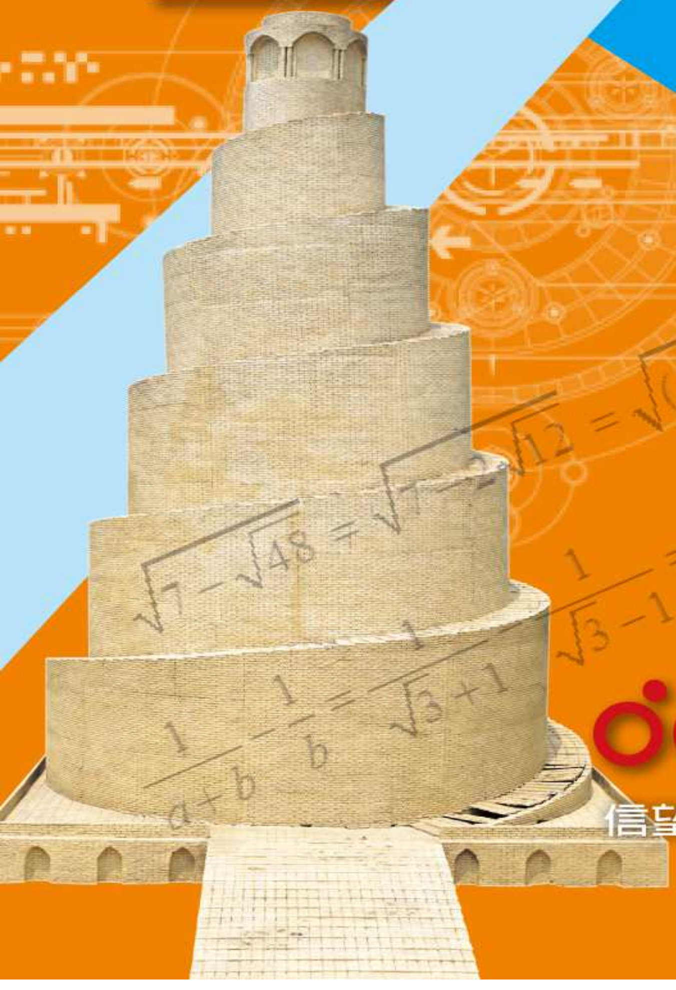
高中數學 進階講義

多項式不等式

陳清海　老師



dopod

信望愛文教基金會

ok124　多項式函數的圖形與多項式不等式

一、多項式函數及其圖形

1.　由多項式所形成的函數，稱為多項式函數．

2.　當多項式 $f(x)$的次數為 n時， $f(x)$稱為 n次多項式函數，

簡稱 **n** 次函數；而常數多項式 $f(x)=a_0$所決定的函數，

稱為常數函數．例如： $f(x)=2x^3+5x^2-8x+7$是三次函數；

$f(x)=4$是常數函數．

3.　多項式函數的圖形：

(1)　常數函數及一次函數的圖形都是直線．

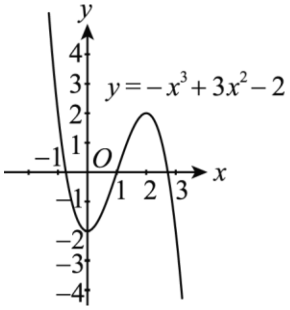
(2)　二次函數的圖形都是拋物線．

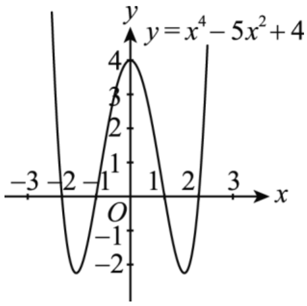
(3)　高次（三次或三次以上）函數的圖形都是連續不斷的曲線．
（目前我們只能透過描點的方法，描出約略的圖形）

4.　多項式函數圖形的性質：

(1)　多項式函數的圖形都是連續不斷的．

(2)　對於次數不低於 **1** 次的多項式函數，當首項係數為正數時，
函數圖形的最右方是上升的；當首項係數為負數時，函數圖形的最右方是下降的．





【範例 1】

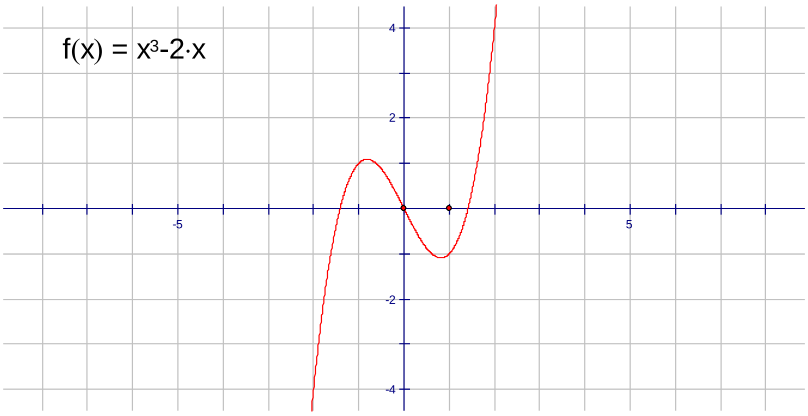
描繪三次函數 $f(x)=x^3-2x$ 的圖形．

【詳解】

首先列出一些滿足 $y=x^3-2x$ 的點 (x,y) 如下：

x	-3.0	-2.0	-1.5	-1.0	-0.5	0.0	0.5	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5
y	-21.0	-4.0	-0.4	1.0	0.9	0.0	-0.9	-1.0	0.4	4.0	###	21.0	###

