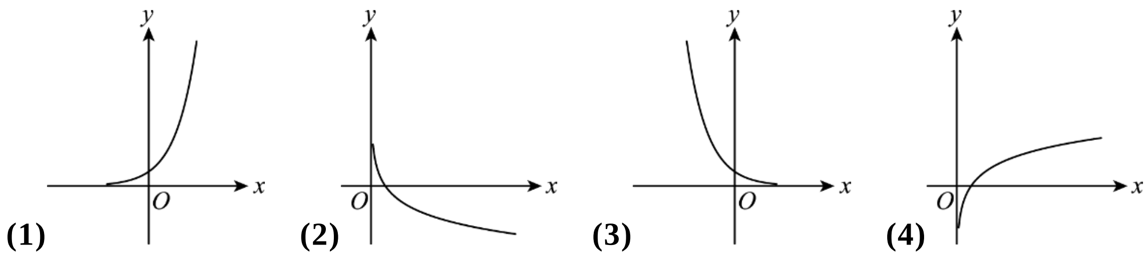
又 $y=\log_c x$與 $y=\log_2 x$的圖形對稱於 x 軸，所以 $c=\frac{1}{2}$．

故正確的選項為(1)(5)．



【演練 2】

設 $a>0$， $a\neq1$，則下列圖形中，哪些可能是對數函數 $y=\log_a x$的部分圖形：



Ans：(2)(4)．

【範例 3】

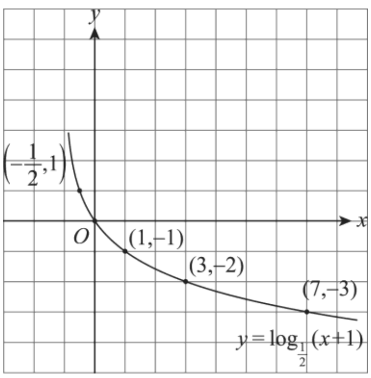
在下列的方格紙中作出 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}}2x$ 的圖形．

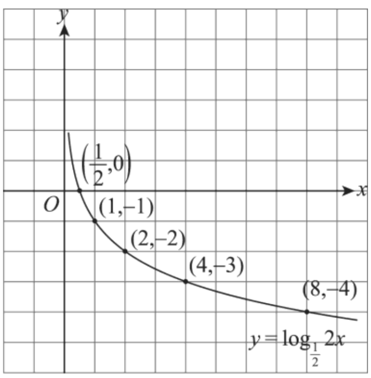
【詳解】

函數 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+1)$ 的圖形為函數 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的圖形向左平移一個單位．

因為 $y=\log_{\frac{1}{2}}2x=\log_{\frac{1}{2}}2+\log_{\frac{1}{2}}x=\log_{\frac{1}{2}}x-1$，

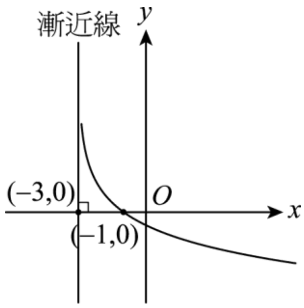
所以函數 $y=\log_{\frac{1}{2}}2x$ 的圖形為函數 $y=\log_{\frac{1}{2}}x$ 的圖形向下平移一個單位．





【演練 3】

若 $y=\log_{\frac{1}{2}}(x+a)+b$ 的圖形如右圖所示，則 (a,b) 可能為



(1) $(-3,-1)$，　**(2)** $(3,1)$，　**(3)** $(3,-1)$，

(4) $(5,2)$，　**(5)** $(9,3)$．

Ans：(2)

【詳解】

因為真數 $x+a>0$，即 $x>-a$，又漸近線為 $x=-3$，
所以 $x>-3$，即 $a=3$．

又當 $x=-1$ 時，$y=0$，因此 $\log_{\frac{1}{2}}(-1+3)+b=0$，

得 $b=-\log_{\frac{1}{2}}2$，$b=1$．

故 $(a,b)=(3,1)$，正確的選項為(2)．

二、圖解對數方程式

【範例 4】

求下列方程式的實根個數：

(1) $3^x = \log_{\frac{1}{2}} x$，　　**(2)** $\log_2|x| = -x-2$.

Ans：(1) 1，(2) 3

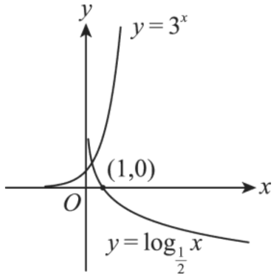
【詳解】

(1)　方程式 $3^x = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的實根個數等於

$y=3^x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ 兩圖形的交點個數 .

如圖，兩圖形有一交點，

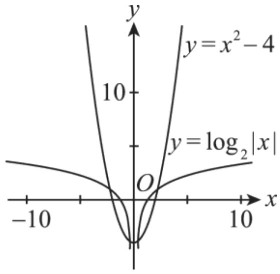
故方程式 $3^x = \log_{\frac{1}{2}} x$ 有 1 實根 .



