

# 數學 1 進階講義

對數函數的定義、遞增與遞減、  
圖形特性

景美女中・莊嘉銘老師



信望愛文教基金會



### 3-4-1~3 對數函數的定義、遞增與遞減、圖形特性

#### 定理敘述

#### 1. 對數函數的定義

$a > 0$  且  $a \neq 1$ ， $x > 0$ ，函數  $f(x) = \log_a x$  稱為以  $a$  為底數的對數函數。

其中定義域為所有正實數，對應域（值域）為所有實數。

#### 2. 函數遞增與遞減定義

若  $x_1$ 、 $x_2$  為實數且  $x_2 > x_1$ ，則

(1) 當  $f(x_2) \geq f(x_1)$  時，稱  $f(x)$  為遞增函數。

(2) 當  $f(x_2) \leq f(x_1)$  時，稱  $f(x)$  為遞減函數。

(3) 當  $f(x_2) > f(x_1)$  時，稱  $f(x)$  為嚴格遞增函數。

(4) 當  $f(x_2) < f(x_1)$  時，稱  $f(x)$  為嚴格遞減函數。

#### 3. 圖形特性

(1) 若  $a > 1$ ：

①  $f(x) = \log_a x$  的圖形恆在  $y$  軸的右方，故  $y$  軸為漸近線。

② 對於任意正實數  $x$ ， $f(x_1 \times x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  恆成立。

③ 指數函數的圖形恆過  $(1, 0)$ 。

④ 圖形凹口向下。

⑤ 圖形為嚴格遞增；

(2) 若  $0 < a < 1$ ：

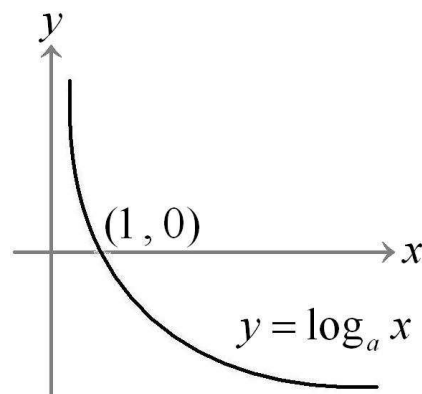
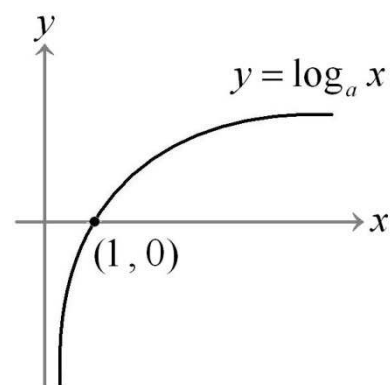
①  $f(x) = \log_a x$  的圖形恆在  $y$  軸的右方，故  $y$  軸為漸近線。

② 對於任意正實數  $x$ ， $f(x_1 \times x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  恆成立。

③ 指數函數的圖形恆過  $(1, 0)$ 。

④ 圖形凹口向上。

⑤ 圖形為嚴格遞減。



## 定理證明或說明

1. 對數函數  $f(x) = \log_a x$  的限制條件： $a > 0$  且  $a \neq 1$ ， $x > 0$
2. 對數函數  $f(x) = \log_a x$  的定義域： $x > 0$
3. 圖形的交點個數即為實根個數。
4. 對於任意實數  $x$ ， $f(x_1 \times x_2) = f(x_1) + f(x_2)$  恆成立。

證明：因為  $f(x_1 \times x_2) = \log_a(x_1 \times x_2) = \log_a x_1 + \log_a x_2 = f(x_1) + f(x_2)$ 。

## 注意事項

1. 底數  $a > 0$  且  $a \neq 1$ ，真數  $x > 0$ 。
2. 漸近線可以判斷圖形的左右平移量。

## 關鍵字

對數函數、實根個數、交點個數、圖形。

### 例題 1

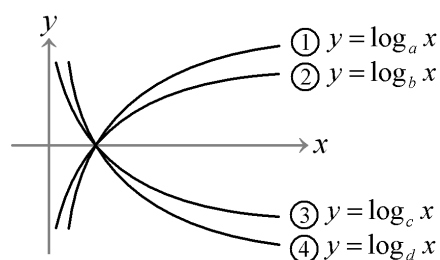
右圖中：

①表  $y = \log_a x$ ，②表  $y = \log_b x$

③表  $y = \log_c x$ ，④表  $y = \log_d x$

則：

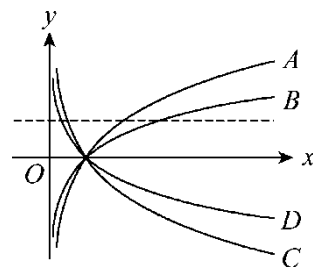
- (A)  $a > b > 1 > c > d > 0$   
(B)  $b > a > 1 > c > d > 0$   
(C)  $a > b > 1 > d > c > 0$   
(D)  $b > a > 1 > d > c > 0$ 。