接著在坐標平面上，分別將上列各數對描點，
再利用平滑曲線把這些點連接起來而得出下圖，
即為 $y=x^3-2x$ 的圖形，其中圖形與 x 軸有三個交點，
這三點的 x 坐標分別為 $-\sqrt{2}$，0，$\sqrt{2}$．

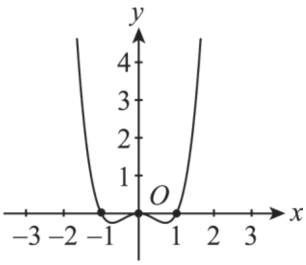


【演練 1】

描繪四次函數 $f(x)=x^4-x^2$ 的圖形．

【詳解】

利用描點法，可得 $y=x^4-x^2$ 的圖形，如下圖所示．
其中圖形與 x 軸有三個交點，這三點的 x 坐標分別為 $-1, 0, 1$．



二、多項式函數的圖形與方程式的根

1. 多項式函數 $f(x)$之圖形與 x軸交點的 x坐標，就是多項式方程式 $f(x)=0$的實根．

2. 多項式方程式的實根會呈現在函數的圖形上，而虛根是不會在圖形上出現的．

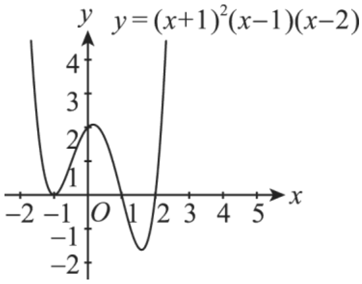
【範例 2】

(1) **描繪四次函數 $y=(x+1)^2(x-1)(x-2)$的圖形，並指出圖形與 x 軸交點的 x 坐標．**

(2) **解四次方程式$(x+1)^2(x-1)(x-2)=0$．**

【詳解】

(1) 利用描點的方法，可得函數 $y=(x+1)^2(x-1)(x-2)$的圖形如下，其中圖形與 x 軸有三個交點，這三點的 x 坐標分別為 $-1, 1, 2$．



(2) 方程式 $(x+1)^2(x-1)(x-2)=0$的四個根為 $-1, -1, 1, 2$，其中-1 為二重根．

【演練 2】

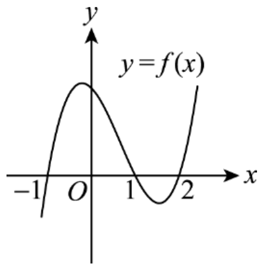
試問用下列哪一個函數的部分圖形來描述右圖較恰當?

(1) $f(x)=(x-1)(x+1)(x+2)$．

(2) $f(x)=(x+1)(x-1)(x-2)$．

(3) $f(x)=-(x+1)(x-1)(x-2)$．

(4) $f(x)=(x+1)^2(x-1)(x-2)$．



Ans：(2)

【詳解】

因為圖形與 x 軸交於 $(-1,0)$, $(1,0)$, $(2,0)$ 三點，所以選項(1)不符合．

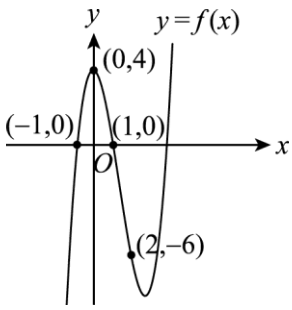
因為圖形的右邊是向上攀升的，所以選項(3)不符合．

因為在 $x=-1$ 左右附近的函數值異號，所以選項(4)不符合．

故選(2)．

【範例 3】

已知三次函數 $y=f(x)$ 的部分圖形如下，求 $f(3)$ 的值．



Ans：-8

【詳解】

因為圖形與 x 軸交於 $(-1,0)$, $(1,0)$ 二點，

且 $f(x)$ 是三次函數，所以可設 $f(x)=(x+1)(x-1)(ax+b)$．

又由圖形通過 $(0,4)$, $(2,-6)$，可列得

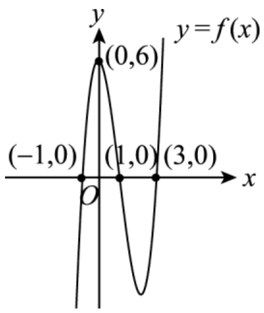
$$\begin{cases} f(0)=1\cdot(-1)\cdot b=4 \\ f(2)=3\cdot 1\cdot(2a+b)=-6 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b=-4 \\ 2a+b=-2 \end{cases}.$$

解得 $a=1,\ b=-4$，即 $f(x)=(x+1)(x-1)(x-4)$．

故 $f(3)=(3+1)(3-1)(3-4)=-8$．

【演練 3】

已知三次函數 $y=f(x)$ 的部分圖形如下，求 $f(4)$ 的值．



Ans：30

【詳解】

因為圖形與 x 軸交於 $(-1,0),\ (1,0),\ (3,0)$ 三點，

且 $f(x)$ 是三次函數，所以可設 $f(x)=a(x+1)(x-1)(x-3)$．

又由圖形通過 $(0,6)$，得

$f(0)=a\cdot 1\cdot(-1)\cdot(-3)=6 \Rightarrow a=2$，

即 $f(x)=2(x+1)(x-1)(x-3)$．

故 $f(4)=2(4+1)(4-1)(4-3)=30$．

三、一次不等式

1. 設 $f(x)$是實係數n次多項式，不等式：

$f(x)>0,\ f(x)<0,\ f(x)\geq 0$和 $f(x)\leq 0$都稱為n次多項式不等式，

簡稱 **n** 次不等式．

2. 當實數α使得不等式 $f(\alpha)>0$成立時，實數α稱為不等式

$f(x)>0$的解．而「解不等式」就是要找出滿足該不等式

的所有實數解．

3. 一次不等式$ax-b>0$的解：

(1)當 $a>0$時，解為 $x>\dfrac{b}{a}$．

(2)當 $a<0$時，解為 $x<\dfrac{b}{a}$．

【範例 4】

解不等式 $\begin{cases} -2x+1 \le x-2 \\ 3(x-1)+2 < 2x+1 \end{cases}$.