(2)　方程式 $\log_2|x| = -x-2$ 的實根個數等於

$y=\log_2|x|$ 與 $y=-x-2$ 兩圖形的交點個數 .

如圖，兩圖形有三交點，故方程式 $\log_2|x| = -x-2$ 有 3 實根 .



【演練 4】

求下列方程式的實根個數：

(1) $\log_2|x| = x^2-4$，　　**(2)** $\log_2(-x)+x+5=0$.

Ans：(1) 4，(2) 2

【詳解】

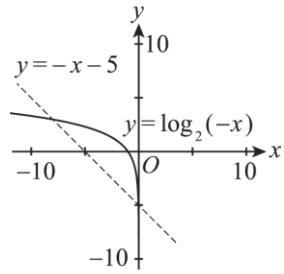
(1)　方程式 $\log_2|x| = x^2-4$ 的實根個數等於

$y=\log_2|x|$與$y=x^2-4$兩圖形的交點個數．

如圖，兩圖形有 4 個交點，

故方程式$\log_2|x|=x^2-4$有 4 實根．

(2) 方程式$\log_2(-x)+x+5=0$的實根個數

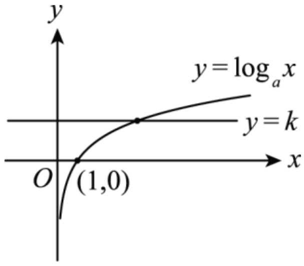


等於$y=\log_2(-x)$與$y=-x-5$兩圖形的交點個數．

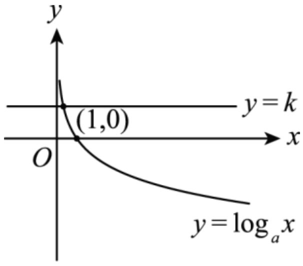
如圖，兩圖形有二交點，

故方程式$\log_2(-x)+x+5=0$有 2 實根．

三、對數方程式



$a>1$



$0<a<1$

因為對數函數 $y=\log_a x$的圖形與任意水平線都恰有一個交點，

所以當 $\log_a \alpha=\log_a \beta$時，可得 $\alpha=\beta$.

【範例 5-1】

解下列方程式：$\log_2(x-1)-\log_4(x^2-x-4)=\frac{1}{2}$.

Ans：x＝3

【詳解】

利用對數的性質得知

$\log_2(x-1)-\log_4(x^2-x-4)=\frac{1}{2}$ ，

$\Rightarrow \frac{\log(x-1)}{\log 2}-\frac{\log(x^2-x-4)}{2\log 2}=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow 2\log(x-1)-\log(x^2-x-4)=\log 2$

$\Rightarrow \log(x-1)^2-\log(x^2-x-4)=\log 2$

$\Rightarrow \log\frac{(x-1)^2}{x^2-x-4}=\log 2$

$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{x^2-x-4}=2$

$\Rightarrow x^2-2x+1=2(x^2-x-4)$

$\Rightarrow x^2-9=0$

$\Rightarrow x=\pm 3$.

當 $x=-3$時，會使得對數 $\log_2(x-1)$的真數小於 0，故 $x=-3$不合 .

因此， $x=3$.

【範例 5-2】

解下列方程式：$\log_x 4-\log_2 x=1$.

Ans：$\frac{1}{4}$或 2

【詳解】

利用對數的性質得知 $\log_x 4-\log_2 x=1 \Rightarrow 2\log_x 2-\log_2 x=1$.

令 $t=\log_2 x$. 則方程式可改寫為 $\frac{2}{t}-t=1$，即 $t^2+t-2=0$，

解得 $t=-2$或 1 . 因此， $\log_2 x=-2$或 1 .

故 $x=2^{-2}$或 2^1，即 $x=\frac{1}{4}$或 2 .

【演練 5】

解下列方程式：

(1) $\log_3(3^x+243)=\frac{x}{2}+2+\log_3 4$.　　**(2)** $\log_x 100=3\log x+5$.

Ans：(1) 4 或 6，(2) $x=\sqrt[3]{10}$ 或 $\frac{1}{100}$

【詳解】

(1) 利用對數的性質得知

$$\log_3(3^x+243)=\frac{x}{2}+2+\log_3 4 \Rightarrow \log_3(3^x+243)=\log_3\left(3^{\frac{x}{2}}\cdot 3^2\cdot 4\right),$$

因此 $3^x+243=36\cdot 3^{\frac{x}{2}}$. 令 $t=3^{\frac{x}{2}}$.

則方程式可改寫為 $t^2+243=36t$，即 $t^2-36t+243=0$.

解得 $t=9$或 27 . 因此，$3^{\frac{x}{2}}=9$或 27，解得 $x=4$或 6 .

