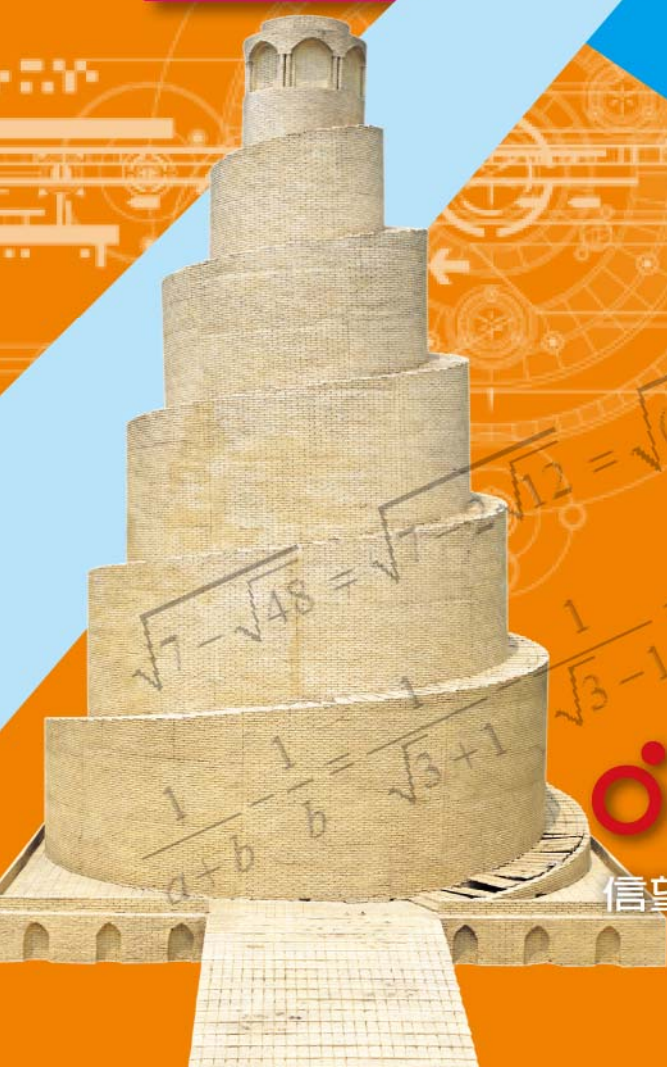


數學 3

進階
講義

有向線段與向量運算

成功高中 · 陳冠宏 老師



信望愛文教基金會

10-1-1 有向線段與向量運算



定理敘述

1.向量的意義

定義：含有大小與方向的量，常以帶有箭頭的線段表示向量，箭頭的方向代表向量方向，線段長度代表向量大小。而向量大小為 1 的向量，稱為單位向量。

2.向量與有向線段

- (1)向量是一種相對位置的描寫，只考慮方向與大小。
- (2)有向線段是將向量因素增加始點與終點的不同。

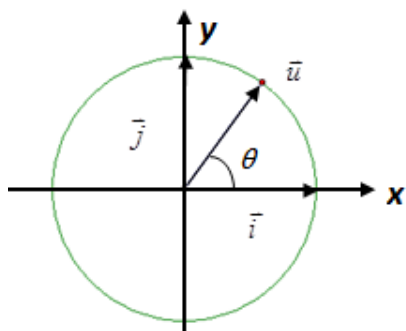
3.向量的坐標化

若 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ ，則 $\overrightarrow{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ ，且 $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

4.零向量

- (1)始點和終點重合的向量記為 $\vec{0}$
- (2)長度=0，方向可視為任意方向
- (3) $\vec{0} = (0,0)$

5.常見的單位向量(下圖為一單位圓)



$$\vec{i} = (1,0)$$

$$\vec{j} = (0,1)$$

$$\vec{u} = (\cos \theta, \sin \theta)$$

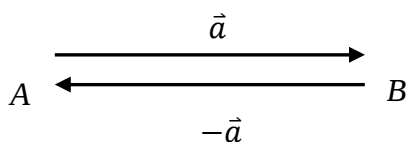
☆若 $\vec{a} = (x, y)$ ，則 $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

