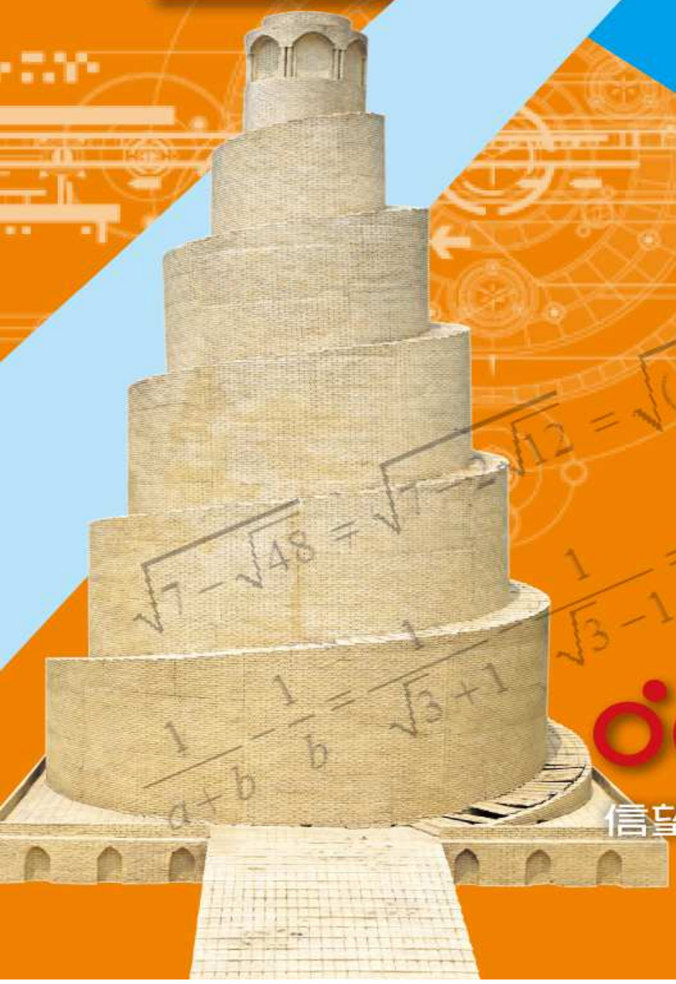
高中數學 進階講義

空間向量的坐標表示法

陳清海 老師



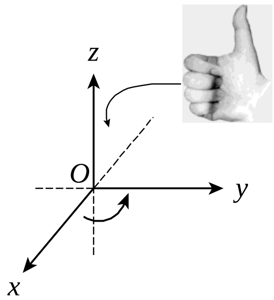
信望愛文教基金會

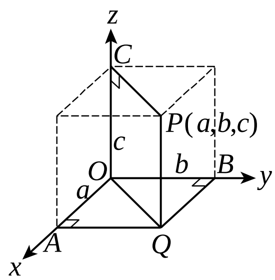
lt99ok412 空間向量的坐標表示法

主題一、空間坐標系

1. 空間坐標系：

如下左圖所示．O爲原點，三坐標軸（ x軸， y軸， z軸）兩兩互相垂直，並採用右手系．x軸與y軸所決定的平面稱爲xy平面；x軸與z軸所決定的平面稱爲xz平面；y軸與z軸所決定的平面稱爲yz平面．三軸的正向所構成的卦限，稱爲第一卦限，其他卦限則沒有特別編號．





2. 點坐標：

從P點對xy平面做垂直線，交xy平面於Q點，由Q點分別對x， y兩軸做垂線，得到A，B兩點，再由P點對z軸做垂線，得到C點．若A，B，C三點在x， y， z軸的坐標分別爲a， b， c，則我們說P點的坐標爲(a,b,c)．位在坐標軸或坐標平面上的點坐標如下表：

位置	x軸	y軸	z軸	xy平面	yz平面	xz平面
點坐標	$(a,0,0)$	$(0,b,0)$	$(0,0,c)$	$(a,b,0)$	$(0,b,c)$	$(a,0,c)$