Ans：1≦x＜2

【詳解】

由 $-2x+1 \le x-2$ 移項得 $-2x-x \le -2-1$,

所以 $-3x \le -3$，解得 $x \ge 1$.

再由 $3(x-1)+2 < 2x+1$ 展開得 $3x-3+2 < 2x+1$

$\Rightarrow 3x-1 < 2x+1$,

移項得 $3x-2x < +1+1$，所以 $x < 2$.

因為 x 需同時滿足兩不等式，所以兩範圍取共同的部分，

即 $1 \le x < 2$.

【演練 4】

解不等式 $2-\dfrac{x}{3} > 5-\dfrac{x-2}{2}$.

Ans：x＞24

【詳解】

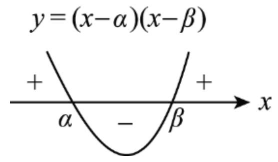
兩邊同乘 6，得

$12-2x > 30-3(x-2)$,

解得 $x > 24$.

四、二次不等式

1. 設 α, β 為實數，且 $\alpha<\beta$.



(1) 二次不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)<0$ 的解為

$\alpha<x<\beta$（兩數之間）.

(2) 二次不等式 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ 的解為

$x>\beta$ 或 $x<\alpha$（兩數的兩邊）.

2. 藉由二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 之判別式 $D=b^2-4ac$ 的正、負或零，可以幫助我們找出二次不等式的解：

(1) 例 **5** 為判別式 $D>0$ 的情形 .

(2) 例 **6** 為判別式 $D=0$ 的情形 .

(3) 例 **7** 為判別式 $D<0$ 的情形 .

【範例 5】

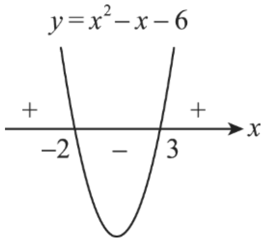
解下列二次不等式：（判別式 $D>0$ 的情形）

(1) $x^2-x-6\le 0$ ． **(2)** $35-2x-x^2<0$ ． **(3)** $x^2+x-5<0$ ．

Ans：(1) $-2\leqq x\leqq 3$，(2) $x<-7$ 或 $x>5$，(3) $\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$

【詳解】

(1) $x^2-x-6\le 0\Rightarrow (x-3)(x+2)\le 0\Rightarrow -2\le x\le 3$.



(2) $35-2x-x^2<0$

$\Rightarrow x^2+2x-35>0$

$\Rightarrow (x+7)(x-5)>0$

$\Rightarrow x<-7$ 或 $x>5$.

(3) 令 $x^2+x-5=0$，解得兩根為 $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{21}}{2}$ ．因此，

$x^2+x-5<0$

$\Rightarrow \left(x-\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\left(x-\dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\right)<0$

$\Rightarrow \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}<x<\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}$.

【演練 5】

解下列二次不等式：

(1) $2x^2-5x+2<0$ ． **(2)** $4-x-3x^2\le 0$ ． **(3)** $x^2-6x+2<0$ ．

Ans：(1) $\dfrac{1}{2}<x<2$，(2) $x\le -\dfrac{4}{3}$ 或 $x\ge 1$，(3) $3-\sqrt{7}<x<3+\sqrt{7}$

【詳解】

(1) $2x^2-5x+2<0$

$\Rightarrow (2x-1)(x-2)<0$

$\Rightarrow \dfrac{1}{2}<x<2$.

(2) $4-x-3x^2\le 0$

$\Rightarrow 3x^2+x-4\ge 0$

$\Rightarrow (3x+4)(x-1)\ge 0$

$\Rightarrow x\le -\dfrac{4}{3}$ 或 $x\ge 1$.

(3) $x^2-6x+2<0$

$\Rightarrow \left(x-\left(3+\sqrt{7}\right)\right)\left(x-\left(3-\sqrt{7}\right)\right)<0$

$\Rightarrow 3-\sqrt{7}<x<3+\sqrt{7}$.

【範例 6】

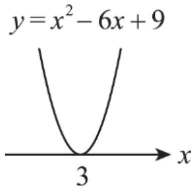
解二次不等式 $x^2-6x+9>0$ ．（判別式 $D=0$ 的情形）

Ans：x≠3

【詳解】

因為 $x^2-6x+9=(x-3)^2$,

所以原不等式可改寫成 $(x-3)^2>0$.



又因為對任一實數 x,

當 $x\ne 3$ 時, $(x-3)^2>0$ 恆成立 .

故原不等式的解為除 3 外的一切實數 .

【演練 6】

解二次不等式 $4x^2-12x+9\le 0$.

Ans：$x=\dfrac{3}{2}$

【詳解】

$4x^2-12x+9\le 0\Rightarrow (2x-3)^2\le 0\Rightarrow x=\dfrac{3}{2}$.

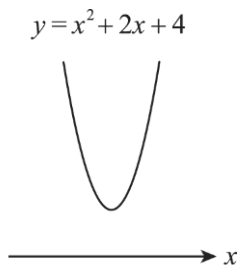
【範例 7】

解下列二次不等式：（判別式 $D<0$ 的情形）

(1) $x^2+2x+4>0$ ． **(2)** $x^2+2x+4\le 0$.