6.向量的運算

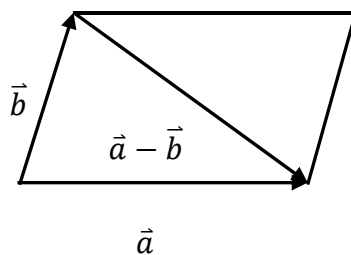
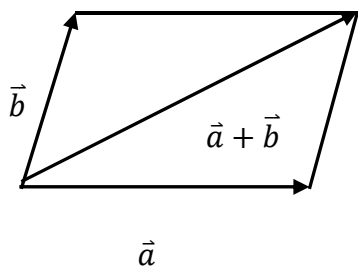
已知： $\vec{a} = (a_1, a_2), \vec{b} = (b_1, b_2)$ ， $r \in R$

(1)逆向量：

若 $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ ，則 $\overrightarrow{BA} = -\vec{a}$



(2)向量的加法與減法：(平行四邊形法)



例： $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$

$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1, a_2 - b_2)$

(3)向量的係數積

$$r\vec{a} : \begin{cases} r > 0 : \text{與}\vec{a}\text{同向，大小為}\vec{a}\text{的}|r|\text{倍的向量} \\ r < 0 : \text{與}\vec{a}\text{反向，大小為}\vec{a}\text{的}|r|\text{倍的向量} \\ r = 0 : r\vec{a}\text{為}\vec{0} \end{cases}$$

例： $r\vec{a} = (ra_1, ra_2)$

(4)向量的平行

若 $\vec{a} // \vec{b}$ ，則 $(a)\vec{a} = t\vec{b}, t \in R$

(b)若 $b_1b_2 \neq 0$ ，則 $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$

(5)向量的合成與分解

(a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

(b) $\begin{cases} \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{CB} \\ \overrightarrow{BA} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BC} \end{cases}$

(c) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PB} = \overrightarrow{PB} - \overrightarrow{PA} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{BP}$ ，其中 P 為任意點

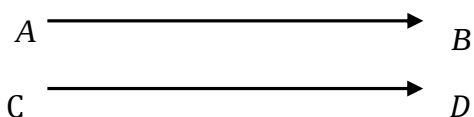


定理證明或說明

1.向量的意義

例：向量 $\overrightarrow{AB}$ 中， $|\overrightarrow{AB}|$ 代表向量大小， $u_{\overrightarrow{AB}} = \frac{\overrightarrow{AB}}{|\overrightarrow{AB}|}$ 為沿 $\overrightarrow{AB}$ 方向的單位向量。且 $\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}|(\text{量}) \times u_{\overrightarrow{AB}}(\text{向})$

2. 向量與有向線段



如圖， $\overline{AB} = \overline{CD}$ 且 $\overline{AB} // \overline{CD}$ ，則

向量 $\overrightarrow{AB}$ 與向量 $\overrightarrow{CD}$ 相同（ $\because$ 方向同，大小同）

有向線段 $\overline{AB}$ 與有向線段 $\overline{CD}$ 不同（ $\because$ 起終點不同）



關鍵字

向量的運算

例題 1

若 $A(1,2), B(3,4), C(-1,3), D(-2,7)$ ，則 $\overline{AB} + \overline{CD} = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : (1,6)

解： $\overline{AB} + \overline{CD} = (2,2) + (-1,4) = (1,6)$

例題 2

設 K 為正七邊形 $A_1A_2A_3A_4A_5A_6A_7$ 的中心，且 $\overline{KA_1} = 3$ ， $K(3,4), O(0,0)$ ，則 $|\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6} + \overrightarrow{OA_7}| = \underline{\hspace{2cm}}$

