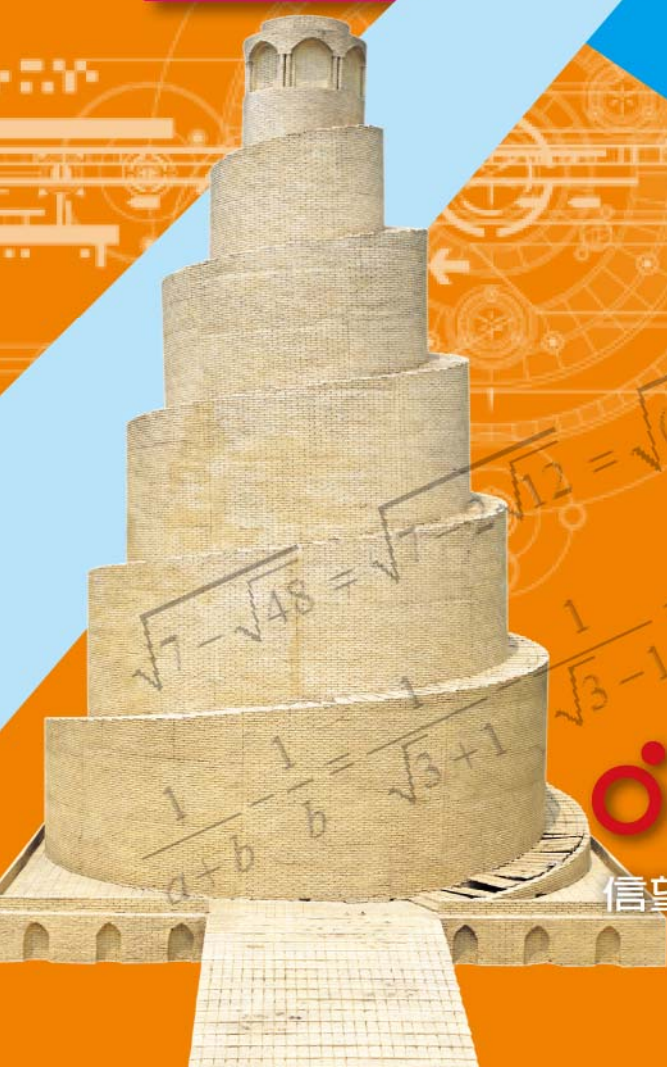


數學 3

進階
講義

點到直線的距離

成功高中 · 陳冠宏 老師



信望愛文教基金會

10-3-2 點到直線的距離

定理敘述

1. 點到直線的距離

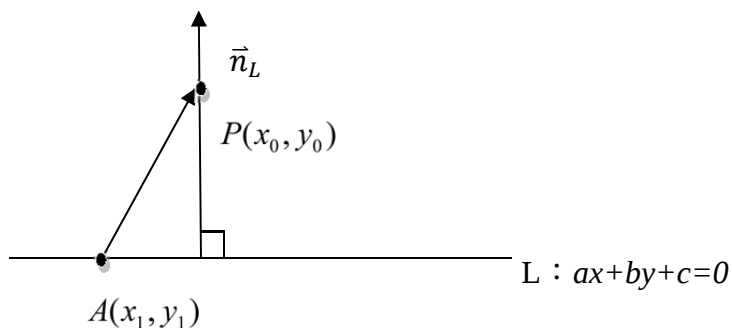
$P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax+by+c=0$ 的距離為 $d(P, L) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

2. 兩平行線間的距離

$\begin{cases} L_1: ax+by+c_1=0 \\ L_2: ax+by+c_2=0 \end{cases}$ 為兩平行直線，則此兩平行間之距離為 $d(L_1, L_2) = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