(2) 利用對數的性質得知

$$\log_x 100=3\log x+5 \Rightarrow 2\log_x 10=3\log_{10}x+5 \Rightarrow \frac{2}{\log_{10}x}=3\log_{10}x+5 .$$

令 $t=\log_{10}x$. 則方程式可改寫為 $\frac{2}{t}=3t+5$，

即 $3t^2+5t-2=0$，解得 $t=\frac{1}{3}$或-2 . 因此，$\log_{10}x=\frac{1}{3}$或-2 .

故 $x=10^{\frac{1}{3}}$或10^{-2}，即 $x=\sqrt[3]{10}$ 或 $\frac{1}{100}$.

【範例 6】

解方程式：$x^{\log x}=10^6 x$.

Ans：1000 或 $\frac{1}{100}$

【詳解】

將 $x^{\log x}=10^6 x$兩邊取對數，得 $\log\left(x^{\log x}\right)=\log\left(10^6 x\right)$，

整理得 $(\log x)^2-\log x-6=0$，因式分解得 $(\log x-3)(\log x+2)=0$，

即 $\log x=3$或 $\log x=-2$，因此，$x=10^3=1000$或 $x=10^{-2}=\frac{1}{100}$.

【演練 6】

解方程式： $x^{\log 10x}=100$ **.**

Ans： $x=10$ 或 $\frac{1}{100}$

【詳解】

將 $x^{\log 10x}=100$ 兩邊取對數，

得 $\log\left(x^{\log 10x}\right)=\log 100$，

即 $(1+\log x)\log x=2$，

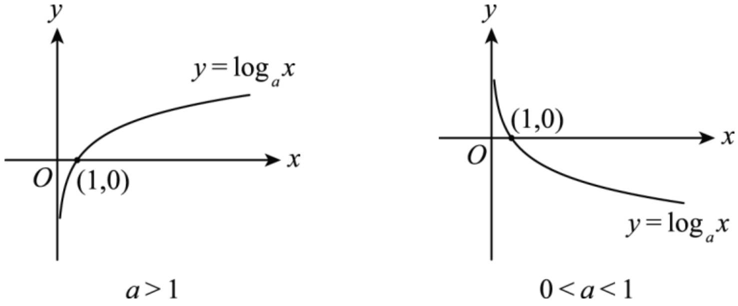
整理得 $(\log x)^2+\log x-2=0$，

因式分解得 $(\log x-1)(\log x+2)=0$，

即 $\log x=1$ 或 $\log x=-2$，

因此， $x=10$ 或 $x=10^{-2}=\frac{1}{100}$.

四、對數不等式



觀察對數函數圖形，可得

(1) 當 $a>1$時，圖形由左向右爬升，即「若 $x_1>x_2$，
則 $\log_a x_1>\log_a x_2$」.

(2) 當 $0<a<1$時，圖形由左向右下降，即「若 $x_1>x_2$，
則 $\log_a x_1<\log_a x_2$」.

【範例 7】

比較 $a=\log_{\frac{1}{8}}10$，$b=\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{10}$，$c=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{10}$，$d=1$四數的大小關係．

Ans：a＜d＜b＜c

【詳解】

利用對數的性質，將 a，b，c，d 四數改寫為

$a=-\frac{1}{3}\log_2 10=\log_2 10^{-\frac{1}{3}}$，

$b=\frac{1}{2}\log_2 10=\log_2 10^{\frac{1}{2}}$，

$c=\log_2 10$，

$d=\log_2 2$

因為 $10>10^{\frac{1}{2}}>2>10^{-\frac{1}{3}}$ 且底數 $2>1$，

所以 $c>b>d>a$ ．

【演練 7】

比較 $a=\log_{\frac{1}{5}}3$，$b=\log_{\frac{1}{5}}\frac{1}{3}$，$c=\log_{\frac{1}{3}}5$，$d=1$四數的大小關係．

Ans：$d>b>a>c$

【詳解】

將 a，b，c 三數改寫為

$a=-\log_5 3$，$b=\log_5 3$，$c=-\log_3 5$

因為 $0<\log_5 3<1$，$\log_3 5>1$，

所以 $1>b>0>a>-1>c$，

即 $d>b>a>c$ ．

【範例 8】

解下列不等式：

(1) $\log_6\left(x^2-3x+2\right)<1$ ．　　**(2)** $1+\log_{\frac{1}{2}}\left(x-1\right)>\log_{\frac{1}{4}}\left(4-x\right)$ ．

Ans：(1) $-1<x<1$ 或 $2<x<4$，(2) $1<x<3$

【詳解】

(1)　將不等式 $\log_6\left(x^2-3x+2\right)<1$ 改為 $\log_6\left(x^2-3x+2\right)<\log_6 6$ ．

因為底數 $6>1$，所以 $x^2-3x+2<6$，即 $x^2-3x-4<0$，
解得 $-1<x<4$.
又因為真數 $x^2-3x+2>0$，所以 $x>2$或 $x<1$.
因此，將兩不等式聯立得 $-1<x<1$或 $2<x<4$.