Ans : 35

解：

$$\begin{aligned} & |\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \overrightarrow{OA_3} + \overrightarrow{OA_4} + \overrightarrow{OA_5} + \overrightarrow{OA_6} + \overrightarrow{OA_7}| \\ &= |(\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA_1}) + (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA_2}) + \cdots + (\overrightarrow{OK} + \overrightarrow{KA_7})| \\ &= |7\overrightarrow{OK} + (\overrightarrow{KA_1} + \overrightarrow{KA_2} + \overrightarrow{KA_3} + \overrightarrow{KA_4} + \overrightarrow{KA_5} + \overrightarrow{KA_6} + \overrightarrow{KA_7})| \\ &= |7\overrightarrow{OK}| = 7|\overrightarrow{OK}| = 7 \times 5 = 35 \end{aligned}$$

例題 3

一 $\triangle ABC$ ，已知 $\overrightarrow{AB} = (-3, 4)$, $\overrightarrow{CA} = (5, -12)$ ，則 $\triangle ABC$ 的周長為_____

Ans : $18 + 2\sqrt{17}$

解：

$$\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (-2, -8)$$

$$\text{周長} = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{CB}| + |\overrightarrow{CA}| = 5 + 2\sqrt{17} + 13 = 18 + 2\sqrt{17}$$

例題 4

設 $\vec{a} = (3, 1)$, $\vec{b} = (2, 4)$ ，令 $\vec{c} = t\vec{a} + \vec{b}$ ，則當 $t = \underline{\hspace{1cm}}$ ， $|\vec{c}|$ 有最小值_____

Ans : $t = -1$ 時， $|\vec{c}|$ 有最小值 $\sqrt{10}$

解：

$$\vec{c} = t\vec{a} + \vec{b} = (3t + 2, t + 4)$$

$$\Rightarrow |\vec{c}| = \sqrt{(3t + 2)^2 + (t + 4)^2} = \sqrt{10t^2 + 20t + 20}$$

$$= \sqrt{10(t + 1)^2 + 10} \quad \therefore t = -1 \text{ 時，} |\vec{c}| \text{ 有最小值 } \sqrt{10}$$

例題 5

已知 $\overrightarrow{AB} = (2, 3)$, $\overrightarrow{CD} = (4, k)$ ，若 $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{CD}$ ，則 $k = \underline{\hspace{1cm}}$

Ans : 6

解：

$$k = 0 \Rightarrow \text{不合}, k \neq 0 \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{4}{k} \Rightarrow k = 6$$

例題 6

設 $\overrightarrow{AB} = (12, -5)$, $\overrightarrow{AC} = (-5, -12)$ ，若 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + t\overrightarrow{AC}$ 且 $\overrightarrow{AD}$ 平分 $\angle BAC$ ，則 $\overrightarrow{AD} = \underline{\hspace{1cm}}$

Ans : $(7, -17)$

解：

$\because |\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = 13 \quad \therefore$ 以線段 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AC}$ 為邊的平行四邊形亦為菱形，而菱形的對角線將內角平分，依向量加法的性質可知 $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = (7, -17)$



溫故知新

習題 1

若 $A(1,2), B(3,1), C(-1,3), D(-2,5)$ ，則 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} =$ _____

習題 2

已知 $A(2,-2), B(-2,3), C(-5,0)$ ，且點 P 為平面上異於 A, B, C 之另一點，若 $\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PC} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PD}$ ，則 D 點坐標為 _____

習題 3

若 $\overrightarrow{AB} = (4,3), \overrightarrow{AC} = (4,-3)$ ，則 $\triangle ABC$ 的周長為 _____

習題 4

設 $\vec{a} = (3,1), \vec{b} = (3,-4)$ ，令 $\vec{c} = 2\vec{a} - t\vec{b}$ ，則 $|\vec{c}|$ 有最小值為 _____

習題 5

設 $\overrightarrow{AB} = (3,-4), \overrightarrow{AC} = (6,8)$ ，若 $\overrightarrow{AD} = t\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ ，且 $\overrightarrow{AD}$ 平分 $\angle BAC$ ，則 $t =$ _____

