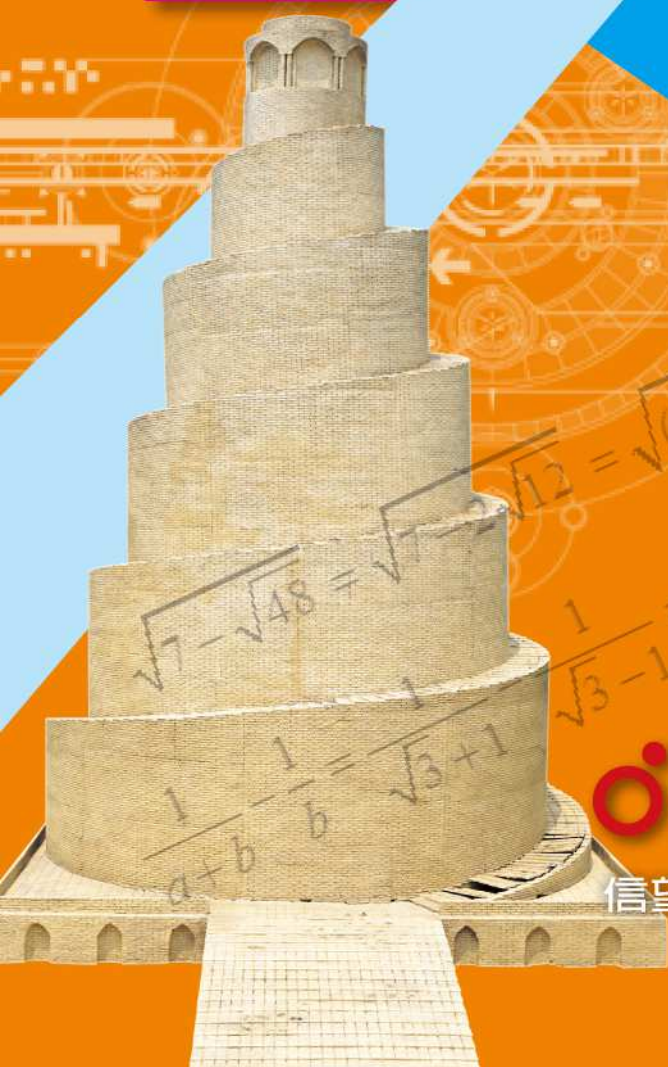


數學 2

進階
講義

不盡相異物的直線排列

淡水商工 · 姚盈孜 老師



信望愛文教基金會

5-2-2 不盡相異物的直線排列

定理敘述

有 n 個不完全相異物，將相同的歸為同類可分為 k 類，第1類有 m_1 個，第2類有 m_2 個， $\dots$ ，第 k 類有 m_k 個，將這 n 個任意排成一列的排列數：
$$\frac{n!}{m_1!m_2!\dots m_k!}$$
。

定理證明或說明

已知 n 個全部相異的物件排成一列的排列數為 $n!$ ，若其中有可歸類為相同的物件時，則會有部分的排列方式重複計算，只要記數一次即可。舉例說明如下：

例：若三個白棋編號1、2、3，如圖①②③，則排列數為 $3! = 6$ 。

若三個相同白棋未編號，如圖○○○，則只有一種排列方式，即 $\frac{3!}{3!} = 1$ 。

若有三個白棋一個黑棋，如圖○○○●，則排列方式為 $\frac{4!}{3!} = 4$ 。

若有三個白棋兩個黑棋，如圖○○○●●則排列方式為 $\frac{5!}{3!2!} = 10$ 。

注意事項

$m_1, m_2, \dots, m_k$ 皆小於 n 。

關鍵字

不盡相異物的直線排列

例題 1

將 $aaabbccc$ 排成一列，求下列排列數：

- (1) 任意排。
- (2) aaa 必相鄰。
- (3) bb 必分開。

Ans：

- (1) 3 個相同的 a ，2 個相同的 b ，3 個相同的 c 共有 8 個字母，

$$\text{故排列數為 } \frac{8!}{3!2!3!} = 560。$$

- (2) aaa 視為一組新字母，排列數為 $\frac{6!}{2!3!} = 60。$

- (3) 排 aaa 和 ccc ，再把 2 個 bb 從中插入，但因為是相同物，故要再除以 $2!$ ，

$$\text{因此排列數為 } \frac{6!}{3!3!} \times \frac{7 \times 6}{2!} = 420$$

例題 2

甲、乙、丙、丁、戊、己共六人排成一列，請問下列各狀況的排列數：

- (1) 乙丙三人的排列順序保持不變。
- (2) 乙兩人皆排在丙的左邊。

Ans：

- (1) 為三人順序不變只有一種排列法，故將三人視為相同物，

$$\text{排列數為 } \frac{6!}{3!} = 120。$$

- (2) 將三人先視為相同物，排列數為 $\frac{6!}{3!}$ ，只後甲乙兩人位置可以互換，

$$\text{排列數為 } 2!，\text{故答案為 } \frac{6!}{3!} \times 2! = 240。$$

（若排列物件順序不變時，可視為不盡相異物的排列。）

例題 3

- (1) 有一階梯共有 8 層，若每次可走 1 階或 2 階，請問共有幾種走法
- (2) 若在 15 秒之內搖鈴，每次鈴響 1 秒或 2 秒，每次響完之後須停 1 秒後方可再次響鈴，請問共有多少種響鈴順序。

