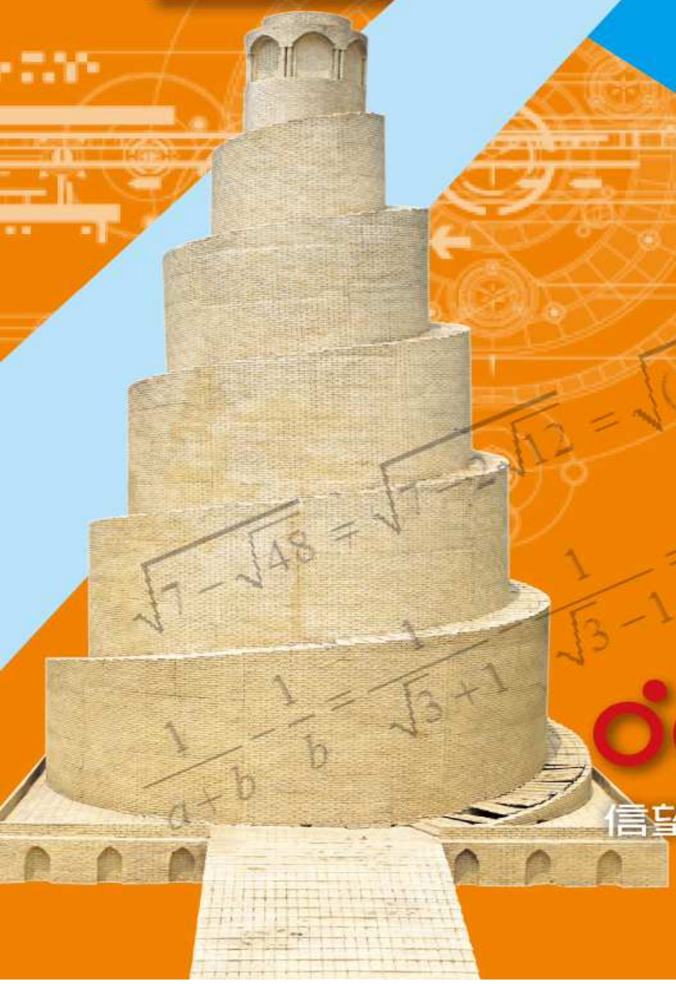
高中數學 進階講義

排列

陳清海 老師



信望愛文教基金會

lt99ok222 排列

主題一、直線排列

1. 將 n 個不同的事物排成一列，共有 $n!$ 種排法．
2. 從 n 個不同事物中任選 k 個（$1\le k\le n$）排成一列，共有

   $P_k^n=n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+2)(n-k+1)=\dfrac{n!}{(n-k)!}$ 種排法．

【例題 1】【配合課本例 1】

甲乙丙一起騎三人協力車，求三人安排座位的方案有多少種呢?

Ans：6

【詳解】

安排座位的方案有 $3!=3\times2\times1=6$（種）.

【類題 1】

學校舉辦獨唱比賽共有 5 位同學報名參加，出場順序由抽籤決定．請問共有多少種可能的抽籤結果?

Ans：120

【詳解】

抽籤的結果可視作將 5 位參賽者排成一列，

其中排在最左邊代表第 1 位出場，

其後依次為第 2，3，4，5 位出場．

因為 5 位參賽者排成一列共有

$5!=5\times4\times3\times2\times1=120$ 種排法，

所以抽籤結果也有 120 種．

【例題 2】【配合課本例 2】

川劇變臉是將選定的臉譜依序黏在臉上，藉快速逐一扯下臉譜達到變臉效果的把戲．今變臉師傅想從 8 張臉譜中，選出 5 張並依序表演一段變臉秀，共有多少種方法?

Ans：6720

【詳解】

從 8 張臉譜中，任選 5 張排成一列的方法數，共有

$P_5^8=\dfrac{8!}{(8-5)!}=\dfrac{8!}{3!}=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4=6720$（種）.

【類題 2】

學校想從 7 個參觀地點中，選出 4 個依序參訪，其安排的方案共有多少種?

Ans：840

【詳解】

安排的方案共有

$P_4^7 = \dfrac{7!}{(7-4)!} = \dfrac{7!}{3!} = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4 = 840$ （種）.

【例題 3】【常考題】

設 $P_3^{2n} = 28\cdot P_2^n$，求正整數 n 的值．

Ans：4

【詳解】

因為 $P_3^{2n} = 28\cdot P_2^n$，所以

$2n(2n-1)(2n-2) = 28n(n-1)$，

因為 $n \geqq 2$，所以上式可改寫為

$4(2n-1) = 28$

$\Rightarrow 2n-1 = 7$

$\Rightarrow n = 4$。

【類題 3】

設 $P_3^n : P_3^{n+2} = 5 : 12$，求正整數 n 的值．

Ans：7

【詳解】

因為 $P_3^n : P_3^{n+2} = 5 : 12$，所以 $12\cdot P_3^n = 5\cdot P_3^{n+2}$，即

$12n(n-1)(n-2) = 5(n+2)(n+1)n$，

因為 $n \geqq 3$，所以上式可改寫為

$12n(n-1)(n-2) = 5(n+1)(n+2)$

$\Rightarrow 7n^2 - 51n + 14 = 0$,

$\Rightarrow (n-7)(7n-2) = 0$

$\Rightarrow n = 7$。

【例題 4】【配合課本例 3】

從 0, 1, 2, 3, 4, 5 等六個數字中，任選 **3** 個相異數字排成三位數，共可排出多少個?