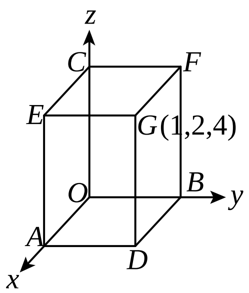
3. 兩點的距離：

空間中$P(x_1,y_1,z_1)$， $Q(x_2,y_2,z_2)$兩點的距離爲

$$\overline{PQ}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}\ .$$

【例題 1】【配合課本例 1】

下圖是空間中的一個長方體，求 A，B，C，D，E，F 各點的坐標．



Ans：$A(1,0,0)$,$B(0,2,0)$,$C(0,0,4)$,$D(1,2,0)$,$E(1,0,4)$,$F(0,2,4)$

【詳解】

A 點的坐標爲$(1,0,0)$，

B 點的坐標爲$(0,2,0)$，

C 點的坐標爲$(0,0,4)$，

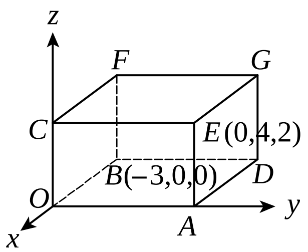
D 點的坐標爲$(1,2,0)$，

E 點的坐標爲$(1,0,4)$，

F 點的坐標爲$(0,2,4)$．

【類題 1】

下圖是空間中的一個長方體，求 A，C，D，F，G 各點的坐標．



Ans：$A(0,4,0)$,$C(0,0,2)$,$D(-3,4,0)$,$F(-3,0,2)$,$G(-3,4,2)$

【詳解】

A 點的坐標爲$(0，4，0)$，

C 點的坐標爲$(0，0，2)$，

D 點的坐標爲$(-3，4，0)$，

F 點的坐標爲$(-3，0，2)$，

G 點的坐標爲$(-3，4，2)$．

【例題 2】

設 $P(1，0，-1)$，$Q(5，4，6)$，$R(3，2，c)$為空間中三點．

(1) 求 $\overline{PQ}$ 的長．

(2) 若 $\overline{PR}=3$，則 c 的值為何?

Ans：(1) 9，(2) 0 **或** -2

【詳解】

(1) $\overline{PQ}=\sqrt{(5-1)^2+(4-0)^2+(6-(-1))^2}=\sqrt{4^2+4^2+7^2}=9$．

(2) 因為 $\overline{PR}=\sqrt{(3-1)^2+(2-0)^2+(c-(-1))^2}=\sqrt{8+(c+1)^2}=3$，

所以$(c+1)^2=1$，解得 $c+1=\pm1$，

即 $c=0$ 或 $c=-2$．

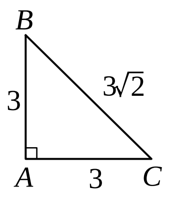
【類題 2】

已知 $A(1，0，1)$，$B(2，2，3)$，$C(3，1，c)$為空間中三點，

且$\triangle ABC$ 為等腰直角三角形，其中 $\angle A=90°$，求 c 的值．

Ans：-1

【詳解】



因為 $\overline{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(2-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{9}=3$，

所以 $\overline{AC}=3$ 且 $\overline{BC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{AC}^2}=3\sqrt{2}$．

由 $\overline{AC}=\sqrt{(3-1)^2+(1-0)^2+(c-1)^2}=\sqrt{(c-1)^2+5}=3$，

可得$(c-1)^2=4$，解得 $c=3$ 或 $c=-1$，

又由 $\overline{BC}=\sqrt{(3-2)^2+(1-2)^2+(c-3)^2}=\sqrt{(c-3)^2+2}=3\sqrt{3}$，

可得$(c-3)^2=16$，解得 $c=7$ 或 $c=-1$．

故由上面的討論可知：$c=-1$．

【例題 3】

空間中，設 P 是 z 軸上一點，A 點為$(2，-2，-1)$，B 點為$(3，-1，3)$．

若 $\overline{AP}=2\overline{AB}$，則 P 點的坐標為何?

Ans：(0，0，7)或(0，0，−9)

【詳解】

因爲 P 是 z 軸上一點，所以可設 P 點的坐標爲(0，0，c)．

因爲 $\overline{AP}=2\overline{AB}$，所以

$$\sqrt{(0-2)^2+(0-(-2))^2+(c-(-1))^2}=2\sqrt{(3-2)^2+((-1)-(-2))^2+(3-(-1))^2},$$

兩邊平方後，整理得$(c+1)^2=64$，

解得 $c=7$ 或 $c=-9$，

故 P 點的坐標爲(0，0，7)或(0，0，−9)．

【類題 3】

空間中，設 P 是 x 軸上一點，Q 是 y 軸上一點，A 點爲(1，2，1)．

若 $\overline{AP}+\overline{AQ}$有最小值，則 $\overline{PQ}$ 的長爲何?

Ans：$\sqrt{5}$

【詳解】

因爲 P，Q 分別爲 x 軸與 y 軸上的一點，

所以可設 P 點的坐標爲(a，0，0)，Q 點的坐標爲(0，b，0)．

又因爲 $\overline{AP}+\overline{AQ}=\sqrt{(a-1)^2+(0-2)^2+(0-1)^2}+\sqrt{(0-1)^2+(b-2)^2+(0-}$