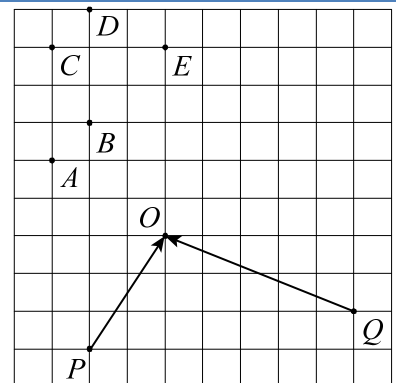
習題 6

已知 $\triangle ABC$ 為平面上三角形，且其重心為 $G(7,24)$ ，若有一點 P 滿足 $\overrightarrow{PG} = \frac{16}{3}$ ，則 $|\overrightarrow{PA} + \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{PC}| =$ _____

習題 7

【學測 91】

如圖，下面哪一選項中的向量與另兩個向量 $\overrightarrow{PO}, \overrightarrow{QO}$ 之和等於零向量？(1) $\overrightarrow{AO}$ (2) $\overrightarrow{BO}$ (3) $\overrightarrow{CO}$ (4) $\overrightarrow{DO}$ (5) $\overrightarrow{EO}$



習題 8

【學測 103】

一物體由坐標平面中的點 $(-3, 6)$ 出發，沿著向量 $\vec{v}$ 所指的方向持續前進，可以進入第一象限，請選出正確的選項：

- (1) $\vec{v} = (1, -2)$ (2) $\vec{v} = (1, -1)$ (3) $\vec{v} = (0.001, 0)$ (4) $\vec{v} = (0.001, 1)$ (5) $\vec{v} = (-0.001, 1)$

習題 9

【學測 98】

坐標平面上有四點 $O(0,0)$, $A(-3, -5)$, $B(6,0)$, $C(x,y)$ 。今有一質點在 O 點沿 $\overrightarrow{AO}$ 方向前進 $\overline{AO}$ 距離後停在 P ，再沿 $\overrightarrow{BP}$ 方向前進 $2\overline{BP}$ 距離後停在 Q ，假設此質點繼續沿 $\overrightarrow{CQ}$ 方向前進 $3\overline{CQ}$ 距離後回到原點 O ，則 $(x,y) =$ _____

習題 10

【學測 101】

小明在天文網站上看到以下的資訊「可利用北斗七星斗杓的天璇與天樞這兩顆星來尋找北極星：由天璇起始向天樞的方向延伸便可找到北極星，其中天樞與北極星的距離為天璇與天璇距離的 5 倍。」今小明將所見的星空想像成一個坐標平面，其中天璇的坐標為 $(9,8)$ 及天樞的坐標為 $(7,11)$ 。依上述資訊可以推得北極星的坐標為_____



解答與解析

習題 1 : $(1,1)$

習題 2 : $(-1,-5)$

習題 3 : 16

習題 4 : 6

習題 5 : 2

習題 6 : 16

習題 7 : (3)

解：假設圖中每一格的邊長均為 1 單位，則可得

$$\overrightarrow{PO} = (2,3), \overrightarrow{QO} = (-5,2) \Rightarrow \overrightarrow{PO} + \overrightarrow{QO} = (-3,5), \text{ 要找 } (3, -5) \text{ 故選 } (3)$$

習題 8 : (2) (3) (4)

解： $(-3,6)$ 要進入第一象限，即需將 x 坐標變正，但 y 坐標不可變負。∴取(2)(3)(4)

習題 9 : $(-4, 20)$

解： $\overrightarrow{AO} = (3, 5) \therefore P(3, 5)$

$\overrightarrow{BP} = (-3, 5)$, $\overrightarrow{PQ} = 2\overrightarrow{BP} = (-6, 10) \therefore Q(-3, 15)$

$\overrightarrow{CQ} = (-3 - x, 15 - y)$,

$\overrightarrow{QO} = 3\overrightarrow{CQ} = (-9 - 3x, 45 - 3y) = (3, -15)$

$\therefore (x, y) = (-4, 20)$

習題 10 : $(-3, 26)$

解：假設 A 點為天樞、B 點為天璇，

P 點為北極星得 $\overrightarrow{AP} = 5\overrightarrow{AB}$,

設北極星坐標 $P(x, y)$ 則 $(x-7, y-11) = 5(-2, 3) = (-10, 15) \therefore x = -3, y = 26$