Ans：100

【詳解】

正面解：
利用乘法原理，
依序排百位數、十位數與個位數得共可排出
$5\times5\times4=100$（個）.
【解二】反面解：
所求的三位數共有
（任意排）－（0 排百位數）

$=P^6_3-P^5_2=120-20=100$（個）.

【類題 4-1】
從 6 個同學中選出 3 名參加辯論比賽，並排定一辯、二辯與三辯的名單．若其中甲同學不適合擔任三辯，則出賽名單的安排共有多少種?
Ans：100

【詳解】
所求＝（任意排）－（甲排三辯）

$=P^6_3-P^5_2=120-20=100$（種）.

【類題 4-2】
從 6 人中選 4 人分別到臺北、臺中、臺南及高雄四城市參觀，要求每一城市有1人參觀，每人只參觀一城市，且 6 人中甲乙兩人不去高雄參觀，求安排參觀的方案共有多少種．
Ans：240

【詳解】
所求＝（任意安排）－（甲乙之一去高雄）

$=P^6_4-2\times P^5_3=360-120=240$（種）.

【例題 5】【配合課本例 4】
甲、乙、丙、丁、戊共五人排成一列，則下列排列方法各多少?
(1) 甲乙相鄰．
(2) 丙丁分開．
(3) 甲乙相鄰且丙丁分開．
(4) 甲乙相鄰且甲丙分開．
Ans：(1) 48，(2) 72，(3) 24，(4) 36

【詳解】

(1) 因為甲乙相鄰，所以可將甲乙兩人視為一人，
與丙、丁、戊排成一列．

從 4 人中選 4 人排成一列有 $P_4^4=4!$ 種排法．

又甲乙兩人排成一列有 $P_2^2=2!$ 種排法．

故甲乙相鄰有 $4!\times2!=48$ 種排列方法．

(2) 因為丙丁分開，所以先將甲、乙、戊三人排成一列，
再將丙丁安插在甲、乙、戊三人的空隙間．

甲、乙、戊三人排成一列有 $P_3^3=3!$ ．

又甲乙戊三人的空隙有 4 個，
因此丙有 4 個選擇，丁有 3 個選擇．

故丙丁分開有 $3!\times(4\times3)=72$ 種排列方法．

(3) 因為甲乙相鄰且丙丁分開，
所以可先將甲乙視為一人，與戊排成一列，
再將丙丁安插在甲乙、戊二人的空隙間．

故有 $P_2^2\times P_2^2\times3\times2=24$ 種排法．

(4) 因為甲乙相鄰且甲丙分開，
所以可先將甲乙視為一人，與丁、戊排成一列，
再將丙安插在甲乙、丁、戊的空隙間但不與甲相鄰．

故有 $P_3^3\times P_2^2\times3=36$ 種排法．

【類題 5-1】

甲、乙、丙、丁、戊、己共六人排成一列，則下列排列方法各多少?

(1) 甲乙丙三人完全相鄰．

(2) 甲乙丙三人完全分開．

(3) 甲乙相鄰且丙丁分開．

Ans：(1) 144，(2) 144，(3) 144

【詳解】

(1) 先將甲乙丙三人視為一人，與丁、戊、己排成一列，
再排甲乙丙．故共有 $4!\times3!=144$ 種．

(2) 先將丁、戊、己三人排成一列，

再將甲乙丙安插在丁、戊、己三人的空隙間．

故共有 $3!\times(4\times3\times2)=144$ 種．

(3) 先將甲乙二人視為一人，與戊、己排成一列，
再將丙丁安插在甲乙、戊、己三人的空隙間，

再排甲乙．故共有 $3!\times(4\times3)\times2!=144$ 種．

【類題 5-2】

有 6 個節目要在晚會中表演，基於效果考量，小英獨唱完後隨即安排哼哈二重唱，除此之外並無其他限制，則節目單的安排共有多少種?

Ans：120

【詳解】

將小英獨唱與哼哈二重唱依序視為一個節目，
再與其他節目任意排．
故節目單的安排共有 $5!\times1=120$（種）.

【例題 6】【配合課本例 5】

甲、乙、丙、丁、戊共五人排成一列，則下列排列方法各多少?