$$=\sqrt{(a-1)^2+5}+\sqrt{(b-2)^2+2},$$

所以當 $a=1$，$b=2$ 時，$\overline{AP}+\overline{AQ}$有最小值 $\sqrt{5}+\sqrt{2}$，

即此時 P 點爲(1，0，0)，Q 點爲(0，2，0)，

且 $\overline{PQ}=\sqrt{(0-1)^2+(2-0)^2+(0-0)^2}=\sqrt{5}$．

【例題 4】

空間中，A 點爲(3，−4，5)，P 爲 A 點在 xy 平面上的投影點，

求 P 點到 z 軸的距離．

Ans：5

【詳解】

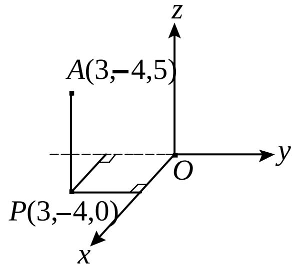
因爲 P 爲 A 點在 xy 平面上的投影點，

所以 P 點的坐標爲(3，−4，0)．

又因爲 P 點到 z 軸的距離，

即爲 P 點到原點的距離 $\sqrt{(3-0)^2+(-4-0)^2+(0-0)^2}=5$，

所以 P 點到 z 軸的距離爲 5．



【類題 4】

空間中，A 點爲(5，−7，12)，P 爲 A 點在 xy 平面上的投影點，
Q 爲 A 點在 yz 平面上的投影點，求 $\overline{PQ}$ 的長．

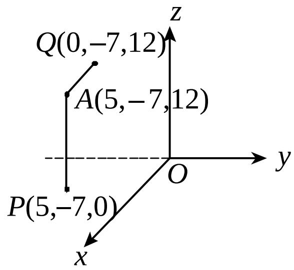
Ans：13

【詳解】

因爲 A 點在 xy 平面上的投影點 P 爲(5，−7，0)，

A 點在 yz 平面上的投影 Q 爲(0，−7，12)，

所以 $\overline{PQ}=\sqrt{(0-5)^2+(-7-(-7))^2+(12-0)^2}=$ ．

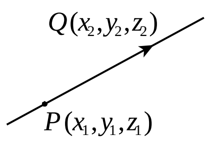


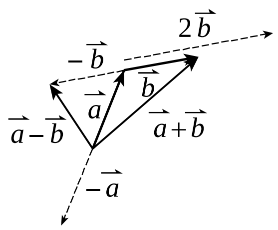
主題二、空間向量的坐標表示法

1.　$Q(x_2,y_2,z_2)$為空間中的兩點，則

(1) $\overrightarrow{PQ}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$.

(2) $\left|\overrightarrow{PQ}\right|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$.





2.　設 $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$， $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$為空間中的兩向量， r為實數，則

(1) 加法： $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$.

(2) 減法： $\vec{a}-\vec{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$.

(3) 係數積： $r\vec{a}=(ra_1,ra_2,ra_3)$.

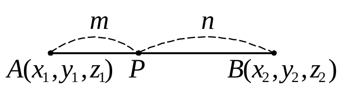
說例： 設 $\vec{a}=(1,2,3)$， $\vec{b}=(3,-2,1)$，

則 $\vec{a}+\vec{b}=(4,0,4)$， $\vec{a}-\vec{b}=(-2,4,2)$， $-2\vec{b}=(-6,4,-2)$.

3.　設 $A(x_1,y_1,z_1)$與 $B(x_2,y_2,z_2)$為空間中的兩點．若點 $P(x,y,z)$在 $\overline{AB}$上，

且 $\overline{AP}:\overline{PB}=m:n$，則 P點的坐標為

$$\left(\frac{nx_1+mx_2}{m+n},\frac{ny_1+my_2}{m+n},\frac{nz_1+mz_2}{m+n}\right)$$.



【例題 5】

已知 P(1，3，5)，Q 爲空間中兩點，且 $\overrightarrow{PQ}=(3,2,1)$，求

(1) Q 點的坐標． **(2) $|\overrightarrow{PQ}|$．**

Ans：(1) (4，5，6)，(2) $\sqrt{14}$

【詳解】

(1) $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=(1,3,5)+(3,2,1)=$ (4，5，6)．

(2) $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{3^2+2^2+1^2}=\sqrt{14}$ ．

【類題 5】

已知 P(1，3，5)，Q(a，b，4)爲空間中兩點，且 $\overrightarrow{QP}=(2,2,c)$，

求 $|\overrightarrow{PQ}|$ 及 Q 點的坐標．

Ans：$|\overrightarrow{PQ}|=3$ ， ,$Q(-1,1,4)$

【詳解】

因爲 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP}$，所以

(1，3，5)＝(a，b，4)＋(2，2，c)＝(a＋2，b＋2，4＋c)，
解得 a＝−1，b＝1，c＝1．

因此 $\overrightarrow{QP}=(2,2,1$，$|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{QP}|=\sqrt{2^2+2^2+1^2}=3$，

且 Q 點的坐標爲(−1，1，4)．

【例題 6】【配合課本例 5】

已知向量 $\overrightarrow{a}=(2,1,1)$，$\overrightarrow{b}=(2,3,4)$，$\overrightarrow{c}=(1,7,-7)$，求 $3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}$ 及其長度．

Ans：$3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=(3，4，-12)$，長度為 13

【詳解】

$3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}=3(2,1,1)-(2,3,4)+(1,7,-7)=(3,4,-12)$,

其長度爲$|3\overrightarrow{a}-2\overrightarrow{b}+\overrightarrow{c}|=\sqrt{3^2+4^2+(-12)^2}=\sqrt{169}=$.