Ans：(1) 全體實數，(2) 無實數解

【詳解】



(1)　由配方法得 $x^2+2x+4=(x+1)^2+3\geq 3$．

這不等式告訴我們：無論 x 為任何實數，
x^2+2x+4都不小於 3（當然大於 0）．
故 $x^2+2x+4>0$的解為全體實數．

(2)　由(1)的討論知 $x^2+2x+4\leq 0$無實數解．

【演練 7】

解下列二次不等式：

(1) $x^2-2x+3<0$．　**(2)** $-2x^2+3x-8<0$．

Ans：(1) 無實數解，(2) 全體實數

【詳解】

(1)　因為 $x^2-2x+3=(x-1)^2+2\geq 2$，

所以不等式 $x^2-2x+3<0$無實數解．

(2)　先將原式改寫為 $2x^2-3x+8>0$．又

$$2x^2-3x+8=2\left(x-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{55}{8}\geq\frac{55}{8},$$

所以不等式 $-2x^2+3x-8<0$的解為全體實數．

【範例 8】

設二次不等式 $ax^2+5x+b>0$**的解為** $-\frac{1}{2}<x<3$，

求不等式 $bx^2+ax+1<0$**的解．**

Ans：無實數解

【詳解】

因為

$$-\frac{1}{2}<x<3$$

$$\Rightarrow\left(x+\frac{1}{2}\right)(x-3)<0$$

$$\Rightarrow x^2-\frac{5}{2}x-\frac{3}{2}<0$$

$\Rightarrow -2x^2+5x+3>0$，

所以不等式 $ax^2+5x+b>0$ 與 $-2x^2+5x+3>0$ 同義，因此

$\frac{a}{-2}=\frac{5}{5}=\frac{b}{3}$，解得 $a=-2,\ b=3$．

代入不等式 $bx^2+ax+1<0$ 得 $3x^2-2x+1<0$．

由配方法得

$$3x^2-2x+1=3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\geq\frac{2}{3}.$$

因此，不等式 $3x^2-2x+1<0$ 無實數解，

即不等式 $bx^2+ax+1<0$ 無實數解．

【演練 8】

設二次不等式 $ax^2+bx+c<0$ 的解為 $x<1$ 或 $x>2$，

求不等式 $bx^2+cx+a<0$ 的解．

Ans：$-\frac{1}{3}<x<1$

【詳解】

因為

$x<1$ 或 $x>2$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)>0$

$\Rightarrow x^2-3x+2>0$

$\Rightarrow -x^2+3x-2<0$，

所以不等式 $ax^2+bx+c<0$ 與 $-x^2+3x-2<0$ 的解相同，因此

$\frac{a}{-1}=\frac{b}{3}=\frac{c}{-2}$

令 $a=-k,\ b=3k,\ c=-2k,\ k>0$．

代入 $bx^2+cx+a<0$，得

$3kx^2-2kx-k<0$

$\Rightarrow 3x^2-2x-1<0$

$\Rightarrow (3x+1)(x-1)<0$．

解得 $-\frac{1}{3}<x<1$．

五、二次函數的恆正與恆負

1.	二次不等式 $ax^2+bx+c\geq 0$ 恆成立 $\Leftrightarrow$ $a>0$ 且 $b^2-4ac\leq 0$．
2.	二次不等式 $ax^2+bx+c\leq 0$ 恆成立 $\Leftrightarrow$ $a<0$ 且 $b^2-4ac\leq 0$．