(1) 甲不排首．

(2) 甲不排首，乙不排尾．

(3) 甲不排首，乙不排尾，丙不排中．

Ans：(1) 96，(2) 78，(3) 64

【詳解】

設 U 為所有排列方法組成的集合，
A 為甲排首位的方法組成的集合，
B 為乙排尾的方法組成的集合，
C 為丙排中的方法組成的集合．

(1) 甲不排首有 $n(U)-n(A)=5!-1\times4!=96$ 種排列方法．

(2) 利用笛摩根定律 $A'\cap B'=(A\cup B)'$ 及取捨原理，

得所求有

$$n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$$

$$=n(U)-\big(n(A)+n(B)-n(A\cap B)\big)$$

$=5!-(4!+4!-3!)$

$=120-42=78$

種排列方法．

(3) 所求有

$n(A'\cap B'\cap C')$

$=n(U)-n(A\cup B\cup C)$

$=n(U)-(n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C))$

$=5!-(4!+4!+4!-3!-3!-3!+2!)$

$=120-56=64$

種排列方法．

【類題 6】

學校想從 7 名教師中選派 4 人分別到台北市、台中市、台南市與高雄市等 4 個縣市參加研習，其中甲不到台北市，乙不到高雄市．請問共有多少種派遣的方案?

Ans：620

【詳解】

設 U 為所有派遣方法組成的集合，

A 為指定甲到台北市的派遣方法組成的集合，

B 為指定乙到高雄市的派遣方法組成的集合．

利用笛摩根定律 $A'\cap B'=(A\cup B)'$ 及取捨原理，得派遣的方案有

$n(A'\cap B')=n(U)-n(A\cup B)$

$=n(U)-[n(A)+n(B)-n(A\cap B)]$

$=P^7_4-(P^6_3+P^6_3-P^5_2)$

$=840-(120+120-20)$

$=620$（種）．

【例題 7】【常考題】

用 0, 1, 2, 3, 4, 5共 6 個數字作成三位數，數字不重複．

(1) 共可作成多少個三位數?

(2) 求所有作成三位數的總和．

Ans：(1) 100，(2) 32640

【詳解】

(1) 從 6 個數字中選出 3 個排成一列的方法有 $P_3^6=120$ 種．

又從 6 個數字中選出 3 個排成一列且第 1 個數字為 0 的

方法有 $1\times P_2^5=20$種．

因為三位數的第一個數字不可為 0,

所以符合題意的三位數只有 $120-20=100$ 個．

(2) 三位數總和可視為百位數、十位數和個位數的總和．

①個位數的和: $\left(\left(1+2+3+4+5\right)\times16+0\times20\right)\times1=240$．

②十位數的和: $\left(\left(1+2+3+4+5\right)\times16+0\times20\right)\times10=2400$．

③百位數的和: $\left(1+2+3+4+5\right)\times20\times100=30000$．

故所有作成三位數的總和為 $30000+2400+240=32640$．

【類題 7】

用 0, 1, 2, 3, 4, 5共 6 個數字作成三位數，數字不重複，求

(1) 其中 5 的倍數有多少個?

(2) 其中 3 的倍數有多少個?

Ans：(1) 36，(2) 40

【詳解】

(1) 若三位數為 5 的倍數，則個位數字為 0 或 5．

①個位數字為 0 的三位數有 $5\times4=20$ 個．

②個位數字為 5 的三位數有 $4\times4=16$ 個．

故 5 的倍數有 $20+16=36$ 個．

(2) 若三位數為 3 的倍數，則三位數字的和為 3 的倍數，

即三位數字除以 3 所得餘數的和亦為 3 的倍數．

因此，將 0, 1, 2, 3, 4, 5 六個數字分為以下三類:

第一類「除以 3 餘 0」: 數字有 0, 3．

第二類「除以 3 餘 1」: 數字有1, 4．

第三類「除以 3 餘 2」：數字有 2, 5 .
由於每一類只有 2 個數字可以選擇,
因此只有每一類各出一個數字組成的三位數才是 3 的倍數 .
故三位數為 3 的倍數者有
（每一類任取一數字組成三位數的個數）－（百位數字為 0 的個數）
$=(2\times2\times2\times3!)-(1\times2\times2\times2!)$
$=48-8=40$（個）.

主題二、有相同物的排列

設有 k 種不同種類的事物（同類中的事物相同），第 1 類有 m_1 個，第 2 類有 m_2 個，…，第 k 類有 m_k 個，共計 n 個，即 $m_1+m_2+\cdots+m_k=n$．將此 n 個事物排成一列，共有 $\dfrac{n!}{m_1!m_2!\cdots m_k!}$ 種排法．

【例題 8】【配合課本例 6】

甲乙兩人負責本週 5 天班上廚餘回收的工作，其中甲負責 3 天，乙負責 2 天．請問廚餘回收工作的安排共有多少種?

Ans：10

【詳解】

回收工作的安排可視作將 3 個甲及 2 個乙排成一列，

其中甲代表當天由甲回收，

乙代表由乙回收．利用有相同物的排列，

得 3 個甲及 2 個乙排成一列共有

$$\frac{(3+2)!}{3!2!}=\frac{5\cdot 4}{2\cdot 1}=10$$

種排法，所以回收工作的安排共有 10 種．

【類題 8】

從家裡到學校會經過 8 個十字路口，請問路途中碰到 5 個紅燈，3 個綠燈的情形有多少種?