【類題 6】

已知向量$\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}=(-2,3,2)$滿足$3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}=(2,9,-2)$，求$\overrightarrow{a}$及$|\overrightarrow{a}|$．

Ans： $\overrightarrow{a}=(2,1,-2)$, $|\overrightarrow{a}|=3$

【詳解】

$\overrightarrow{a}=\frac{1}{3}(3\overrightarrow{a}+2\overrightarrow{b}-2\overrightarrow{b})=\frac{1}{3}((2,9,-2)-2(-2,3,2))=\frac{1}{3}(6,3,-6)=(2,1,-2)$,

$|\overrightarrow{a}|=\sqrt{2^2+1^2+(-2)^2}=3$.

【例題 7】【配合課本例 6】

已知空間中三點 $A(1,2,3)$, $B(3,3,-1)$與 $C(-1,b,c)$,

且 A, B, C 三點共線，求$\overrightarrow{AB}$及 C 點的坐標．

Ans： $\overrightarrow{AB}=(2,1,-4)$ ，$C(-1，1，7)$

【詳解】

$\overrightarrow{AB}=(3-1,3-2,(-1)-3)=(2,1,-4)$,

$\overrightarrow{AC}=(-1-1,b-2,c-3)=(-2,b-2,c-3)$.

因爲 A, B, C 三點共線，所以 $\overrightarrow{AC}=-\overrightarrow{AB}$,

即 $b-2=-1$, $c-3=4$, 解得 $b=1$, $c=7$,
因此 C 點的坐標爲$(-1，1，7)$．

【類題 7】

問：空間中三點 $A(-3,2,-1)$, $B(0,-1,-4)$與 $C(2,-3,-6)$是否共線?

Ans：是

【詳解】

$\overrightarrow{AB}=(0-(-3),(-1)-2,(-4)-(-1))=(3,-3,-3)$，

$\overrightarrow{AC}=(2-(-3),(-3)-2,(-6)-(-1))=(5,-5,-5)$．

因為 $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{3}\overrightarrow{AB}$，又兩向量有相同的起點 A，

所以 A，B，C 三點共線．

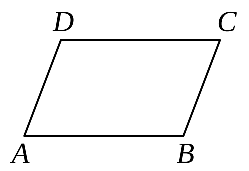
【例題 8】

設 $A(1，3，2)$，$B(4，1，3)$，$C(2，4，5)$，$D(x，y，z)$為空間中四點，且 $ABCD$ 是一個平行四邊形，求 D 的坐標．

Ans：$(-1,6,4)$

【詳解】

因為 $ABCD$ 是一個平行四邊形，



所以 $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$，

即$(4-1，1-3，3-2)=(2-x，4-y，5-z)$，

解得 $x=-1$，$y=6$，$z=4$，

故 D 的坐標為$(-1，6，4)$．

【類題 8】

在空間中，下列哪些點可與 $A(1，2，3)$，$B(2，5，3)$，$C(2，6，4)$三點構成一平行四邊形？

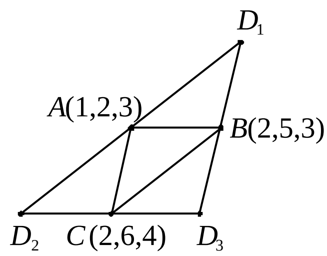
(1) $(-1，-5，-2)$ (2) $(1，1，2)$ (3) $(1，3，4)$ (4) $(3，7，6)$ (5) $(3，9，4)$．

Ans：(2)(3)(5)

【詳解】

由下圖可知有 3 種可能：

$\overrightarrow{OD_1}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{CB}=(1,2,3)+(0,-1,-1)=(1,1,2)$，



$\overrightarrow{OD_2}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BC}=(1,2,3)+(0,1,1)=(1,3,4)$，

$\overrightarrow{OD_3}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{AB}=(2,6,4)+(1,3,0)=(3,9,4)$．

故正確的選項爲(2)(3)(5)．

【例題 9】【配合課本例 7】

設 $A(2,-3,1)$，$B(-6,1,9)$爲空間中兩點，P 爲直線 AB 上一點，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:3$．

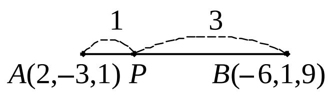
(1) 當 P 在線段 $\overline{AB}$ 上時，求 P 點坐標．

(2) 當 P 不在線段 $\overline{AB}$ 上時，求 P 點坐標．

Ans：(1) (0，−2，3)，(2) (6，−5，−3)