Ans：

- (1) 假設 1 階共走 x 次，2 階共走 y 次，可得 $x+2y=8$ ，

又 x 、 y 皆為正整數，故所有解如表格：

x	8	6	4	2	0
y	0	1	2	3	4
總步數	8	7	6	5	4

若 1 階走 8 次，方法數為 $\frac{8!}{8!}=1$ 種，

若 1 階走 6 次、2 階走 1 次，方法數為 $\frac{7!}{6!1!}=7$ 種，

同理類推，故總共有 $\frac{8!}{8!} + \frac{7!}{6!1!} + \frac{6!}{4!2!} + \frac{5!}{2!3!} + \frac{4!}{4!} = 1+7+15+10+1=34$ 種走法。

- (2) 假設響鈴 1 秒共 x 次，響鈴 2 秒共 y 次，響鈴間隔 1 秒共 $x+y-1$ 次，

可得 $x+2y+(x+y-1)=15$ ，化簡 $2x+3y=16$ ，

又 x 、 y 皆為正整數，故所有解如表格：

x	8	5	2
y	0	2	4
總步數	8	7	6

若響鈴 1 秒共 8 次，響鈴順序為 $\frac{8!}{8!}=1$ 種，

若響鈴 1 秒共 5 次，響鈴 2 秒共 2 次，響鈴順序為 $\frac{7!}{5!2!}=21$ 種，

同理類推，故總共有 $\frac{8!}{8!} + \frac{7!}{5!2!} + \frac{6!}{2!4!} = 1+21+15=37$ 種響鈴順序。

例題 4

3 隻相同的筆和 4 本相同的書，試問下列狀況的分法各有多少種：

- (1) 分給 7 人，每人至少分得一樣物品。
- (2) 分給 9 人，每人至多分得一樣物品。

Ans：

- (1) 要分的物品和人數相同且依題意每人皆可得一樣物品，

可視為 3 隻相同的筆和 4 本相同的書做不盡相異物排列，

$$\text{故答案為 } \frac{7!}{3!4!} = 35。$$

- (2) 要分的物品少於人數且依題意沒有人會拿多於一樣物品，

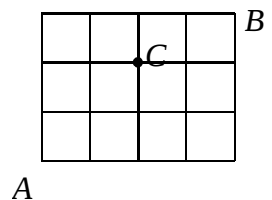
可視為 3 隻相同的筆、4 本相同的書和 2 個相同隱形物做不盡相異物排列，

$$\text{故答案為 } \frac{9!}{3!4!2!} = 1260。$$

例題 5

如右圖，從 A 走到 B，走最短路徑，求下列方法數：

- (1) 任意走。
- (2) 必經過 C 點。



Ans：

- (1) 走最短路徑即表示只向右走→和向上走↑，

則問題可視為向右走 4 次向上走 3 次的排列數，

$$\text{即 4 個→和 3 個↑的排列數，故答案為 } \frac{7!}{4!3!} = 35。$$

- (2) 必經過 C 點，即先從 A 走到 C，再從 C 走到 B，

$$\text{從 A 走到 C 向右走 2 次向上走 2 次，走法共有 } \frac{4!}{2!2!} = 6 \text{ 種，}$$

$$\text{從 C 走到 B 向右走 2 次向上走 1 次，走法共有 } \frac{3!}{2!1!} = 3 \text{ 種，}$$

$$\text{故答案為 } 6 \times 3 = 18。$$



溫故知新

習題 1

將「我為人人，人人為我」任意排列共有幾種排列數？

習題 2

將英文單字「*tomato*」中的字母重新排列，其中母音的順序不變，共有幾種排列數？

習題 3

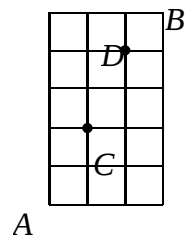
設一樓至二樓有 9 階樓梯，若上樓每步可跨 1 階或 2 階樓梯，則由一樓到二樓共有多少種上樓的方法？

習題 4

有相同的綠球 4 顆，白球 2 顆，黑球 3 顆，分給 10 位小朋友，每人最多一球，請問有幾種分法？

習題 5

如右圖，從 *A* 走到 *B*，其中必定經過 *C* 和 *D* 點，走最短路徑，共有幾種走法？



習題 6

【指考乙 98】

某動物園的遊園列車依序編號 1 到 7，共有 7 節車廂，今想將每節車廂畫上一種動物。如果其中的兩節車廂畫企鵝，另兩節車廂畫無尾熊，剩下的三節車廂畫上貓熊，並且要求最中間的三節車廂必須有企鵝、無尾熊及貓熊，則 7 節車廂一共有_____種畫法。



解答與解析

習題 1：420

習題 2 : 60

習題 3 : 55

習題 4 : 6300

習題 5 : 18

習題 6 :

如右圖，中間三節企鵝、無尾熊、熊貓可任意交換，

曲線部分企鵝、無尾熊、兩節熊貓也可任意交換，

企無 (企無熊) 熊熊

故答案為 $3! \times \frac{4!}{2!} = 72$ 。