(2) 將不等式 $1+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)>\log_{\frac{1}{4}}(4-x)$

改寫為 $\log_{\frac{1}{4}}\frac{1}{4}(x-1)^2>\log_{\frac{1}{4}}(4-x)$.

因為底數 $\frac{1}{4}<1$，所以 $\frac{1}{4}(x-1)^2<4-x$，

即 $x^2+2x-15<0$，解得 $-5<x<3$.
又因為真數 $x-1>0$且 $4-x>0$，所以 $1<x<4$.
將兩不等式聯立，可得 $1<x<3$.

【演練 8】

解下列不等式：

(1) $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)<\log_{\frac{1}{4}}(8-x)$.

(2) $0\le\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)<1$.

Ans：(1) $4<x<8$，(2) $\frac{1}{4}<x\le\frac{1}{2}$

【詳解】

(1) 不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-2)<\log_{\frac{1}{4}}(8-x)$

改寫為 $\log_{\frac{1}{4}}(x-2)^2<\log_{\frac{1}{4}}(8-x)$.

因為底數 $\frac{1}{4}<1$，所以 $(x-2)^2>8-x$，

即 $x^2-3x-4>0$，解得 $x>4$或 $x<-1$.
又因為真數 $x-2>0$，$8-x>0$，所以 $2<x<8$.
將兩不等式聯立，可得 $4<x<8$.

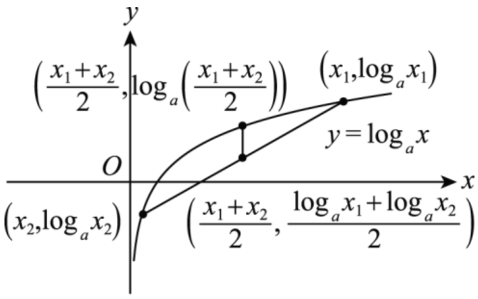
(2) $0\le\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)<1\Rightarrow\log_2 1\le\log_2\left(\log_{\frac{1}{2}}x\right)<\log_2 2$

$\Rightarrow 1 \le \log_{\frac{1}{2}} x < 2$（因為底數 $2>1$）

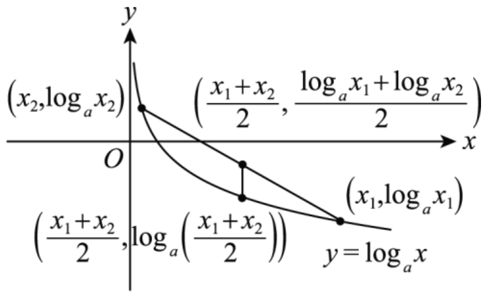
$\Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \le \log_{\frac{1}{2}} x < \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{4}$

$\Rightarrow \frac{1}{4} < x \le \frac{1}{2}$（因為底數 $\frac{1}{2} < 1$）

五、凹向性



$a>1$



$0<a<1$

觀察對數函數圖形，可得

(1) 當 $a>1$時，其圖形凹口向下，即 $\frac{\log_a x_1+\log_a x_2}{2} \le \log_a \frac{x_1+x_2}{2}$.

(2) 當 $0<a<1$時，其圖形凹口向上，即 $\frac{\log_a x_1+\log_a x_2}{2} \ge \log_a \frac{x_1+x_2}{2}$.

【範例 9】

設 $a>b>1000$，

$p=\sqrt{\log_7 a\times\log_7 b}$， $q=\frac{1}{2}(\log_7 a+\log_7 b)$， $r=\log_7\left(\frac{a+b}{2}\right)$．

試比較 p， q， r 三數的大小關係．

Ans：r＞q＞p

【詳解】

因為 $a>b>1000$，所以 $\log_7 a>\log_7 b>0$ ．

由算幾不等式可知： $\frac{1}{2}(\log_7 a+\log_7 b)>\sqrt{\log_7 a\times\log_7 b}$ ．

又因為底數 $7>1$，所以 $y=\log_7 x$ 的圖形凹口向下，可得

$\log_7\left(\frac{a+b}{2}\right)>\frac{1}{2}(\log_7 a+\log_7 b)$ ．

故 $r>q>p$ ．

【演練 9】

設 $a>b>1000$，

$p=\sqrt{\log_{0.7} a\times\log_{0.7} b}$， $q=\frac{1}{2}(\log_{0.7} a+\log_{0.7} b)$， $r=\log_{0.7}\left(\frac{a+b}{2}\right)$．

試比較 p， q， r 三數的大小關係．

Ans： $p>q>r$

【詳解】

因為 $a>b>1000$，所以 $0>\log_{0.7} b>\log_{0.7} a$，

且 $r=\log_{0.7}\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ ．

因此 $p>0$， q， $r<0$ ．

因為底數 $0.7<1$，所以 $y=\log_{0.7} x$ 的圖形凹口向上，可得

$\log_{0.7}\left(\frac{a+b}{2}\right)<\frac{1}{2}(\log_{0.7} a+\log_{0.7} b)$ ．

因此 $p>q>r$ ．

ok134ex

一、基礎題

1. 若 (a,b) 是對數函數 $y=\log x$ 圖形上一點，則下列哪些選項中的點也在該對數函數的圖形上?