【詳解】

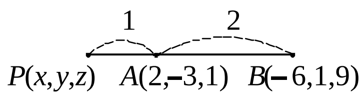
(1) 當 P 在線段 $\overline{AB}$ 上時，如下圖所示．



利用分點坐標公式，得 P 點坐標爲

$$\left(\frac{3\cdot 2+1\cdot(-6)}{1+3},\frac{3\cdot(-3)+1\cdot 1}{1+3},\frac{3\cdot 1+1\cdot 9}{1+3}\right)=(0,-2,3)\text{．}$$

(2) 當 P 不在線段 $\overline{AB}$ 上時，如下圖所示．



因爲 $\overline{AP}:\overline{PB}=1:3$，所以 $\overline{PA}:\overline{AB}=1:2$．

設 P 點坐標爲 (x,y,z)．利用分點坐標公式，得

$$A(2,-3,1)=\left(\frac{2\cdot x+1\cdot(-6)}{1+2},\frac{2\cdot y+1\cdot 1}{1+2},\frac{2\cdot z+1\cdot 9}{1+2}\right)=\left(\frac{2x-6}{3},\frac{2y+1}{3},\frac{2z+9}{3}\right)\text{，}$$

即 $\dfrac{2x-6}{3}=2$，$\dfrac{2y+1}{3}=-3$，$\dfrac{2z+9}{3}=1$．

解得 $x=6$，$y=-5$，$z=-3$，

故 P 點坐標爲(6，−5，−3)．

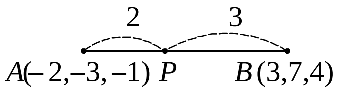
【類題 9】

設 $A(-2，-3，-1)$，$B(3，7，4)$爲空間中兩點，P 爲直線 AB 上一點，且 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，求 P 點坐標．

Ans：(0，1，1)或(−12，−23，−11)

【詳解】

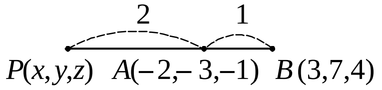
(1) 當 P 在線段 $\overline{AB}$ 上時，如下圖所示．



利用分點坐標公式，得 P 點坐標為

$$(\frac{3\cdot(-2)+2\cdot3}{2+3},\frac{3\cdot(-3)+2\cdot7}{2+3},\frac{3\cdot(-1)+2\cdot4}{2+3})=(0,1,1)\ .$$

(2) 當 P 不在線段 $\overline{AB}$ 上時，如下圖所示．



因為 $\overline{AP}:\overline{PB}=2:3$，所以 $\overline{PA}:\overline{AB}=2:1$ ．

設 P 點坐標為(x,y,z)．利用分點坐標公式，得

$$A(-2,-3,-1)=(\frac{1\cdot x+2\cdot3}{1+2},\frac{1\cdot y+2\cdot7}{1+2},\frac{1\cdot z+2\cdot4}{1+2})=(\frac{x+6}{3},\frac{y+14}{3},\frac{z+8}{3})\ ,$$

即 $\frac{x+6}{3}=-2$， $\frac{y+14}{3}=-3$， $\frac{z+8}{3}=-1$ ．

解得 $x=-12$，$y=-23$，$z=-11$，

故 P 點坐標為$(-12，-23，-11)$．

【例題 10】

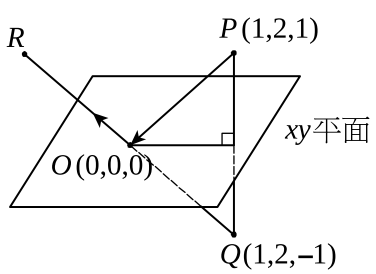
在空間坐標中，設 xy 平面為一個鏡面．有一光線通過點 $P(1，2，1)$射向鏡面上的點 $O(0，0，0)$，經鏡面反射後通過點 R．若 $\overline{OR}=2\overline{PO}$，則 R 點的坐標為何?

Ans：$(-2，-4，2)$

【詳解】

因為點 $P(1，2，1)$對 xy 平面的對稱點 Q 為$(1，2，-1)$，

又由下圖可知：



$$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{QO}=(-2,-4,2)\ .$$

故 R 點的坐標為$(-2，-4，2)$．

【類題 10】

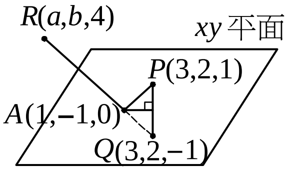
在空間坐標中，設 xy 平面為一個鏡面．有一光線經過點 $P(3，2，1)$射向 xy 平面上的一點 $A(1，-1，0)$，經鏡面反射後通過點 $R(a，b，4)$，求 R 點的坐標．

Ans：$(-7,-13,4)$

【詳解】

因為點 $P(3，2，1)$對 xy 平面的對稱點 Q 為$(3，2，-1)$，

又由下圖可知：



點 $A(1，-1，0)$在 $\overline{RQ}$ 上，且

$\overrightarrow{AR}=(a-1,b+1,4)$，$\overrightarrow{QA}=(-2,-3,1)$，

$\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{QA}$，所以$(a-1，b+1，4)=t(-2，-3，1)$，