Ans：36

【詳解】

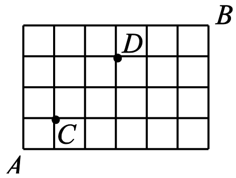
依題意，所求為 5 個紅燈 3 個綠燈的排列數．

利用有相同物的排列，得共有

$$\frac{(5+3)!}{5!3!}=56$$

種不同的情形．

【例題 9】【配合課本例 7】



在下圖的棋盤街道中，從 A 到 B 走捷徑，求下列情形各有多少種方法?

(1) 任意走捷徑．

(2) 經 D 點．

(3) 經 C 點或經 D 點．

(4) 不經 C 點且不經 D 點．

Ans：(1) 210，(2) 80，(3) 144，(4) 66

【詳解】

(1) 任意走捷徑的方法有 $\dfrac{(6+4)!}{6!4!}=210$（種）．

(2) 利用乘法原理，得 A 經 D 到 B 的捷徑走法有

$$\frac{6!}{3!3!}\times\frac{4!}{3!1!}=20\times4=80$$（種）．

(3) 由取捨原理，得「經 C 點或經 D 點」的方法數 $n(C\cup D)$ 有

$$n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)$$

$$=\frac{2!}{1!1!}\times\frac{8!}{5!3!}+80-\frac{2!}{1!1!}\times\frac{4!}{2!2!}\times\frac{4!}{3!1!}$$

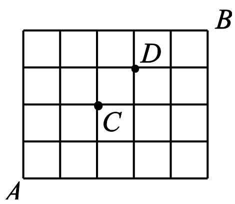
$$=112+80-48=144$$（種）．

(4) 利用笛摩根定律 $C'\cap D'=(C\cup D)'$，

得「不經 C 點且不經 D 點」的方法數 $n(C'\cap D')$ 有

$$n(C'\cap D')=n(U)-n(C\cup D)=210-144=66$$（種）．

【類題 9】



在下圖的棋盤街道中，從 A 到 B 走捷徑，求下列情形各有多少種方法?

(1) 任意走捷徑．

(2) 經 D 點．

(3) 經 C 點或經 D 點．

(4) 不經 C 點且不經 D 點．

Ans：(1) 126，(2) 60，(3) 84，(4) 42

【詳解】

(1) 任意走捷徑的方法有 $\dfrac{(5+4)!}{5!4!}=126$（種）．

(2) 利用乘法原理，得 A 經 D 到 B 的捷徑走法有

$\dfrac{6!}{3!3!}\times\dfrac{3!}{2!1!}=20\times3=60$（種）．

(3) 由取捨原理，得「經 C 點或經 D 點」的方法數 $n(C\cup D)$ 有

$n(C\cup D)=n(C)+n(D)-n(C\cap D)$

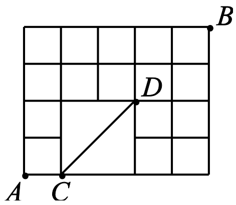
$=\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{5!}{3!2!}+60-\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{2!}{1!1!}\times\dfrac{3!}{2!1!}=60+60-36=84$（種）．

(4) 利用笛摩根定律 $C'\cap D'=(C\cup D)'$，

得「不經 C 點且不經 D 點」的方法數 $n(C'\cap D')$ 有

$n(C'\cap D')=n(U)-n(C\cup D)=126-84=42$（種）．

【例題 10】【常考題】



右圖為一含有斜線的棋盤街道，從 A 到 B 走捷徑，回答下列問題：

(1) 共有多少種走法?

(2) 若不過對角線 $\overline{CD}$，則共有多少種走法?

Ans：(1) 6，(2) 66

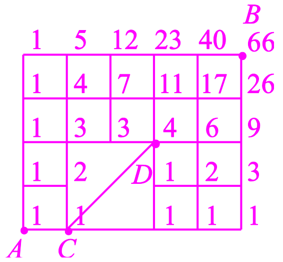
【詳解】

(1) 從 A 到 B 走捷徑，須經過對角線 $\overline{CD}$，

即從 A 經 C 過 D 再到 B．

因此，有 $1\times1\times\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 種走法．

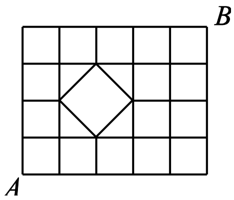
(2) 如下圖，利用累加法得到，



從 A 到 B 走捷徑，不經過對角線 $\overline{CD}$ 的走法有 66 種．

【類題 10】

右圖為一含有斜線的棋盤形街道圖．求從 A 取捷徑走到 B，共有多少種方法?

