

數學 2

進階
講義

貝氏定理的定義與應用

景美女中 · 莊嘉銘 老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\equiv$

6-5-1&6-5-2 貝氏定理的定義與應用

定理證明或說明

1. 分割

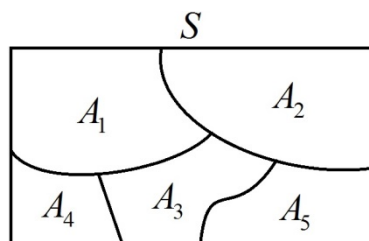
設 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 為樣本空間 S 中的任意 n 個事件

若 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 滿足

$$(1) A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots \cup A_n = S$$

$$(2) A_i \cap A_j = \phi, \quad i \neq j, \quad j=1, 2, \dots, n \quad (\text{即 } A_1, A_2, \dots, A_n \text{ 兩兩互斥})$$

則稱 $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$ 為樣本空間 S 的一個分割



2. 合計機率法則

設 $\bigcup_{j=1}^n A_j = S$ (樣本空間) 且 $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \phi$, 則對任意事件 B 來說

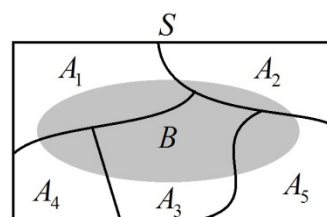
$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B) = \sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)$$

證明：

設 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 為樣本空間 S 的一個分割

$$\text{則 } B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) \cup \dots \cup (A_n \cap B)$$

且 $A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots, A_n \cap B$ 互斥



$$\text{所以 } P(B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B) + \dots + P(A_n \cap B) = \sum_{i=1}^n P(A_i \cap B)$$

$$= P(B|A_1) \cdot P(A_1) + P(B|A_2) \cdot P(A_2) + \dots + P(B|A_n) \cdot P(A_n)$$

$$= \sum_{i=1}^n P(B|A_i) \cdot P(A_i)$$

3. 貝氏定理

設 $\bigcup_{j=1}^n A_j = S$ (樣本空間) 且 $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \phi$, 則對任意事件 B 來說

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A_i)P(A_i)}{\sum_{i=1}^n P(B|A_i)P(A_i)} \quad (i=1, \dots, n)$$



注意事項

1. 在定理中的 $P(A_i)$, $i=1, 2, \dots, n$, 稱為事前機率, 必須是已知, 在這個基礎下才能推算事後機率 $P(A_i|B)$ 。
2. 我們處理分割應用的問題時, 常使用樹狀圖表示, 因為樹狀圖的各分支是互斥的, 所以 $P(B)$ 就是各分支的總和。



關鍵字

條件機率、樹狀圖

例題 1

某品牌燈泡由 **A** 廠及 **B** 廠各生產 30% 及 70%，**A** 廠產品中有 9% 瑕疵品，而 **B** 廠產品中有 5% 瑕疵品。某日退貨部門回收一件瑕疵品，則下列敘述哪些是正確的？

(1) 猜此瑕疵品是由 **A** 廠製造的，猜對的機率較大

(2) 猜此瑕疵品是由 **B** 廠製造的，猜對的機率較大

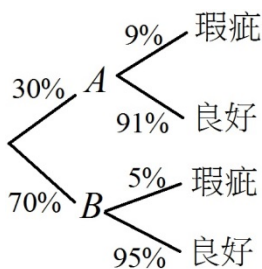
(3) 此瑕疵品由 **B** 廠製造的機率為 $\frac{35}{62}$

(4) 此瑕疵品由 **A** 廠製造的機率為 $\frac{30}{10000}$

(5) 此瑕疵品由 **B** 廠製造的機率為 $\frac{350}{10000}$

Ans：

如圖所示



$$\text{所以 } P(\text{瑕疵}) = 30\% \times 9\% + 70\% \times 5\% = \frac{270 + 350}{10000} = \frac{31}{500}$$