【範例 9】

設 $f(x)=4x^2+4ax+7a$，若對任意實數 x，$f(x)\geq 12$ 恆成立，

求實數 a 的範圍．

Ans： $3\leq a\leq 4$

【詳解】

因為 $f(x)\geq 12$ 恆成立，所以對任意實數 x，下列恆成立

$f(x)=4x^2+4ax+7a\geq 12\Rightarrow 4x^2+4ax+(7a-12)\geq 0$，

又二次項係數 4＞0，所以只要判別式 $D\leq 0$ 即可，即

$D=(4a)^2-4\cdot 4\cdot(7a-12)\leq 0$，

解得 $16a^2-16\cdot 7a+16\cdot 12\leq 0$

$\Rightarrow a^2-7a+12\leq 0$

$\Rightarrow (a-3)(a-4)\leq 0$

$\Rightarrow 3\leq a\leq 4$．

【演練 9】

已知二次不等式 $-x^2+2x+k>0$ 無實數解，求實數 k 的範圍．

Ans： $k\leq -1$

【詳解】

因為不等式 $-x^2+2x+k>0$ 無實數解，所以對任意實數 x，

$-x^2+2x+k\leq 0$ 恆成立．又二次項係數−1＜0，

所以只要判別式 $D\leq 0$ 即可，即

$D=2^2-4\cdot(-1)\cdot k\leq 0$

$\Rightarrow 4+4k\le 0$．

解得 $k\le -1$．

【範例 10】

設 $x, x+1, x+2$ 表一個鈍角三角形的三邊長，求實數 x 的範圍．

Ans： $1<x<3$

【詳解】

因為邊長須為正數，所以 $x>0$ 且 $x+1>0$ 且 $x+2>0$．

得 $x>0$ 且 $x+2$ 為最長邊．由鈍角三角形的三邊長可列得

$$\begin{cases} x+(x+1)>x+2 & ① \\ x^2+(x+1)^2<(x+2)^2 & ② \end{cases}$$

由①得， $x>1$．

由②得， $x^2-2x-3<0 \Rightarrow (x-3)(x+1)<0 \Rightarrow -1<x<3$．

綜合①，②及 $x>0$ 得 $1<x<3$．

【演練 10】

設 $2x-1, x, 2x+1$ 表一個鈍角三角形的三邊長，求實數 x 的範圍．

Ans： $2<x<8$

【詳解】

因為邊長須為正數，所以 $2x-1>0$ 且 $x>0$ 且 $2x+1>0$．

得 $x>\frac{1}{2}$ 且 $2x+1$ 為最長邊．由鈍角三角形的三邊長可列得

$$\begin{cases} (2x-1)+x>2x+1 & ① \\ (2x-1)^2+x^2<(2x+1)^2 & ② \end{cases}$$

由①得， $x>2$．

由②得， $x^2-8x<0 \Rightarrow x(x-8)<0 \Rightarrow 0<x<8$．

綜合①，②及 $x>\frac{1}{2}$ 得 $2<x<8$．

六、高次不等式

高次不等式的解題原則:

(1) 先使多項式的領導係數為正．

(2) 再將多項式分解成實係數一次式或二次式的乘積．

(3) 將多項式方程式的實根標示在數線上，
再依粗略的函數圖形，討論不等式的解．

(4) 畫函數圖形的原則：從右上方畫起，
奇數次方變號（曲線穿過 x 軸），
偶數次方不變號（曲線與 x 軸相切）.

【範例 11】

解下列不等式：

(1) $(x-1)(x-2)(x-3)<0$.

(2) $(x-1)(x-2)^2(x-3)\geq 0$.

(3) $(x-1)^4(x-2)^3(x-3)\leq 0$.

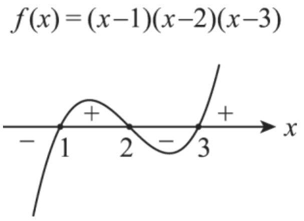
Ans：(1) $x<1$或 $2<x<3$，(2) $x\leq 1$或 $x=2$或 $x\geq 3$，(3) $x=1$或 $2\leq x\leq 3$

【詳解】

依「從右上方畫起，奇數次方變號，偶數次方不變號」的原則，

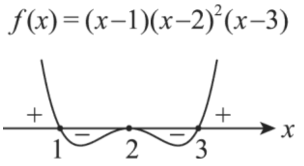
畫出各函數的粗略圖形，討論不等式的解如下：

(1)



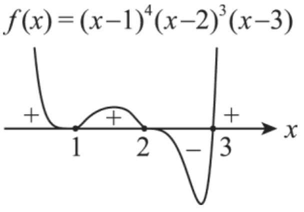
由上圖可得原不等式的解為 $x<1$或 $2<x<3$.

(2)



由上圖可得原不等式的解為 $x\leq 1$或 $x=2$或 $x\geq 3$.

(3)



由上圖可得原不等式的解為 $x=1$或 $2\leq x\leq 3$.

【演練 11】

解下列不等式：

(1) $(x+1)(x+2)(x+3)>0$.　　**(2)** $(x-2)^2(x+3)(x-5)<0$.

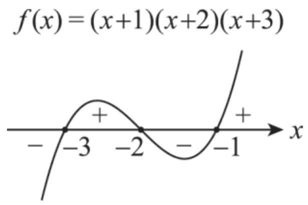
(3) $(x+1)^{101}(x-2)^{102}(x-5)^{103}\geq 0$.　**(4)** $x^3-5x^2+2x+8>0$.

Ans：(1) $-3<x<-2$或 $x>-1$，(2) $-3<x<2$或 $2<x<5$，
(3) $x\leq -1$或 $x=2$或 $x\geq 5$，(4) $-1<x<2$或 $x>4$

【詳解】

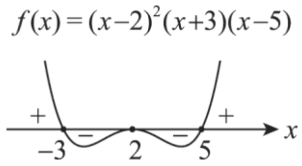
依「從右上方畫起，奇數次方變號，偶數次方不變號」的原則，
畫出各函數的粗略圖形，討論不等式的解如下：

(1)



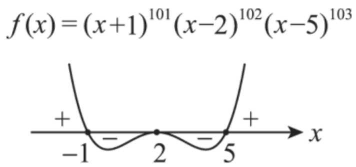
由上圖可得原不等式的解為 $-3<x<-2$或 $x>-1$.

(2)



由上圖可得原不等式的解為 $-3<x<2$或 $2<x<5$.

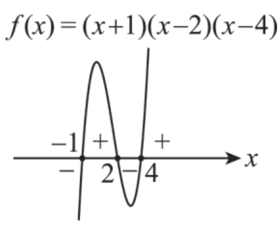
(3)



由上圖可得原不等式的解為 $x\leq -1$或 $x=2$或 $x\geq 5$.

(4) 將原式利用牛頓定理改寫為

$$x^3-5x^2+2x+8>0 \Rightarrow (x+1)(x-2)(x-4)>0 .$$



由上圖可得原不等式的解為 $-1<x<2$或 $x>4$.