Ans：

畫水平線  $y = 1$ ，與圖交於四點依序為  $(d, 1)$ ， $(c, 1)$ ， $(a, 1)$ ， $(b, 1)$

故可得知  $0 < d < c < 1 < a < b$ ，所以選(B)

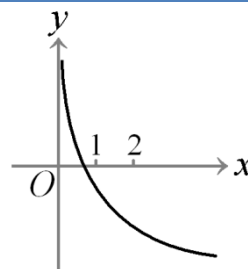


## 例題 2

右圖為函數  $y = a + \log_b x$  之圖形，其中  $a, b$

皆為常數，則下列何者為真？

- (A)  $a < 0, b > 1$  (B)  $a > 0, b > 1$   
(C)  $a = 0, b > 1$  (D)  $a > 0, 0 < b < 1$   
(E)  $a < 0, 0 < b < 1$



Ans :

由圖可知此函數為遞減函數，故  $0 < b < 1$

又  $x = 1$  代入可知  $y = a$ ，即圖形過  $(1, a)$

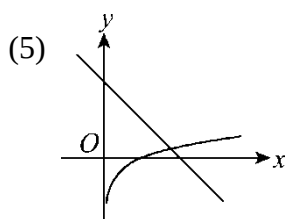
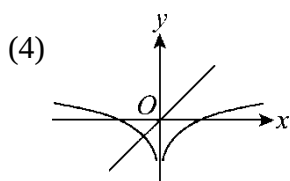
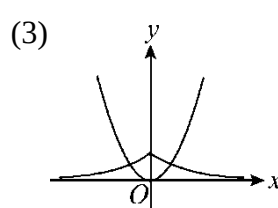
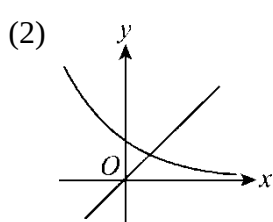
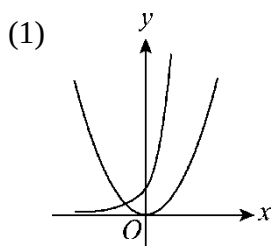
所以  $a < 0$ ，故選(E)

## 例題 3

下列方程式何者恰有一組實數解？

- (1)  $4^x = x^2$  (2)  $x = 2^{-x}$  (3)  $2^{-|x|} = x^2$   
(4)  $x - \log|x| = 0$  (5)  $x + \log x = 2$ 。

Ans :



由圖可知(1)(2)(4)(5)



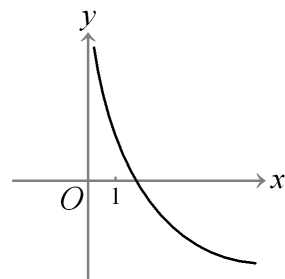
## 溫故知新

### 習題 1

右圖為函數  $y = a + \log_b x$  之部分圖形，其中  $a, b$

皆為常數，則下列何者為真？

- (A)  $a < 0, b > 1$  (B)  $a > 0, b > 1$   
 (C)  $a = 0, b > 1$  (D)  $a > 0, 0 < b < 1$   
 (E)  $a < 0, 0 < b < 1$



### 習題 2

坐標平面上，下列哪些圖形與  $y = x$  恰交於一點？

- (1)  $y = 2^{|x|}$  (2)  $y = (\frac{1}{2})^{|x|}$  (3)  $y = \log |x|$   
 (4)  $y = |\log x|$  (5)  $y = x + 1$ 。

### 習題 3

四個函數分別表示如下：(A)  $y = 3^x$  (B)  $y = (\frac{1}{3})^x$  (C)  $y = \log_3 x$  (D)  $y = \log_{\frac{1}{3}} x$

請選出適當的答案填入（可複選）

- (1) 圖形由左至右逐漸遞減者\_\_\_\_\_。  
 (2) 圖形與  $y = 3^{-x}$  對稱於直線  $y = x$  者\_\_\_\_\_。  
 (3) 圖形與任意水平線  $y = k$  ( $k$  為任意實數)，都有交點者\_\_\_\_\_。  
 (4) 圖形與  $y = \log_{2^{-1}} x$  有交點者\_\_\_\_\_。



## 解答與解析

習題 1：(D)

習題 2：(2)(3)(4)

習題 3：(1)(B)(D) (2)(D) (3)(C)(D) (4)(A)(B)(C)(D)