(1) $(1,0)$，**(2)** $(10a,b+1)$，**(3)** $(2a,2b)$，**(4)** $\left(\frac{1}{a},1-b\right)$，**(5)** $(a^2,2b)$. **【98 指乙】**

Ans：(1)(2)(5)

【詳解】

(a，b)是對數函數 $y=\log x$ 圖形上一點，故 $\log a=b$。

(1) $y=\log x$ 必通過(1，0)。

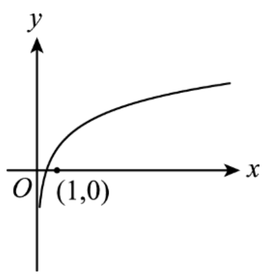
(2) $y=\log(10a)=\log 10+\log a=1+b$。

(3) $y=\log 2a=\log 2+\log a=\log 2+b\neq 2b$。

(4) $y=\log\frac{1}{a}=-\log a=-b\neq 1-b$。

(5) $y=\log a^2=2\log a=2b$。

2. 右圖為函數 $y=\log_a bx$ 的部分圖形，其中 a，b 均為常數，選出正確的選項：



(1) $a>1$，$b>1$，

(2) $0<a<1$，$b>1$，

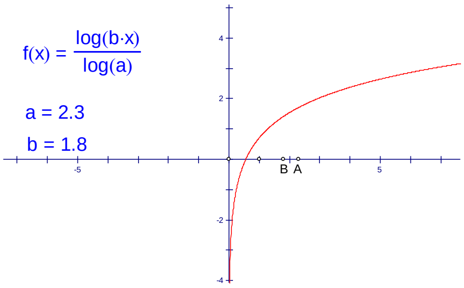
(3) $a>1$，$0<b<1$，

(4) $0<a<1$，$0<b<1$，

(5) $a>1$，$b=1$.

Ans：(1)

【詳解】



3. 下列五組數中，哪幾組的兩個函數之圖形對稱於直線 $y=x$?