$$\text{則 } P(A|\text{瑕疵}) = \frac{30\% \times 9\%}{\frac{31}{500}} = \frac{27}{62}$$

$$P(B|\text{瑕疵}) = \frac{70\% \times 5\%}{\frac{31}{500}} = \frac{35}{62}$$

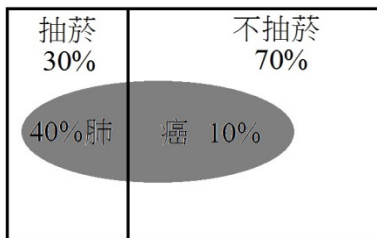
所以選(2)(3)

例題 2

某社區有30%的人抽菸，而這些抽菸人口中有肺癌的比率為40%，又另外70%未抽菸的人口，有肺癌的比率為10%。現在從這社區中抽查一人，若已知抽到的人沒有肺癌，求這人沒有抽菸的機率為何？

Ans：

將題目畫成文氏圖，如圖



則 $P(\text{沒肺癌}) = P(\text{有抽菸沒肺癌}) + P(\text{沒抽菸沒肺癌})$

$$= 30\% \times 60\% + 70\% \times 90\% = \frac{81}{100}$$

$$\text{所以 } P(\text{沒抽菸} | \text{沒肺癌}) = \frac{70\% \times 90\%}{\frac{81}{100}} = \frac{\frac{63}{100}}{\frac{81}{100}} = \frac{7}{9}$$

例題 3

有一題五選一的選擇題，某考生會作的機率為0.4，若會作就一定會答對，若不會作答就用猜的。已知此題該考生答對，則他是真正會而答對的機率是多少？

Ans：

五選一的選擇題，猜對的機率為 $\frac{1}{5} = 0.2$

該考生答對的情形為：會作且答對或不會作而猜對

其機率為 $0.4 \times 100\% + 0.6 \times 0.2 = 0.52$

$$\therefore P(\text{真正會} | \text{答對}) = \frac{0.4}{0.52} = \frac{10}{13}$$

例題 4

設 **A** 袋有 3 紅球、4 白球；**B** 袋有 4 紅球、3 白球；**C** 袋有 5 紅球、2 白球。今任取一袋，再任取一球，則：

(1) 試求此球是紅球的機率 (2) 若此球是紅球，問它來自 **B** 袋的機率

Ans：

$$(1) P(\text{紅球}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{7}$$

$$(2) P(\text{來自 B 袋} | \text{紅球}) = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{4}{7}}{\frac{1}{3} \times \frac{3}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{7} + \frac{1}{3} \times \frac{5}{7}} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

例題 5

設工廠由甲、乙、丙三部機器製造某一產品，其產量依次各佔總量的 50%，30%，20%。依照過去的經驗，甲、乙、丙不良品的比率分別為 3%， $x\%$ ，5%。今任選一產品，若此產品為不良品，而此產品由乙所製造的機率為 $\frac{12}{37}$ ，則乙機器產不良品的機率為何？

Ans：

$$\text{由題意知 } P(\text{不良品}) = 50\% \times 3\% + 30\% \times x\% + 20\% \times 5\% = \frac{30x + 250}{10000}$$

$$\text{且 } P(\text{乙} | \text{不良品}) = \frac{30\% \times x\%}{\frac{30x + 250}{10000}} = \frac{30x}{30x + 250} = \frac{12}{37}$$

$$\text{所以 } 37 \cdot 30x = 12(30x + 250) \Rightarrow x = 4$$

故乙機器產不良品的機率為 4%



習題 1

實驗室透過驗血來測試肝炎，**80%**的肝炎患者都是呈陽性反應，而**8%**的非肝炎患者也會呈陽性反應，假設實際患有肝炎者占人口比率的**10%**，今任選一人驗血，若驗後呈陽性反應，則此人患有肝炎的機率為何？