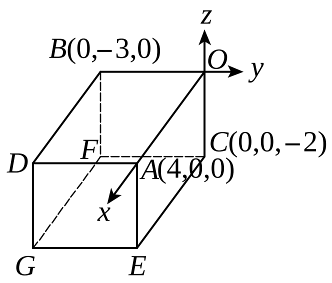
解得 $t=4$，$a=-7$，$b=-13$，

故 R 點的坐標為$(-7，-13，4)$．

重要精選考題

基礎題

1. 下圖是空間中的一個長方體，求 **D，E，F，G** 各點的坐標．



Ans：$D(4,-3,0)$，$E(4,0,-2)$，$F(0,-3,-2)$，$G(4,-3,-2)$

【詳解】
D 點的坐標爲$(4，-3，0)$，
E 點的坐標爲$(4，0，-2)$，
F 點的坐標爲$(0，-3，-2)$，
G 點的坐標爲$(4，-3，-2)$．

2. **空間中，已知點 P 對 xy 平面的對稱點爲 P'，而 P'對 y 軸的對稱點爲$(5，-4，3)$，求 P 點的坐標．**

Ans：$(-5,-4,3)$

【詳解】
因爲 P'對 y 軸的對稱點爲$(5，-4，3)$，
所以 P'點坐標爲$(-5，-4，-3)$．
又因爲 P 對 xy 平面的對稱點爲 $P'(-5，-4，-3)$，
所以 P 點坐標爲$(-5，-4，3)$．

3. **已知 $P(1，-1，-4)$，$Q(-2，k，2)$爲空間中兩點，且 $\overline{PQ}=7$，求實數 k 的值．**

Ans：1 或 -3

【詳解】

由 $\overline{PQ}=7$ 可列得 $\sqrt{(1-(-2))^2+(-1-k)^2+(-4-2)^2}=$,

整理得 $(k+1)^2+45=49$,
即 $(k+1)^2=4$，解得 $k=1$ 或 -3 .

4.　坐標中，點 P 在 xy 平面上的投影點爲 $Q(2，-3，c)$，在 yz 平面上的投影點爲 $R(a，b，4)$，求 P 點坐標及 $\overline{QR}$ 的長 .

Ans：$P(2, -3, 4)$，$\overline{QR}=2\sqrt{5}$

【詳解】
設 P 點坐標爲 $(x，y，z)$.
因爲 P 在 xy 平面上的投影點爲 $Q(2，-3，c)=(x，y，0)$,
所以 $x=2$，$y=-3$，$c=0$.
又由 P 在 yz 平面上的投影點爲 $R(a，b，4)=(0，y，z)$,
所以 $a=0$，$b=y=-3$，$z=4$.
故 P 點坐標爲 $(2，-3，4)$,
Q 點坐標爲 $(2，-3，0)$，R 點坐標爲 $(0，-3，4)$,

且 $\overline{QR}=\sqrt{(-2)^2+0^2+4^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$.

5.　已知空間中兩點 $P(1，-1，2)$，$Q(-1，3，-4)$，若點 A 在 x 軸上，且與 P，Q 兩點等距離，求 A 點的坐標 .

Ans：$(-5, 0, 0)$

【詳解】
因爲 A 點在 x 軸上，所以可假設 A 點坐標爲 $(a,0,0)$.
又由題意知，A 點與 P，Q 兩點距離相等，可列得

$$\sqrt{(a-1)^2+(0-(-1))^2+(0-2)^2}=\sqrt{(a-(-1))^2+(0-3)^2+(0-(-4))^2},$$

整理得 $a^2-2a+6=a^2+2a+26$，解得 $a=-5$.
故 A 點的坐標爲 $(-5，0，0)$.

6.　令 $A(-1,6,0)$，$B(3,-1,-2)$，$C(4,4,5)$ 爲坐標空間中三點．若 D 爲空間中的一點

且滿足 $3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$，則點 D 的坐標爲何? 【97 學測】

Ans：$(-7，30，18)$

【詳解】

$3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$，設 O 爲原點

$\Rightarrow\ 3(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OD})-4(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OD})+2(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD})=\vec{0}$

$\Rightarrow\ \overrightarrow{OD}=3\overrightarrow{OA}-4\overrightarrow{OB}+2\overrightarrow{OC}$

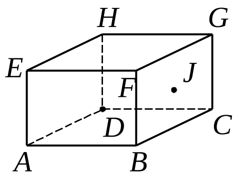
$=3(-1，6，0)-4(3，-1，-2)+2(4，4，5)$

$=(-3，18，0)-(12，-4，-8)+(8，8，10)$

$=(-7，30，18)$。

進階題

7. **如右圖，*ABCD-EFGH* 爲一平行六面體，*J* 爲四邊形 *BCGF* 的中心，如果 $\overrightarrow{AJ}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}+c\overrightarrow{AE}$，試問下列哪些選項是正確的?**