(1) $y=2^x$ 與 $y=\left(\dfrac{1}{2}\right)^x$，

(2) $y=2^x$ 與 $y=\log_2 x$，

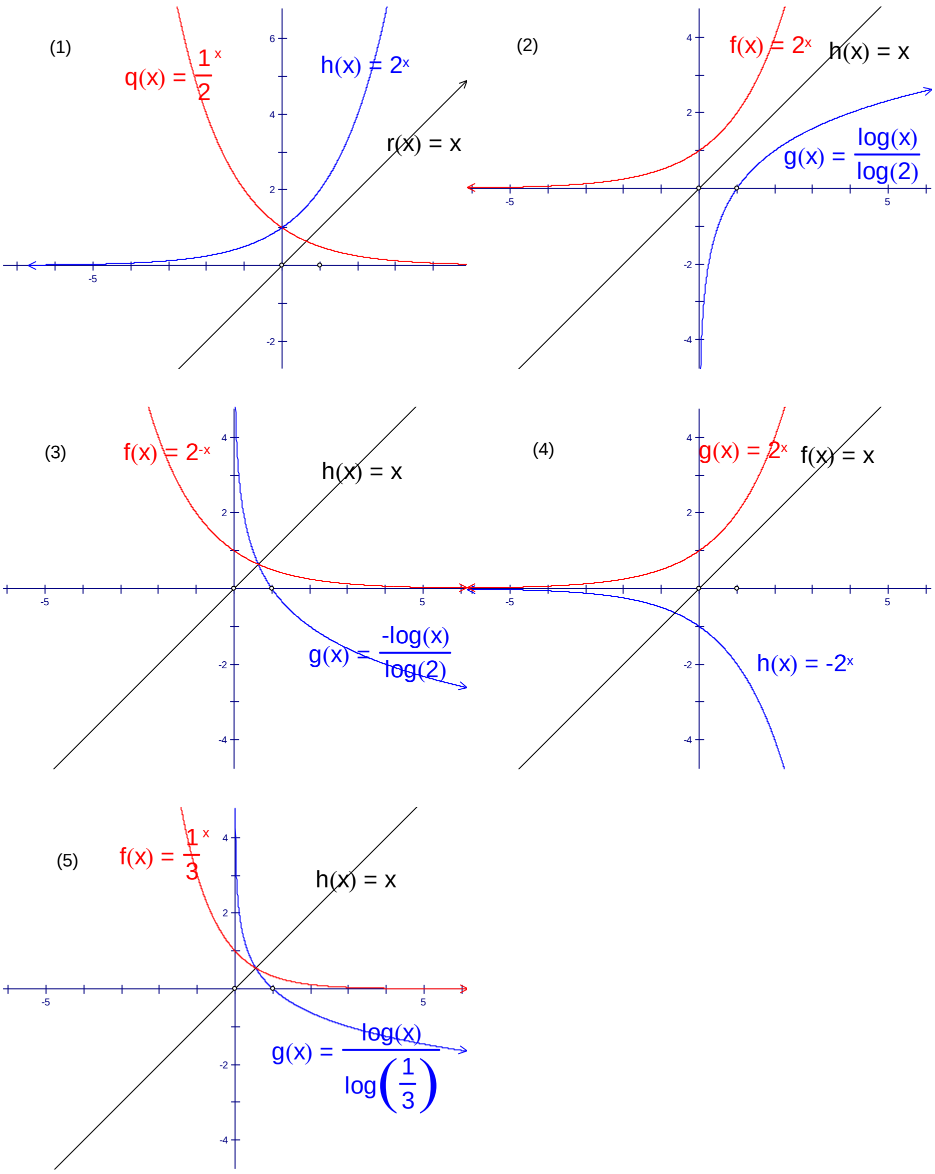
(3) $y=2^{-x}$ 與 $y=-\log_2 x$，

(4) $y=2^x$ 與 $y=-2^x$，

(5) $y=\left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ 與 $y=\log_{\frac{1}{3}} x$.

Ans：(2)(3)(5)

【詳解】



4. 解下列方程式：

(1) $\log_5 x+\log_5(x-4)=1$.

(2) $\log_2(x+3)-\log_2(x-1)=1$.

(3) $1+\log_4(x-1)=\log_2(x-9)$.

Ans：(1) 5，(2) 5，(3) 17

【詳解】

(1) $\log_5 x+\log_5(x-4)=1$

$\Rightarrow \log_5 x(x-4)=1$

$\Rightarrow x(x-4)=5$

$\Rightarrow x^2-4x-5=0$

$\Rightarrow (x-5)(x+1)=0$

$\Rightarrow x=5$ 或 $x=1$。

但 $x>4$，$x>0$

故 $x=5$。

(2) $\log_2(x+3)-\log_2(x-1)=1$

$\Rightarrow \log_2(\dfrac{x+3}{x-1})=1$

$\Rightarrow \dfrac{x+3}{x-1}=2$

$\Rightarrow x+3=2(x-1)$

$\Rightarrow x=5$。

(3) $1+\log_4(x-1)=\log_2(x-9)$

$\Rightarrow 1+\dfrac{\log(x-1)}{2\log 2}=\dfrac{\log(x-9)}{\log 2}$

$\Rightarrow 2\log 2+\log(x-1)=2\log(x-9)$

$\Rightarrow \log 4+\log(x-1)=\log(x-9)^2$

$\Rightarrow 4(x-1)=(x-9)^2$

$\Rightarrow x^2-22x+85=0$

$\Rightarrow (x-5)(x-17)=0$

$\Rightarrow x=17$ 或 $x=5$(不合)。

5.　解下列不等式：

(1) $\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{9}}(x+5)$.

(2) $\log_3(2x+3)+\log_3(x-2)<\log_{\sqrt{3}}(x+4)$.

Ans：(1)　$1<x<4$，(2)　$2<x<11$

【詳解】

(1)　$\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>\log_{\frac{1}{9}}(x+5)$

$$\Rightarrow \frac{\log(x-1)}{\log\frac{1}{3}}>\frac{\log(x+5)}{\log\frac{1}{9}}$$

$$\Rightarrow \frac{\log(x-1)}{-\log 3}>\frac{\log(x+5)}{-2\log 3}$$

$\Rightarrow 2\log(x-1)<\log(x+5)$

$\Rightarrow (x-1)^2<x+5$

$\Rightarrow x^2-3x-4<0$

$\Rightarrow (x-4)(x+1)<0$

$\Rightarrow -1<x<4$，但 $x>1$，

$\Rightarrow 1<x<4$。

(2)　$\log_3(2x+3)+\log_3(x-2)<\log_{\sqrt{3}}(x+4)$

$$\Rightarrow \frac{\log(2x+3)}{\log 3}+\frac{\log(x-2)}{\log 3}<\frac{\log(x+4)}{\frac{1}{2}\log 3}$$

$\Rightarrow \log(2x+3)+\log(x-2)<2\log(x+4)$

$\Rightarrow (2x+3)(x-2)<(x+4)^2$

$\Rightarrow x^2-9x-22<0$

$\Rightarrow (x-11)(x+2)<0$

$\Rightarrow -2<x<11$，但 $x>2$

$\Rightarrow 2<x<11$。

6. 將 $y=\log_2 x$ 的圖形沿 x 軸向右平移 **2** 個單位，再沿 y 軸向下平移 **4** 個單位得圖形 G，若 G 為函數 $y=g(x)$，則 $g(10)$ 的值為何?