【範例 12】

試問不等式 $(x^2-4x+2)(2x-5)(2x-37)\le 0$ 有幾個整數解．

Ans：17

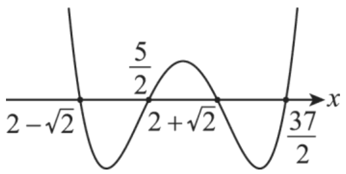
【詳解】

將原式改寫為

$$\left(x-\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{2}\right)\right)(2x-5)(2x-37)\le 0\ .$$

設函數 $f(x)=\left(x-\left(2+\sqrt{2}\right)\right)\left(x-\left(2-\sqrt{2}\right)\right)(2x-5)(2x-37)$．

函數 $f(x)$ 的略圖如右：



故原不等式的解為

$$2-\sqrt{2}\le x\le\frac{5}{2} \text{ 或 } 2+\sqrt{2}\le x\le\frac{37}{2}\ .$$

因此 x 的整數解為 $1, 2, 4, 5, \ldots, 17, 18$，共 17 個．

【演練 12】

解下列不等式：

(1) $(4-x^2)(x^2-2x-3)>0$．

(2) $(x^2-1)(x^3-1)>0$．

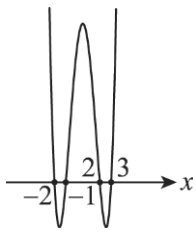
Ans：(1) $-2<x<-1$ 或 $2<x<3$，(2) $-1<x<1$ 或 $x>1$

【詳解】

(1) 將原式改寫為

$$(x^2-4)(x^2-2x-3)<0$$

$$\Rightarrow\ (x-2)(x+2)(x-3)(x+1)<0\ .$$

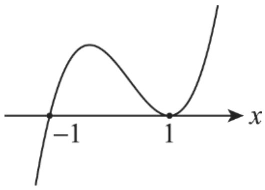


由右圖可得原不等式的解為 $-2<x<-1$ 或 $2<x<3$．

(2) 將原式改寫為

$$(x-1)(x+1)(x-1)(x^2+x+1)>0$$

$$\Rightarrow\ (x-1)^2(x+1)(x^2+x+1)>0\ .$$



因為 x^2+x+1 恆為正數，

所以原式與不等式 $(x-1)^2(x+1)>0$ 同解 .

由右圖可得原不等式的解為 $-1<x<1$ 或 $x>1$.

【範例 13】

設實係數函數 $f(x)=x^4-3x^3+ax^2+bx-10$，且 $f(1+2i)=0$.

(1) 求 a, b 的值 .

(2) 求滿足 $f(x)<0$ 之實數 x 的範圍 .

Ans：(1) $a=5, b=-1$，(2) $-1<x<2$

【詳解】

(1) 因為 $1+2i$ 為實係數方程式 $x^4-3x^3+ax^2+bx-10=0$ 的一根，
所以 $1-2i$ 也是方程式的一根，

推得 $x-(1+2i)$ 及 $x-(1-2i)$ 都是 $f(x)$ 的因式 .

因此 $f(x)$ 可被 $(x-(1+2i))(x-(1-2i))=x^2-2x+5$ 整除 .

利用長除法計算：

			1	-1	-2		
1	-2	5	1	-3	a	b	-10
			1	-2	5		
				-1	a-5	b	
				-1	2	-5	
					a-7	b+5	-10
					-2	4	-10
					a-5	b+1	0

因為整除，所以 $a-7=-2$ 且 $b+5=4$，解得 $a=5, b=-1$.

(2) 由(1)知， $f(x)$可分解為

$$\left(x^2-2x+5\right)\left(x^2-x-2\right)=\left(x^2-2x+5\right)(x-2)(x+1),$$

因為二次函數 x^2-2x+5的二次項係數 1 為正數，

且判別式$(-2)^2-4\cdot1\cdot5=-16<0$，所以函數值恆正，

即無論 x 任何實數，
x^2-2x+5都大於 0 .

故原不等式的解與不等式$(x-2)(x+1)<0$的解相同，

即$-1<x<2$.

【演練 13】

設實係數函數 $f(x)=x^4-5x^3+3x^2+ax+b$，且方程式

$f(x)=0$有一根為$2+i$.

(1) 求a, b的值 .

(2) 求滿足 $f(x)<0$之實數x的範圍 .

Ans：(1) $a=19,\ b=-30$，(2) $-2<x<3$

(1) 因為$2+i$為實係數方程式$x^4-5x^3+3x^2+ax+b=0$的一根，
所以$2-i$也是方程式的一根，

推得$x-(2+i)$及$x-(2-i)$都是 $f(x)$的因式 .

因此 $f(x)$可被$\big(x-(2+i)\big)\big(x-(2-i)\big)=x^2-4x+5$整除 .

利用長除法計算：

			1	-1	-6		
1	-4	5	1	-5	3	a	b
			1	-4	5		
				-1	-2	a	
				-1	4	-5	
					-6	a+5	b
					-6	24	-30
							0

因為整除，所以 $a+5=24$ 且 $b=-30$，
解得 $a=19,\ b=-30$.

(2) 由(1)知， $f(x)$ 可分解為

$$(x^2-4x+5)(x^2-x-6)=(x^2-4x+5)(x-3)(x+2),$$

因為二次函數 x^2-4x+5 的二次項係數 1 為正數，且判別式

$$(-4)^2-4\cdot1\cdot5=-4<0,$$

所以函數值恆正，即無論 x 為任何實數，
x^2-4x+5 都大於 0．故原不等式的解與

不等式 $(x-3)(x+2)<0$ 的解相同，

即 $-2<x<3$.