(1) $\frac{1}{3}<b<\frac{2}{3}$ **.** **(2)** $a+b+c=2$ **. (3)** $a=1$ **. (4)** $a=2c$ **. (5)** $a=b$ **.** **【92 學測】**

Ans：(1)(2)(3)(4)

【詳解】

因 J 爲四邊形 $BCGF$ 的中心，所以自 J 作 $\overline{BC}$ 的垂線，

垂足 M 必是 $\overline{BC}$ 的中點．

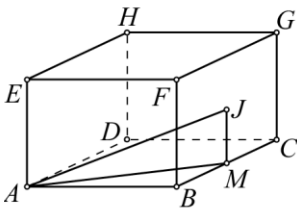
連接 $\overline{AJ}$ 及 $\overline{AM}$，由向量的加法原理知

$\overline{AJ}=\overline{AM}+\overline{MJ}=\overline{AB}+\overline{BM}+\overline{MJ}$

$=\overline{AB}+\frac{1}{2}\overline{AD}+\frac{1}{2}\overline{AE}$，

所以 $a=1$，$b=\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{2}$，

故選(1)(2)(3)(4)．



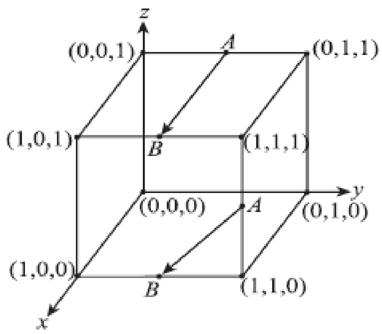
8. **在坐標空間中，一正立方體的八個頂點分別爲**$(0,0,0)$**、**$(1,0,0)$**、**$(1,1,0)$**、**$(0,1,0)$**、**$(0,0,1)$**、**$(1,0,1)$**、**$(1,1,1)$**與**$(0,1,1)$**．若** A**、** B **分別爲此正立方體兩稜邊的中點，則向量** $\overrightarrow{AB}$ **可能爲下列哪些選項?**

(1) $(1,0,0)$. (2) $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$. (3) $\left(\frac{1}{2},0,1\right)$. (4) $\left(0,-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\right)$. **【98 指甲】**

Ans：(1)(4)

【詳解】

在空間座標系中標出各點即可推出。



9. **已知空間中兩點** $\boldsymbol{A(3，-1，2)}$**，**$\boldsymbol{B(2，1，1)}$**，點** $\boldsymbol{C}$ **在** $\boldsymbol{xz}$ **平面上，且△**$\boldsymbol{ABC}$ **爲正三角形，求** $\boldsymbol{C}$ **點的坐標．**

Ans：(1，0，,3)或(4，0，0)

【詳解】

因爲 C 點在 xz 平面上，所以可假設 C 點坐標爲$(a，0，c)$．

由題意知△ABC 爲正三角形，因此 $\overline{AC}=\overline{BC}=\overline{AB}$， 即

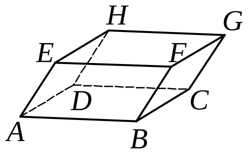
$\sqrt{(a-3)^2+1+(c-2)^2}=\sqrt{(a-2)^2+1+(c-1)^2}=\sqrt{6}$ ．

由前二式整理得 $c=4-a$ ．

代入後二式得 $\sqrt{(a-2)^2+1+(3-a)^2}=\sqrt{6}$，

兩邊平方後整理得 $a^2-5a+4=0$，
解得 $a=1$ 或 4，且 $c=3$ 或 0 ．
故得 C 點的坐標爲(1，0，3)或(4，0，0)．

10. **每一面都是平行四邊形的六面體，稱爲平行六面體．下圖是一個平行六面體，且頂點 $A(1，1，1)$，$B(3，1，2)$，$D(-1，2，1)$，$E(2，-1，3)$，求 G 點的坐標．**



Ans：(2,0,4)

【詳解】
設 G 點的坐標爲$(x，y，z)$．

因爲 $ABCD$ 爲平行四邊形，$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$，

所以 $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=(2,0,1)+(-2,1,0)=$ (0, ．

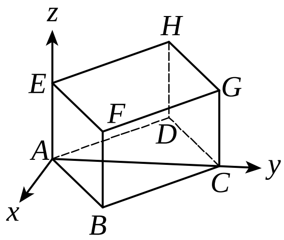
因爲 $\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{AE}$，所以

$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AE}=(0,1,1)+(1,-2,2)=(1,-1,3)$，

且 $\overrightarrow{AG}=(x-1,y-1,z-1)=(1,-1,3)$

$\Rightarrow x=2$，$y=0$，$z=4$，
故 G 點的坐標爲(2，0，4)．

11. **下圖是一個邊長爲 2 的正六面體．已知 $A(0，0，0)$，C 在 y 軸的正向上，E 在 z 軸的正向上，求 G，B，D，F 四點的坐標．**



Ans： $G(0,2\sqrt{2},2)$, $B(\sqrt{2},\sqrt{2},0)$, $D(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$, $F(\sqrt{2},\sqrt{2},2)$

【詳解】

因爲正六面體的六個面都是正方形，

所以 $\overline{AC}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$， 得 $C(0,2\sqrt{2},0$，

並可推得 $G(0,2\sqrt{2},2$.