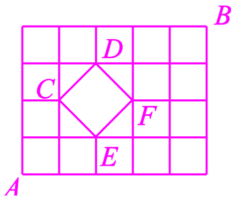


Ans：30

【詳解】

從 A 到 B 走捷徑，須經過斜線 $\overline{CD}$ 或 $\overline{EF}$，

所以走捷徑有以下兩種：



(1) $A-C-D-B$： $\dfrac{3!}{1!2!}\times 1\times\dfrac{4!}{3!1!}=12$

(2) $A-E-F-B$： $\dfrac{3!}{2!1!}\times 1\times\dfrac{4!}{2!2!}=18$

故共有 $12+18=30$ 種走法．

【例題 11】【配合課本例 8】

設有一樓梯共 10 階，今有一人上樓，若每步走一階或二階，則

(1) 共有多少種上樓的方法?

(2) 恰跨 6 步的方法有幾種?

Ans：(1) 89，(2) 15

【詳解】

(1) 設走一階 x 次，走二階 y 次．依題意，得 $x+2y=10$，

其中 x，y 為非負整數．從 x＝0 開始討論，得 x，y 的解有

x	0	2	4	6	8	10
y	5	4	3	2	1	0

共 6 組解．而上樓的方法共有

$\dfrac{5!}{0!5!}+\dfrac{6!}{2!4!}+\dfrac{7!}{4!3!}+\dfrac{8!}{6!2!}+\dfrac{9!}{8!1!}+\dfrac{10!}{10!0!}$

$=1+15+35+28+9+1=89$（種）．

(2) 恰跨 6 步的方法為一階走 2 步，二階走 4 步，

有 $\dfrac{6!}{2!4!}=15$ 種走法．

【類題 11】

警報器長鳴一次需時 3 秒，短鳴一次需時 1 秒，而鳴放之間的間隔 2 秒．問：歷時 30 秒共可作出多少種不同的信號?

Ans：80

【詳解】

設長鳴 x 次，短鳴 y 次，則有(x＋y－1)次間隔．

依題意，得 $3x+y+2(x+y-1)=30 \Rightarrow 5x+3y=32$，

其中 x，y 為非負整數．從 x＝0 開始討論，得 x，y 的解有

x	1	4
y	9	4

共 2 組解．而可作出的信號共有

$\frac{10!}{1!9!}+\frac{8!}{4!4!}=10+70=80$ （種）.

【例題 12】【配合課本例 9】

由七個數字 0, 0, 0, 1, 1, 2, 2 排成的七位數，共有多少個?

Ans：120

【詳解】

因為 0 排首位時不是七位數，

所以七個數字的任意排列數減去 0 排首位的排列數即為所求．

利用有相同物的排列，得七位數共有

$\frac{7!}{3!2!2!}-\frac{6!}{2!2!2!}=210-90=120$ （個）.

【類題 12】

將 3 枝相同的鉛筆及 2 枝相同的原子筆分給 7 位小朋友，每人最多分得一枝筆，求共有多少種分法?

Ans：210

【詳解】

依題意知，

所求為將「鉛鉛鉛原原 xx」七個字排一列的方法數，即

$\frac{7!}{3!2!2!}=210$ （種）.

【例題 13】【常考題】

晚會節目有抒情歌、搖滾歌、民歌、台語歌及魔術等五個節目．

(1) 若民歌須比台語歌先表演，則節目單的安排共有多少種?

(2) 若民歌須比台語歌及魔術先表演，則節目單的安排共有多少種?

Ans：(1) 60，(2) 40

【詳解】

(1) 分以下三步驟：

① 先將「民」及「台」視為二相同物□□．

② 再將「□□抒搖魔」五字任意排一列，有 $\frac{5!}{2!}=60$ 種．

如：「抒□搖□魔」就是其中一種．

③ 最後再將民及台填入兩個□中，

依題意只有將左邊□填民，右邊□填台 1 種填法．

故節目單的安排共有 $60\times1=60$ 種方法．

(2) 分以下三步驟：

① 先將「民」、「台」及「魔」視為三相同物□□□．

② 再將「□□□抒搖」五字任意排一列，有 $\frac{5!}{3!}=20$ 種．

如：「□□搖□抒」就是其中一種．

③ 最後再將民、台及魔填入三個□中：

依題意，左邊□填民，中間□及右邊□則任意填台及魔，

有 $2!=2$ 種填法．故節目單的安排共有 $20\times2=40$ 種方法．

【類題 13】

將甲、乙、丙、丁、戊、己共 6 個人排一列．

(1) 若甲須排在乙的左方（不一定要相鄰），則共有多少種排法?

(2) 若甲須排在乙的左方，且乙須排在丙的右方（甲乙丙不一定要相鄰），則共有多少種排法?

Ans：(1) 360，(2) 240

【詳解】

(1) 先排□□丙丁戊己，再將甲乙填入□□中，

故共有 $\frac{6!}{2!}\times1=360$（種）．

(2) 先排□□□丁戊己，再將甲乙丙填入□□□中，

故共有 $\frac{6!}{3!}\times2!=240$（種）．

主題三、重複排列

從 n 種不同的事物中，任意選出 k 個排成一列．

若每種事物可以重複出現，則共有 $\overbrace{n\cdot n\cdots\cdots n}^{k\text{個}n\text{相乘}}=n^k$ 種排法．

【例題 14】【配合課本例 10】

小吃店只賣牛肉麵、什錦麵、陽春麵、粄條及米粉五種餐點，若某顧客決定未來三天中午都到小吃店點一份餐點，問該顧客共有幾種午餐的餐點安排?