七、分式不等式

設 $f(x)$與 $g(x)$為實係數多項式．

(1) 不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>0$與「$\boldsymbol{f(x)\cdot g(x)>0}$」有相同的解．

(2) 不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}\geq 0$與「$\boldsymbol{f(x)\cdot g(x)>0}$或$\boldsymbol{f(x)=0}$」有相同的解．

(3) 解不等式 $\dfrac{f(x)}{g(x)}>1$時，若分母 $g(x)$不是恆正或恆負，

則先將不等式作移項再通分，如下：

$$\frac{f(x)}{g(x)}>1 \ \overset{移項}{\Leftrightarrow}\ \frac{f(x)}{g(x)}-1>0 \ \overset{通分}{\Leftrightarrow}\ \frac{f(x)-g(x)}{g(x)}>0\ .$$

再由**(1)**知，原不等式與「$\boldsymbol{(f(x)-g(x))\cdot g(x)>0}$」有相同的解．

【範例 14】

解下列不等式：

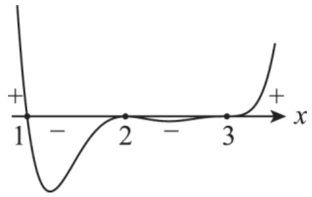
(1) $\dfrac{(x-1)(x-2)^2}{(x-3)^3}\ge 0$.　**(2)** $\dfrac{x+6}{x-4}<x$.　**(3)** $\dfrac{2x^2+x-2}{x^2-x+1}<1$.

Ans：(1) $x\le 1$或 $x=2$或 $x>3$，(2) $-1<x<4$或 $x>6$，(3) $-3<x<1$

【詳解】

(1) 原式的解與$(x-1)(x-2)^2(x-3)^3>0$或$(x-1)(x-2)^2=0$的解相同 .

設 $f(x)=(x-1)(x-2)^2(x-3)^3$. 函數 $f(x)$的略圖如下：



所以$(x-1)(x-2)^2(x-3)^3>0$的解為 $x<1$或 $x>3$.

又$(x-1)(x-2)^2=0$的解為 1 或 2 .

故原不等式的解為 $x\le 1$或 $x=2$或 $x>3$.

(2) 先將不等式 $\dfrac{x+6}{x-4}<x$移項，整理得

$$\frac{x+6}{x-4}-x<0\Rightarrow\frac{(x+6)-x(x-4)}{x-4}<0\Rightarrow\frac{-x^2+5x+6}{x-4}<0 .$$

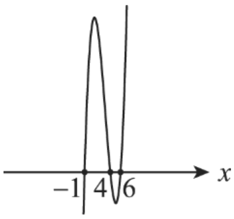
因此所求的解與$(-x^2+5x+6)(x-4)<0$的解相同 .

先將不等式$(-x^2+5x+6)(x-4)<0$兩邊同乘以(-1)，

使得最高次項係數為正，得$(x^2-5x-6)(x-4)>0$.

再改寫為$(x-6)(x+1)(x-4)>0$.

令 $f(x)=(x-6)(x+1)(x-4)$. 函數 $f(x)$的略圖如下：



故原不等式的解為 $-1<x<4$ 或 $x>6$.

(3) 二次函數 x^2-x+1 的二次項係數 $1>0$,

且判別式 $D=(-1)^2-4\cdot1\cdot1=-3<0$,

所以函數值恆正，即無論 x 為任何實數，
x^2-x+1 都大於 0 .

因此將不等式 $\dfrac{2x^2+x-2}{x^2-x+1}<1$ 兩邊同乘以
x^2-x+1 得 $2x^2+x-2<x^2-x+1$,
移項得 $x^2+2x-3<0$,

再將不等式分解得到 $(x+3)(x-1)<0$,

解得 $-3<x<1$.

【演練 14】

解下列不等式：

(1) $\dfrac{(x-1)^2(x-3)}{x-2}\le0$. **(2)** $x>\dfrac{1}{x}$. **(3)** $\dfrac{x^2-5x+6}{x^2-9x+20}<-1$.

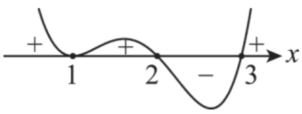
Ans：(1) $2<x\le3$ 或 x＝1，(2) $-1<x<0$ 或 $x>1$，(3) $4<x<5$

【詳解】

(1) 原式的解與

$(x-1)^2(x-3)(x-2)<0$ 或 $(x-1)^2(x-3)=0$ 的解相同 .

設 $f(x)=(x-1)^2(x-3)(x-2)$. 函數 $f(x)$ 的略圖如下：



所以 $(x-1)^2(x-3)(x-2)<0$ 的解為 $2<x<3$.

又 $(x-1)^2(x-3)=0$ 的解為 1 或 3 .

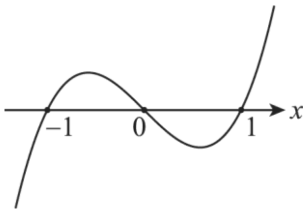
故原不等式的解為 $x=1$ 或 $2<x\le 3$.

(2) 先將原式移項，整理得

$$x-\frac{1}{x}>0\Rightarrow\frac{x^2-1}{x}>0\ .$$

因此所求的解與 $x(x^2-1)>0\Rightarrow x(x-1)(x+1)>0$ 的解相同 .

令 $f(x)=x(x-1)(x+1)$. 函數 $f(x)$ 的略圖如下：



故原不等式的解為 $-1<x<0$ 或 $x>1$.

(3) 先將原式移項，整理得

$$\frac{x^2-5x+6}{x^2-9x+20}+1<0\Rightarrow\frac{2x^2-14x+26}{x^2-9x+20}<0\Rightarrow\frac{2(x^2-7x+13)}{(x-4)(x-5)}<0\ .$$

因此所求的解與 $(x^2-7x+13)(x-4)(x-5)<0$ 的解相同 .