定理證明或說明

1. 點到直線的距離



如圖， $A(x_1, y_1)$ 為直線 L 上一點，

則 $P(x_0, y_0)$ 到直線 $L: ax+by+c=0$ 的距離即 $\overrightarrow{AP}$ 在 $\vec{n}$ 上的投影長 $= \frac{|\overrightarrow{AP} \cdot \vec{n}|}{|\vec{n}|}$

$$= \frac{|a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$\because A(x_1, y_1)$ 為直線 L 上一點 $\therefore ax_1 + by_1 + c = 0 \Rightarrow ax_1 + by_1 = -c$

$$\text{則 } \frac{|ax_0 + by_0 - (ax_1 + by_1)|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

2. 兩平行線間的距離

$\begin{cases} L_1: ax + by + c_1 = 0 \\ L_2: ax + by + c_2 = 0 \end{cases}$ ，因兩平行線間距離處處相等，取 L_2 上一點 $P(x_0, y_0)$ ，

$$\text{則 } d(L_1, L_2) = d(P, L_1) = \frac{|ax_0 + by_0 + c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

又 P 為 L_2 上一點，故 $ax_0 + by_0 + c_2 = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 = -c_2$

$$\text{所以 } \frac{|ax_0 + by_0 + c_1|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c_1 - c_2|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



關鍵字

點到直線距離

例題 1

已知一點 $P(2,3)$ ，直線 $L: 3x+4y-5=0$ ，試求 P 到 L 的距離_____

$$\text{Ans: } \frac{13}{5}$$

$$\text{解: } d(P, L) = \frac{|6+12-5|}{\sqrt{3^2+4^2}} = \frac{13}{5}$$

例題 2

已知兩直線 $L_1: 5x+12y-3=0, L_2: 5x+12y+23=0$ ，試求 L_1, L_2 間的距離_____

$$\text{Ans: } 2$$

$$\text{解: } d(L_1, L_2) = \frac{|-3-23|}{\sqrt{5^2+12^2}} = 2$$

例題 3

已知 $A(1,2), B(5,-1), C(3,5)$ ，試求 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB}$ 邊上的高_____

$$\text{Ans: } \frac{18}{5}$$

解：

即求 C 到直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的距離

$$\overleftrightarrow{AB} : 3x + 4y - 11 = 0$$

$$\therefore \text{高} = \frac{|9 + 20 - 11|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{18}{5}$$

例題 4

試求直線 $L_1 : 2x + 3y - 3 = 0$ 上一點 P，使 P 點到 $L_2 : 3x + 4y + 5 = 0$ 距離為 2，則 P 點坐標為_____

Ans : (3,-1)或(-57,39)

解：

$$L_1 \text{ 的參數式為 } \begin{cases} x = 0 + 3t \\ y = 1 - 2t \end{cases}, t \in R, \text{ 故設 } P(3t, 1-2t)$$

$$\text{又 } d(P, L_2) = \frac{|9t + 4 - 8t + 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow |t + 9| = 10 \Rightarrow t = 1, -19$$

$\therefore$ P 點坐標為(3,-1)或(-57,39)

例題 5

與直線 $L_1 : 3x + 4y + 7 = 0$ 平行且距離為 2 的直線方程式為_____

Ans : $3x + 4y - 3 = 0$ 或 $3x + 4y + 17 = 0$

解：

設直線 $L : 3x + 4y + k = 0$

$$\text{則 } d(L, L_1) = \frac{|7 - k|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2 \Rightarrow |7 - k| = 10 \Rightarrow k = -3, 17$$

$\therefore 3x + 4y - 3 = 0$ 或 $3x + 4y + 17 = 0$

例題 6

設點 $P(1, 2)$ ，直線 $L : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 3t \end{cases}$ ， t 為實數，則點 P 到直線 L 的距離為_____

Ans : 2

$$\text{解：直線 } L \text{ 之一般式為 } 3x + 4y - 1 = 0, \quad d(P, L) = \frac{|3 \times 1 + 4 \times 2 - 1|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$