習題 2

根據以往紀錄，某公司品管部將良品檢驗為不良品的機率為 $\frac{1}{5}$ ，將不良品檢驗為良品的機率為 $\frac{3}{20}$ ，已知該公司的產品中，不良品占**8%**。若一件產品被檢驗為不良品，求該產品確實為不良品的機率為何？

習題 3

有一題五選一的選擇題，某考生會作答的機率為**0.3**，若會作就一定答對，不會做用猜的，猜對的機率為 $\frac{1}{5}$ ，已知此題該考生答對，則他是猜對的機率為何？

習題 4

有甲乙丙三個袋子，甲袋內有3白球5黑球；乙袋內有3白球1黑球；丙袋內有2白球3黑球。今任選一袋，然後再由袋中取出一球，則：

(1)求此球是白球的機率

(2)已知取出的是白球，求此球是取自乙袋的機率

習題 5

某公司共有甲、乙、丙三個生產線，依據統計，甲、乙、丙所製造的產品中分別有**5%**，**3%**，**3%**是瑕疵品。若公司希望在全部的瑕疵品中，由甲生產線所製造的比例不得超過 $\frac{5}{12}$ ，則甲生產線所製造的產品數量可占全部產量的百分比至多為多少%？

習題 6

【指考乙 96】

某地區 12 歲以上人口中吸煙的比率為 28%。今將 12 歲以上人口區分為中老年、青壯年及青少年三類，所占比率各為 30%，45% 及 25%。已知中老年與青壯年人口中吸煙的比率各為 25% 與 30%，若青少年人口中吸煙的比率為 $x\%$ ，則 x 為何？

習題 7

【指考甲 96】

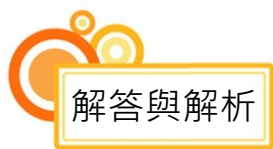
某公司共有 6 個工廠，各工廠的產量都一樣，且所生產的產品都放進同一倉庫中。由過去的經驗知道，第 k 個工廠的產品不良率為 $\frac{k}{50}$ ，其中 $k=1, 2, 3, 4, 5, 6$ ，為了檢驗倉庫中這一批產品的品質，從倉庫中任意抽出一件，若為不良品，則此不良品是來自第五個工廠的機率為何？(化成最簡分數)

習題 8

【指考甲 91】

醫療主管機關在持續追蹤某傳染病多年後，發現如果體檢受檢人感染該傳染病，就一定可以檢測出來。但是卻有 4% 的機率，將一不患該傳染病之受檢者誤檢為患有該病。已知全部男性人口中有 0.2% 的機率患有此病。現於兵役體檢時進行檢測，若該梯次役男共有十萬人受檢，而且某役男被告知患有該病。請問下列哪些敘述為真？

- (1) 該役男確實染病的機率大於 3%。
- (2) 該役男確實染病的機率大於 4%。
- (3) 該役男確實染病的機率大於 5%。
- (4) 該役男確實染病的機率大於 90%。

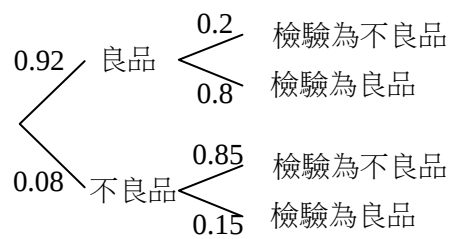


習題 1 : $\frac{10}{19}$

$$\text{【詳解】 } P(\text{有病} | \text{驗有病}) = \frac{10\% \times 80\%}{10\% \times 80\% + 90\% \times 8\%} = \frac{10}{19}$$

習題 2 : $\frac{17}{63}$

【詳解】



$$\text{所求機率為} \frac{0.08 \times 0.85}{0.92 \times 0.2 + 0.08 \times 0.85} = \frac{8 \times 85}{92 \times 20 + 8 \times 85} = \frac{680}{2520} = \frac{17}{63}$$