Ans：125

【詳解】

因為每一天都有 5 種選擇，

所以三天午餐的餐點安排共有

$5\times5\times5=5^3=125$（種）.

【類題 14】

用 1, 2, 3, 4, 5 排成三位數．

(1) 若數字不可重複，則共可排出多少個三位數?

(2) 若數字可以重複，則共可排出多少個三位數?

Ans：(1) 60，(2) 125

【詳解】

(1) 數字不可重複，排出的三位數共有 $5\times4\times3=60$（個）．

(2) 數字可以重複，排出的三位數共有 $5\times5\times5=125$（個）．

【例題 15】【配合課本例 11】

將 5 本不同的書全部分給甲、乙、丙三人，求下列分法:

(1) 任意分

(2) 甲至少得一本書

(3) 每人至少得一本書．

Ans：(1) 243，(2) 211，(3) 150

【詳解】

(1) 因為每一本書都有 3 種分法，

所以分法共有 $3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=3^5=243$（種）．

(2) 所求＝（任意分）－（甲沒拿到書的分法）

$=3^5-2^5=211$（種）．

(3) 令集合 A，B，C 分別代表甲、乙、丙三人沒拿到書，則

所求＝（任意分）－ $n(A\cup B\cup C)$

＝（任意分）

$-\big(n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)+n(A\cap B\cap C)\big)$

$=3^5-\left(2^5+2^5+2^5-1^5-1^5-1^5+0\right)$

$=243-(96-3+0)=150$（種）．

【類題 15】

將 3 件不同的玩具全部分給甲、乙、丙、丁四人，求下列分法：

(1) 任意分

(2) 甲至少得一件

(3) 甲乙兩人都至少得一件．

Ans：(1) 64，(2) 37，(3) 18

【詳解】

(1) 因為每一件玩具都有 4 種分法，
所以分法共有 $4\cdot4\cdot4=4^3=64$（種）．

(2) 所求＝（任意分）－（甲沒拿到玩具的分法）
$=4^3-3^3=37$（種）．

(3) 令集合 A，B 分別代表甲、乙二人沒拿到玩具，則

所求＝（任意分）－ $n(A\cup B)$

＝（任意分）－ $\left(n(A)+n(B)-n(A\cap B)\right)$

$=4^3-\left(3^3+3^3-2^3\right)$

$=64-(27+27-8)=18$（種）．

【例題 16】【常考題】

有 3 艘不同的渡船，每船最多可載 4 人，
求下列安全過渡的方法各有多少種?

(1) 4 人同時過渡．

(2) 5 人同時過渡．

(3) 6 人同時過渡．

Ans：(1) 81，(2) 240，(3) 690

【詳解】

(1) 因為每一個人都有 3 個坐船的選擇，
所以過渡的方法有 $3\cdot3\cdot3\cdot3=3^4=81$（種）．

(2) 因為每船最多可載 4 人，所以
所求＝（任意坐）－（5 人一船）$=3^5-3=240$（種）．

(3) 因為每船最多可載 4 人，所以

所求＝（任意坐）－（6 人一船）－（5 人一船）

$=3^6-3-6\times(3\times2)=690$（種）．

【類題 16】

有 3 艘不同的渡船，每船最多可載 4 人．今有 6 人同時過渡，但其中有一對夫妻必須同船，求安全過渡的方法有多少種?

Ans：216

【詳解】

因為一對夫妻必須同船，所以將其視為 1 人．

又每船最多可載 4 人，故

所求＝（任意坐）－（6 人一船）－（5 人一船）

$=3^5-3-\underline{4\times(3\times2)}=216$（種）.

【備註】

設 A，A′是一對夫妻，ABCDE 選 4 人搭一艘船，

若所選 4 人包括 A，則該船共 5 人，

此時不能安全過渡，其餘均可。

亦即 B，C，D，E 有一人搭另一艘船時，

A′再加入，則 A 組會有 5 人共渡。

lt99ok222 重要精選考題

基礎題 ▶▶▶

1. 已知 **n** 為正整數，且 $5P^{9}_{n}=6P^{10}_{n-1}$，求 **n** 的值．

Ans：7

【詳解】

$5P^{9}_{n}=6P^{10}_{n-1}$

$\Rightarrow \dfrac{5\times 9!}{(9-n)!}=\dfrac{6\times 10!}{(10-(n-1))!}$

$\Rightarrow 5\times(11-n)(10-n)=6\times 10$

$\Rightarrow (11-n)(10-n)=12=4\times 3$

$\Rightarrow n=7$。

2. 要將國文、英文、數學和音樂各一節課排入早上的 **4** 節課中，若音樂課不排在第一節和第二節，則共有多少種不同的排法?