溫故知新

習題 1

已知一點 $P(3,5)$ ，直線 $L: 4x - 3y - 5 = 0$ ，試求 P 到 L 的距離_____

習題 2

已知兩直線 $L_1: 5x - 12y - 7 = 0$, $L_2: 10x - 24y + 12 = 0$ ，試求 L_1, L_2 間的距離_____

習題 3

已知 $A(1,2)$, $B(5,-1)$, $C(4,8)$ ，試求 $\triangle ABC$ 中 $\overline{AB}$ 邊上的高_____

習題 4

兩直線 $L_1: x - 3y - 7 = 0$, $L_2: 13x + 9y + 5 = 0$ ，求平行 L_1 且與 L_1 的距離為 2 的直線方程式為_____

習題 5

已知點 $P(2, 3)$ ，直線 $L: \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 2 - t \end{cases}$ ， t 為實數，則 P 點到直線 L 的距離為_____

習題 6

設 $A(-1,2)$, $B(3,-2)$ ，直線 $L: 2x - 3y + 4 = 0$ ，若 $\overline{AB}$ 與直線 L 相交於 P 點，
則 $\overline{AP} : \overline{BP} =$ _____

習題 7

【學測 99】

坐標平面上給定兩點 $A(1,0)$ 與 $B(0,1)$ ，又考慮另外三點 $P(\pi,1)$ ， $Q(-\sqrt{3},6)$ 與 $R(2, \log_4 32)$ 。
令 $\triangle PAB$ 的面積為 p ， $\triangle QAB$ 的面積為 q ， $\triangle RAB$ 的面積為 r ，請問下列哪一個選項是正確的？

(1) $p < q < r$ (2) $p < r < q$ (3) $q < p < r$ (4) $q < r < p$ (5) $r < q < p$

習題 8

【學測 96】

坐標平面上有相異兩點 P, Q ，其中 P 點坐標為 (s, t) 。已知線段 $\overline{PQ}$ 的中垂線 L 的方程式為 $3x - 4y = 0$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1) 向量 $\overrightarrow{PQ}$ 與向量 $(3, -4)$ 平行
 (2) 線段 $\overline{PQ}$ 的長度等於 $\frac{|6s-8t|}{5}$
 (3) Q 點坐標為 (t, s) (4) 過 Q 點與直線 L 平行之直線必過點 $(-s, -t)$
 (5) 以 O 表示原點，則向量 $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 與向量 $\overrightarrow{PQ}$ 的內積必為 0

解答與解析

習題 1 : $\frac{8}{5}$

習題 2 : 1

習題 3 : $\frac{33}{5}$

習題 4 : $x - 3y - 7 \pm 2\sqrt{10} = 0$

習題 5 : $2\sqrt{2}$

習題 6 : 1 : 4

習題 7 : (1)

解：底邊相同，只須判別高之大小即可

$$\overleftrightarrow{AB} : x + y - 1 = 0$$

$$d(P, \overleftrightarrow{AB}) = \frac{|\pi + 1 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \approx \frac{3.14}{\sqrt{2}}$$

$$d(Q, \overleftrightarrow{AB}) = \frac{|-\sqrt{3} + 6 - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}} \approx \frac{3.3}{\sqrt{2}}, \quad d(R, \overleftrightarrow{AB}) = \frac{|2 + \frac{5}{2} - 1|}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{2}} = \frac{3.5}{\sqrt{2}}$$

$\therefore p < q < r$ ，故選(1)

習題 8 : (1)(2)(4)(5)

解：(1) 中垂線 L 的法向量 $(3, -4) // \overrightarrow{PQ}$

$$(2) \overline{PQ} = 2d(P, L) = 2 \left| \frac{3s - 4t}{5} \right| = \left| \frac{6s - 8t}{5} \right|$$

(3) 若 $Q(t, s)$ ，則 $\overline{PQ}$ 中點 $(\frac{s+t}{2}, \frac{t+s}{2})$ 不在 L 上

(4) $\because O$ 必為 (s, t) 與 $(-s, -t)$ 之中點

$\therefore$ 過 O 且與 L 平行之直線必過 $(-s, -t)$

(5) $\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}$ 平行中垂線 L ，故垂直 $\overline{PQ}$

故選(1)(2)(4)(5)