習題 3 : $\frac{7}{22}$

【詳解】五選一的選擇題，猜對的機率為 $\frac{1}{5} = 0.2$

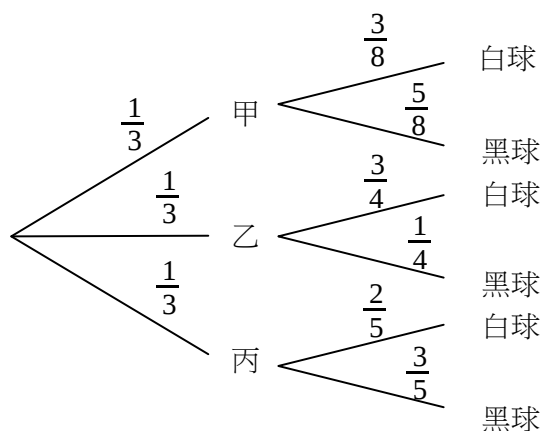
該考生答對的情形為：會作且答對或不會作而猜對

其機率為 $0.3 \times 100\% + 0.7 \times 0.2 = 0.44$

$$\therefore P(\text{猜對} | \text{答對}) = \frac{0.14}{0.44} = \frac{7}{22}$$

習題 4 : (1) $\frac{61}{120}$ (2) $\frac{30}{61}$

【詳解】依題意畫樹狀圖如下：



因為白球可能來自甲、乙或丙袋，所以

$$(1) \text{取出的球為白球的機率為 } P(\text{白球}) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{8} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} + \frac{1}{3} \times \frac{2}{5} = \frac{61}{120}$$

(2)在取出的球為白球的情況下，此球是取自乙袋的機率為

$$P(\text{乙} | \text{白球}) = \frac{P(\text{白球來自乙})}{P(\text{白球})} = \frac{\frac{1}{3} \times \frac{3}{4}}{\frac{61}{120}} = \frac{30}{61}$$

習題 5 : 30%

【詳解】設甲、乙、丙三生產線製造的產品占全部產量分別為 $x\%$, $y\%$, $z\%$,

其中 $x, y, z \geq 0$ 且 $x + y + z = 100$

$$\text{依題意可列得 } \frac{x\% \times 5\%}{x\% \times 5\% + y\% \times 3\% + z\% \times 3\%} \leq \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{5x + 3(y + z)} \leq \frac{5}{12} \Rightarrow \frac{5x}{5x + 3(100 - x)} \leq \frac{5}{12}$$

$$\Rightarrow \frac{5x}{300 + 2x} \leq \frac{5}{12}$$

$$\text{整理得 } 60x \leq 1500 + 10x \Rightarrow x \leq 30$$

故甲生產線製造的產品占全部產量至多 30%

習題 6 : 28

【詳解】設地區12歲以上人口有 A 人

則12歲以上吸煙人口為

$$A \times 28\% = A \times 30\% \times 25\% + A \times 45\% \times 30\% + A \times 25\% \times x\%$$

$$\Rightarrow 0.28 = 0.3 \times 0.25 + 0.45 \times 0.3 + 0.25 \times x\%$$

$$\Rightarrow x = 28$$

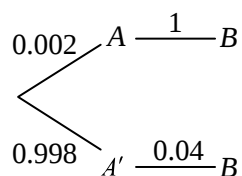
習題 7 : $\frac{5}{21}$

【詳解】 $P(\text{不良品來自第五工廠} | \text{已知不良品})$

$$= \frac{\frac{5}{50}}{\frac{1}{50} + \frac{2}{50} + \frac{3}{50} + \frac{4}{50} + \frac{5}{50} + \frac{6}{50}} = \frac{5}{21}$$

習題 8 : (1)(2)

【詳解】設 A 表示患有傳染病的事件， B 表示檢測有傳染病的事件



$$\text{可知 } P(B) = 0.002 \times 1 + 0.998 \times 0.04 = 0.04192$$

$$\text{故所求為 } P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.002}{0.04192} = \frac{25}{524} \doteq 4.77\%$$

故選(1)(2)