Ans：12 種

【詳解】

音樂課排在 3，4 節，其餘任意排列，
有 $2\times 3!=12$ 種不同的排法。

3. 安排一場有 **7** 個表演節目的晚會，若其中 **3** 個舞蹈節目要完全分開，則共有多少種不同的排法?

Ans：1440 種

【詳解】

3 個舞蹈節目要完全分開，故先排其餘 4 個節目，
再將 3 個舞蹈節目安插間格，共有
$4!\times P(5，3)=24\times 5\times 4\times 3=1440$ 種不同的排法。

4. 將「庭院深深深幾許」等七個字排成一列，則下列排列方法各多少?

(1) 任意排．

(2) 「深」字不排首位．

Ans：(1) 840 種，(2) 480 種

【詳解】

(1) 任意排列有 $\frac{7!}{3!}=7\times6\times5\times4=840$ 種。

(2) 「深」字不排首位，首位可排”庭院幾許” ，
其餘位置任意排列，
共有 $4\times\frac{6!}{3!}=4\times6\times5\times4=480$ 種。

5. **用 0, 1, 1, 1, 1, 2, 2 共 7 個數字作成七位數，則下列方法各多少?**
(1) 四個 1 要完全相鄰．
(2) 恰三個 1 完全相鄰且二個 2 也相鄰．
Ans：(1) 9 個，(2) 10 個

【詳解】
要作成七位數，最左位不能排 0。
(1) 四個 1 要完全相鄰，故視為一體，其排法有
$\frac{4!}{2!}-\frac{3!}{2!}=12-3=9$ 種。
(2) 二個 2 相鄰，故視為一體，
恰三個 1 完全相鄰，故也視為一體，即
$\boxed{22}$，$\boxed{111}$，1，0。依最左位討論：
$\boxed{22}\Rightarrow\boxed{111}01$，$10\boxed{111}$，共 2 種
$\boxed{111}\Rightarrow\boxed{22}01$，$\boxed{22}10$，$01\boxed{22}$，$0\boxed{22}1$，共 4 種
$1\quad\Rightarrow\boxed{22}0\boxed{111}$，$\boxed{22111}0$，$0\boxed{22111}$，$0\boxed{11122}$，共 4 種，
總共有 2＋4＋4＝10 種七位數。

6. **要將兩節國文，英文、數學、物理、化學及音樂各一節，排入星期一的 7 節課中．若數學課不排在第四節與第五節，則課表共有幾種排法?**
Ans：1800 種

【詳解】
數學課不排在第四節與第五節，
有 5 種，其餘任意排列，故有
$5\times\frac{6!}{2!}=5\times60=1800$ 種排法。

7. **某動物園的遊園列車依序編號1到7，共有7節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物．如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則7節車廂一共有____________種畫法．　　　　【98指乙】**