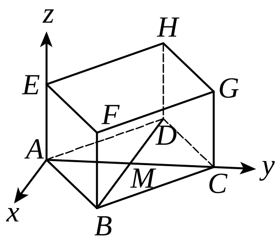
連接 $\overline{BD}$ 與 y 軸交於 M 點，

因爲 M 爲 $\overline{AC}$ 中點，所以得 $M(0,\sqrt{2},0)$ ，

並由 M 沿著平行 x 軸的方向分別移動 $\sqrt{2}$ ， $-\sqrt{2}$

得到 $B(\sqrt{2},\sqrt{2},0$， $D(-\sqrt{2},\sqrt{2},0)$ ，

再由 B 向上移動得 $F(\sqrt{2},\sqrt{2},2$.



12. **設空間中一點 $P(a，b，c)$，且 a，b，c 皆爲正數．若 P 點與 x 軸，y 軸的距離分別爲 5， $\sqrt{34}$ ，與 xy 平面的距離爲 3，則 P 點的坐標爲何?**

Ans：(5,4,3)

【詳解】

因爲 P 點對 x 軸的投影點爲$(a，0，0)$，

所以 P 點與 x 軸的距離爲 $\sqrt{b^2+c^2}=5$ ，

即 $b^2+c^2=25$.

同樣地，P 點對 y 軸的投影點爲$(0，b，0)$，

所以 P 點與 y 軸的距離爲 $\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{34}$，

即 $a^2+c^2=34$．
又因爲 P 點對 xy 平面的投影點爲$(a，b，0)$，
所以 P 點與 xy 平面的距離爲 $c=3$．
可解得 $a=5$，$b=4$．
故 P 點坐標爲$(5，4，3)$．

13. **設空間中一點 $P(a，b，c)$，且 $a<0$，$b<0$，$c>0$．若 P 點與 x 軸，y 軸與 z 軸的距離分別爲 $\sqrt{41}$，$\sqrt{34}$，5，則 P 點的坐標爲何?**

Ans：$(-3,-4,5)$

【詳解】
由題意可得

$$\begin{cases}\sqrt{b^2+c^2}=\sqrt{41},\\ \sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{34},\\ \sqrt{a^2+b^2}=5.\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}b^2+c^2=41,\\ a^2+c^2=34,\\ a^2+b^2=25.\end{cases}$$

三式相加可得 $2(a^2+b^2+c^2)=100$，
即 $a^2+b^2+c^2=50$，
解得 $a^2=9$，$b^2=16$，$c^2=25$．
又因爲 $a<0$，$b<0$，$c>0$，
所以 $a=-3$，$b=-4$，$c=5$．
故 P 點坐標爲$(-3，-4，5)$．

14. **已知空間中四點 $A(0，3，3)$，$B(3，0，3)$，$C(3，3，0)$，D 爲正四面體的四個頂點，求 D 點的坐標．**

Ans：$(0，0，0)$或$(4，4，4)$

【詳解】
設 D 點坐標爲$(a，b，c)$．
因爲 A，B，C，D 爲正四面體的四個頂點，且邊長爲 $3\sqrt{2}$，
所以 $\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=3\sqrt{2}$．又

$$\overline{DA}=\sqrt{(a-0)^2+(b-3)^2+(c-3)^2}=\sqrt{a^2+(b-3)^2+(c-3)^2},$$

$$\overline{DB}=\sqrt{(a-3)^2+(b-0)^2+(c-3)^2}=\sqrt{(a-3)^2+b^2+(c-3)^2},$$

$$\overline{DC}=\sqrt{(a-3)^2+(b-3)^2+(c-0)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-3)^2+c^2}.$$

因此可得

$$\begin{cases}\sqrt{a^2+(b-3)^2+(c-3)^2}=\sqrt{(a-3)^2+b^2+(c-3)^2},\\ \sqrt{(a-3)^2+b^2+(c-3)^2}=\sqrt{(a-3)^2+(b-3)^2+c^2},\end{cases}$$

平方展開後，得

$$\begin{cases}a^2+b^2-6b+9=a^2-6a+9+b^2,\\ b^2+c^2-6c+9=b^2-6b+9+c^2,\end{cases}$$

推得 $a=b=c$.

又因為 $\overline{DA}=3\sqrt{2}$，所以將 $a=b=c$ 代入 $\overline{DA}$，

得 $\sqrt{a^2+(a-3)^2+(a-3)^2}=3\sqrt{2}$，

整理得 $3a^2-12a+18=18$，解得 $a=0$ 或 4 .

故 D 點坐標為(0，0，0)或(4，4，4) .