Ans：-1

【詳解】

$y = g(x) = \log_2(x-2) - 4$，

$g(10) = \log_2(10-2) - 4 = \log_2 8 - 4 = 2 - 4 = -1$。

7. **選出正確的選項：**

(1) 若 $a>b>1$，則 $\log_a b>1$．

(2) 若 $a>b>1$，則 $\log_b a<1$．

(3) 若 $a>1>b>0$，則 $\log_b a>0$．

(4) 若 $1>a>b>0$，則 $\log_a b>1$．

(5) 若 $1>b>a>0$，則 $0<\log_a b<1$．

Ans：(4)(5)

【詳解】

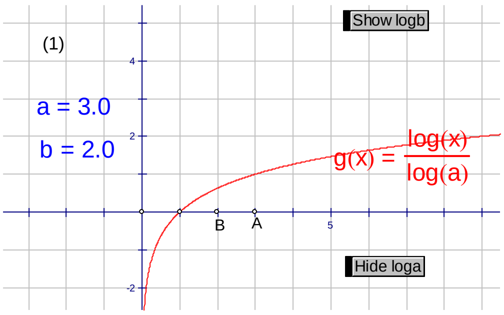
(1) 若 $a>b>1$，則 $\log_a b < \log_a a = 1$．

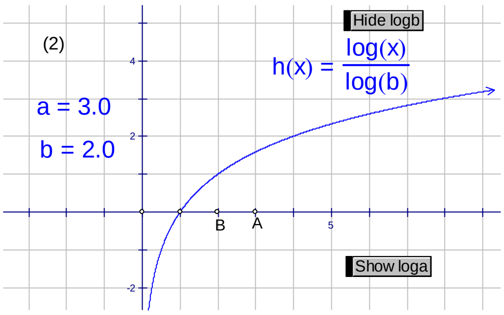
(2) 若 $a>b>1$，則 $\log_b a > \log_b b = 1$．

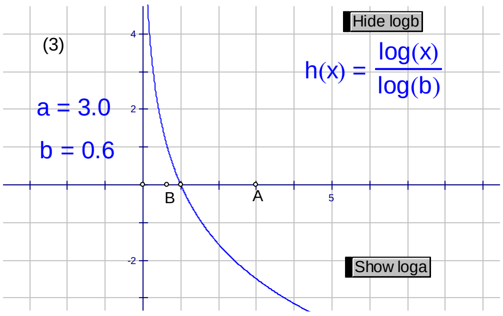
(3) 若 $a>1>b>0$，則 $\log_b a < 0$．

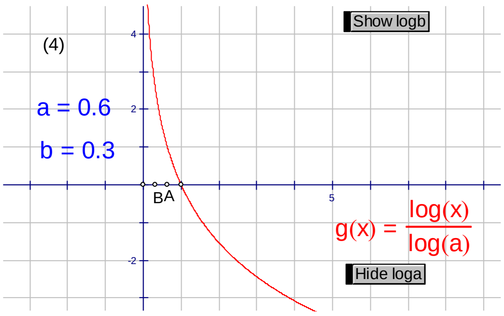
(4) 若 $1>a>b>0$，則 $\log_a b>1$．

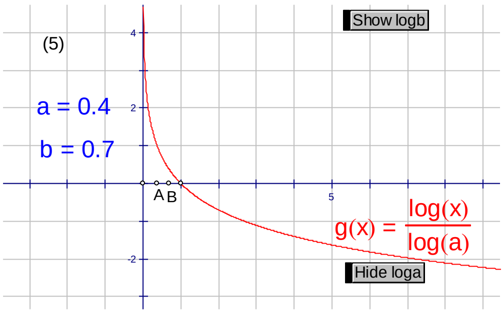
(5) 若 $1>b>a>0$，則 $0<\log_a b<1$．





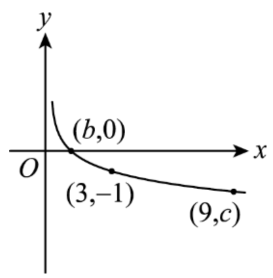






二、進階題

8.　已知函數 $y=\log_a(x-1)$ 的圖形通過 $(b,0)$，$(3,-1)$，$(9,c)$ 三點，如右圖所示，求 $a+b+c$ 的值．



Ans：$-\frac{1}{2}$

【詳解】

$y=f(x)=\log_a(x-1)$，

$(b，0)$代入 $\Rightarrow \log_a(b-1)=0\Rightarrow b-1=a^0=1\Rightarrow b=2$。

$(3，-1)$代入 $\Rightarrow \log_a(3-1)=-1\Rightarrow a^{-1}=2\Rightarrow a=\frac{1}{2}$。

$(9，c)$代入 $\Rightarrow \log_a(9-1)=c\Rightarrow a^c=8\Rightarrow (\frac{1}{2})^c=8\Rightarrow c=-3$。

故 $a+b+c=\frac{1}{2}+2-3=-\frac{1}{2}$。

9.　已知 $1<a<b<a^2$，試比較 $\log_a b$，$\log_b a$，$\log_a\frac{a}{b}$，$\log_b\frac{b}{a}$ 四數的大小關係．