Ans：72 種

【詳解】

最中間三節的排列有 3!種，

其餘四節車廂有 $\frac{4!}{2!}$ 種排法，

故共有 $3!\times\frac{4!}{2!}=6\times12=72$ 種。

8. **以汽笛的長短音來做信號，長音一次需 2 秒，短音一次需 1 秒，每兩音之間停 1 秒．若鳴放時間為 15 秒，則可發出多少種不同的信號?**

Ans：37 種

【詳解】

設長音 x 次，短音 y 次，則

$2x+y+(x+y-1)=3x+2y-1=15$

$\Rightarrow 3x+2y=16$。

$x=0$，$y=8$ 有 1 種，

$x=2$，$y=5$ 有 $\frac{7!}{2!5!}=21$ 種，

$x=4$，$y=2$ 有 $\frac{6!}{4!2!}=15$ 種，

故共有 $1+21+15=37$ 種不同的信號。

9. **由1, 2, 3, 4, 5, 6六個數字所組成（數字可以重複）的四位數中，含有奇數個 1 的共有多少個?**

Ans：520 個

【詳解】

恰含 1 個 1 的有 $4\times5^3=500$，

恰含 3 個 1 的有 $4\times5=20$，

故共有 $500+20=520$ 個四位數。

進階題 ▶▶▶

10. **從一個 10 人的俱樂部，選出一位主任，一位幹事和一位會計，且均由不同人出任，如果 10 人中的甲和乙不能同時被選上，那麼共有多少種不同的選法?**

Ans：672 種

【詳解】

任意選有 $10\times9\times8=720$，

甲和乙同時被選上者有 $8\times3!=48$，

故甲和乙不同時被選上者有

$720-48=672$ 種不同的選法。

11. **將數字 1, 2, 3, 4, 5, 6 不重複的排成六位數，若奇數與偶數由左而右均依小而大排列，則共有多少個六位數?**

Ans：20 個

【詳解】

先任意排列，排定位後，奇數按 1，3，5，

偶數按 2，4，6 順序排列，共有

$\dfrac{6!}{3!3!}=20$ 個六位數。

12. **安排甲乙丙丁戊己等 6 人，陸續上台演說．**

(1) **若甲乙丙三人不排第一位也不排最後一位，則有多少種安排方案?**

(2) **若甲要比乙先表演，且丙要比丁先表演，則有多少種安排方案?**

Ans：(1) 144 種，(2) 180 種

【詳解】

(1) 第一位有 3 種，最後一位有 2 種，

其餘位置任意排，共有

$3\times2\times4!=144$ 種安排方案。

(2) 將甲乙視為相同物，丙丁視為相同物，故有

$\dfrac{6!}{2!2!}=180$ 種安排方案。

13. **老師將 12 枝相同的鉛筆分給甲、乙、丙、丁、戊、己六位小朋友，其中有兩位各分得 4 枝，兩位各分得 2 枝，而有兩位沒有分到，則**

(1) **共有幾種分法?**

(2) **在這種分法下，戊與己兩位都獲得 4 枝的方法有幾種?**

Ans：(1) 90 種，(2) 6 種

【詳解】

用兩張紙條寫"4"，另兩張寫"2"，再兩張寫"謝謝" ，

六張紙條作排列。

(1) $\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ 種分法。

(2) $\dfrac{4!}{2!2!}=6$ 種分法。

14. **將黑棋與白棋排成上下兩列，上排有 2 白 5 黑，下排有 3 白 4 黑，若上排的白棋與下排的白棋不許相對，則排法共有多少種?**

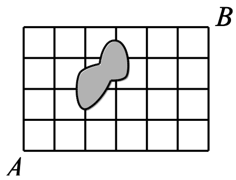
Ans：210 種

【詳解】

上白下黑 2 組，上黑下白 3 組，上黑下黑 2 組，共有

$\dfrac{7!}{2!3!2!}=210$ 種。

15. **右圖為一棋盤街道，從 A 到 B 走捷徑，但不經鋪色區域，共有多少種走法?**



Ans：88 種

【詳解】

$\dfrac{10!}{4!6!}-\dfrac{4!}{2!2!}\times\dfrac{6!}{4!2!}-\dfrac{6!}{3!3!}\times\dfrac{4!}{3!}+\dfrac{4!}{2!2!}\times 2\times\dfrac{4!}{3!}$

$=210-6\times15-20\times4+6\times2\times4=88$ 種。

16. **設 a, b, c, d 都是 20 以內的正奇數，考慮五次整係數多項式函數**

$$P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+2\ .$$

(1) 試問滿足上述條件的五次整係數多項式函數 $P(x)$ 共有多少個?

(2) 試求多項式方程式 $x^5+3x^4+5x^3+7x^2+3x+2=0$ 的所有整數根．【99 指乙】

Ans：(1) 10000 個，(2) -2

【詳解】

(1) 20 以內的正奇數有

1，3，5，7，9，11，13，15，17，19 共 10 個，

故滿足條件的五次整係數多項式函數 P(x)

共有 $10^4=10000$ 個。

(2) $f(x)=x^5+3x^4+5x^3+7x^2+3x+2=0$ 的

整數根只可能是±1，±2，

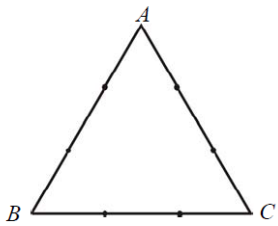
$f(-1)=-1+3-5+7-3+2=3\neq 0$，$f(1)\neq 0$，

$f(-2)=0$，$f(2)\neq 0$，(係數全為正數，故沒有正根)

故方程式 $x^5+3x^4+5x^3+7x^2+3x+2=0$

的整數根只有−2。

17. 三角形 *ABC* 是一個邊長為 3 的正三角形，如下圖所示。若在每一邊的兩個三等分點中，各選取一點連成三角形，則下列哪些選項是正確的？



(1) 依此方法可能連成的三角形一共有 8 個

(2) 這些可能連成的三角形中，恰有 2 個是銳角三角形

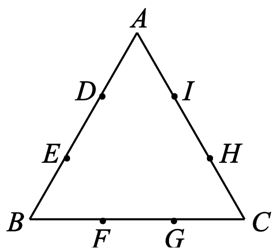
(3) 這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是直角三角形

(4) 這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是鈍角三角形

(5) 這些可能連成的三角形中，恰有 1 個是正三角形 [學測 101]

Ans：(1)(2)

【詳解】



(1) 三角形有 $2\times2\times2=8$，即

$\triangle DIF$、$\triangle DIG$、$\triangle DHG$、$\triangle DHF$

$\triangle EIF$、$\triangle EIG$、$\triangle EHF$、$\triangle EHG$

(2) 銳角三角形：

正三角形即是銳角三角形

$\Rightarrow$ $\triangle DHF$、$\triangle EIG$，共 2 個

(3) 直角三角形：$\triangle DIF$、$\triangle DIG$、$\triangle EHF$、$\triangle EIF$、$\triangle EHG$、$\triangle DHG$，共 6 個

(4) 鈍角三角形：共 0 個

(5) 正 三 角 形：$\triangle DHF$、$\triangle EIG$，共 2 個

故選(1)(2)