Ans：$\log_a b>\log_b a>\log_b\frac{b}{a}>\log_a\frac{a}{b}$

【詳解】

$1<a<b<a^2 \Rightarrow 0=\log 1<\log a<\log b<2\log a$。

$\log_a b-\log_b a=\frac{\log b}{\log a}-\frac{\log a}{\log b}=\frac{(\log b)^2-(\log a)^2}{\log a\cdot\log b}>0$，

故 $\log_a b>\log_b a$。

$\log_b a-\log_b\frac{b}{a}=\frac{\log a}{\log b}-\frac{\log b-\log a}{\log b}=\frac{2\log a-\log b}{\log b}>0$，

故 $\log_b a>\log_b\frac{b}{a}$。

$\log_b\frac{b}{a}-\log_a\frac{a}{b}=1-\log_b a-(1-\log_a b)=\log_a b-\log_b a>0$，

故 $\log_b\frac{b}{a}>\log_a\frac{a}{b}$。

由上討論得 $\log_a b>\log_b a>\log_b\frac{b}{a}>\log_a\frac{a}{b}$。

10. 若 $\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(\log_4 x)\right)$恆有意義，則 x的範圍為何?

Ans：$1<x<4$

【詳解】

$\log_2\left(\log_{\frac{1}{3}}(\log_4 x)\right)$恆有意義

$\Rightarrow 0<\log_{\frac{1}{3}}(\log_4 x))$

$\Rightarrow 0<\log_4 x<1$

$\Rightarrow 1<x<4$。

9. 已知 $a\geq b>1$，求 $\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)+\log_b\left(\dfrac{b}{a}\right)$的最大值．

Ans：0

【詳解】

$\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)+\log_b\left(\dfrac{b}{a}\right)$

$=\dfrac{\log a-\log b}{\log a}+\dfrac{\log b-\log a}{\log b}$

$=\dfrac{(\log a)(\log b)-(\log b)^2+(\log a)(\log b)-(\log a)^2}{(\log a)(\log b)}$

$=2-\dfrac{(\log a)^2+(\log b)^2}{(\log a)(\log b)}$，

又$(\log a)^2+(\log b)^2\geqq 2\sqrt{(\log a)^2(\log b)^2}=2(\log a)(\log b)$，

故 $\log_a\left(\dfrac{a}{b}\right)+\log_b\left(\dfrac{b}{a}\right)\leqq 2-2=0$。

10. 設 2 和 $\dfrac{1}{8}$是方程式 $\log_2 x+a\log_x 8+b=0$的兩個根，求實數 a，b的值．

Ans：$a=-1$，$b=2$

【詳解】

$\log_2 x + a\log_x 8 + b = 0$，

2 代入⇒ $\log_2 2 + a \cdot \log_2 8 + b = 0 \Rightarrow 1 + 3a + b = 0$，

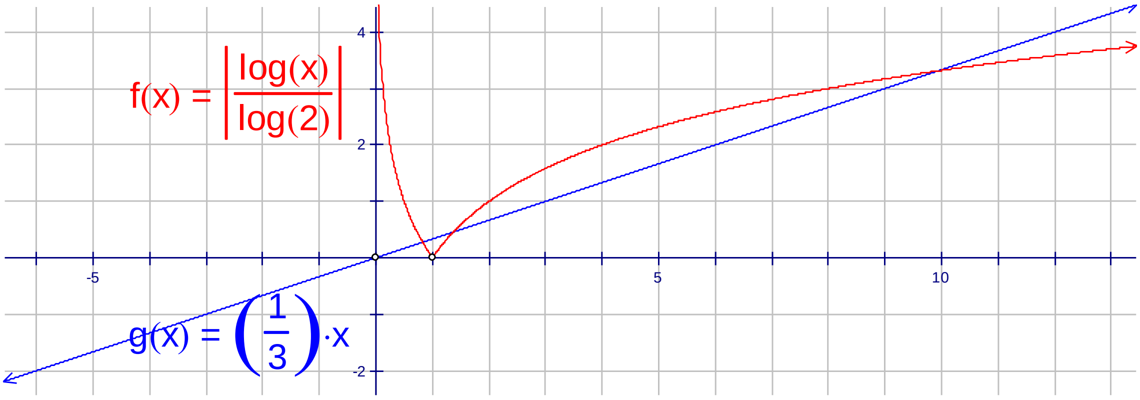
$\frac{1}{8}$代入 ⇒ $\log_2 \frac{1}{8} + a\log_{\frac{1}{8}} 8 + b = 0 \Rightarrow -3 - a + b = 0$，

解得 $a = -1$，$b = 2$。

11.　試問：方程式$|\log_2 x| = \frac{1}{3}x$有幾個實根．

Ans：3

【詳解】



由上圖得兩圖形有三個交點，故方程式$|\log_2 x| = \frac{1}{3}x$有 3 個實根。