因為 $x^2-7x+13$ 恆為正數，所以解與 $(x-4)(x-5)<0$ 相同，

即 $4<x<5$.

ok124ex

基礎題

1. 已知不等式 $-ax+3>x-5$ 的解為 $x<2$，求實數 a 的值．

Ans：3

【詳解】

$-ax+3>x-5$

$\Rightarrow (1+a)x<8$

$\Rightarrow \dfrac{1+a}{4}=1$

$\Rightarrow a+1=4$

$\Rightarrow a=3$。

2. 解下列不等式：

(1) $-3x^2+6x-1\geq 0$．**(2)** $9x^2+1\leq 6x$．**(3)** $x^2-4x+5<0$．

Ans：(1) $\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\leq x\leq\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$，(2) $x=\dfrac{1}{3}$，(3) 無實數解

【詳解】

(1) $-3x^2+6x-1\geq 0$

$\Rightarrow x^2-2x+\dfrac{1}{3}\leqq 0$

$\Rightarrow (x-1)^2\leqq\dfrac{2}{3}$

$\Rightarrow |x-1|\leqq\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

$\Rightarrow 1-\dfrac{\sqrt{6}}{3}\leqq x\leqq 1+\dfrac{\sqrt{6}}{3}$。

(2) $9x^2+1\leq 6x$

$\Rightarrow 9x^2-6x+1\leqq 0$

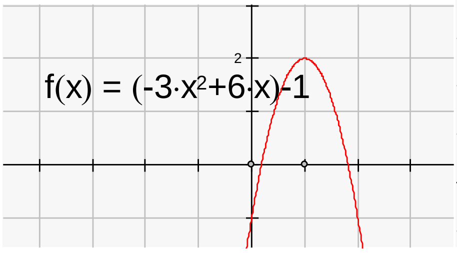
$\Rightarrow (3x-1)^2\leqq 0$

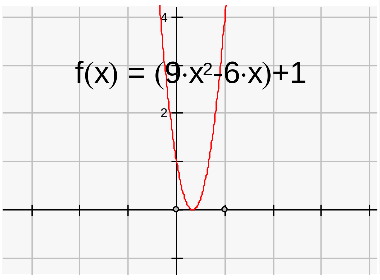
$\Rightarrow x=\dfrac{1}{3}$。

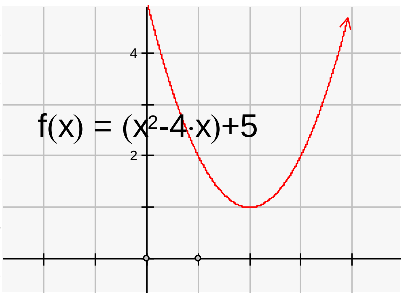
(3)　$x^2-4x+5<0$

$\Rightarrow (x-2)^2<-1$

$\Rightarrow$無實數解。







3. 設實係數二次函數 $f(x)=ax^2+bx+c$．若 $f(1)=-2$，且不等式 $f(x)<0$的解為 $\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}<x<\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$，求 a, b, c的值．

Ans： $a=4, b=-2, c=-4$

【詳解】

$\dfrac{1-\sqrt{17}}{4}<x<\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$

$\Rightarrow (x-\dfrac{1-\sqrt{17}}{4})(x-\dfrac{1+\sqrt{17}}{4})<0$

$\Rightarrow x^2-\dfrac{1}{2}x-1<0$

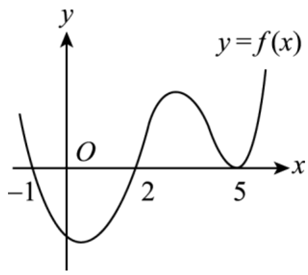
設 $f(x)=a(2x^2-x-2)$，

因 $f(1)=a(2-1-2)=-2 \Rightarrow a=2$，

故 $f(x)=2(2x^2-x-2)$，

比較係數得 $a=4$，$b=-2$，$c=-4$。

4. 已知多項式函數 $y=f(x)$的函數圖形如右，求



(1) 方程式 $f(x)=0$的實根為__________．

(2) 不等式 $f(x)>0$的解．

(3) 不等式 $f(x)\le 0$的解．

Ans：(1)　$-1, 2, 5$，(2)　$x>5$或 $2<x<5$或 $x<-1$，(3)　$-1\le x\le 2$或 $x=5$

【詳解】

$f(x)=k(x+1)(x-2)(x-5)^2$，$k>0$。

(1) 由圖可知方程式 $f(x)=0$ 的實根為 $x=1$，2，5(重根)。

(2) $f(x)\ k(x+1)(x-2)(x-5)^2>0$，$k>0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)(x-5)^2>0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)>0$

$\Rightarrow x>2$ 或 $x<-1$，但 $x\neq 5$。

(3) $f(x)=k(x+1)(x-2)(x-5)^2\leqq 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)(x-5)^2\leqq 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-2)\leqq 0$

$\Rightarrow -1\leqq x\leqq 2$ 或 $x=5$。

5. 解下列不等式：

(1) $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-4x+4\right)\le 0$.

(2) $\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-x-1\right)<0$.

Ans：(1) $x=2$，(2) $\frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<1$或$1<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

【詳解】

(1) $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geqq 0$，故

$\left(x^2+x+1\right)\left(x^2-4x+4\right)\le 0$

$\Rightarrow x^2-4x+4\leqq 0$

$\Rightarrow (x-2)^2\leqq 0$

$\Rightarrow x=2$。

(2) $x^2-2x+1=(x-1)^2\geqq 0$，故

$\left(x^2-2x+1\right)\left(x^2-x-1\right)<0$

$\Rightarrow x^2-x-1<0$

$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2<\frac{5}{4}$

$\Rightarrow |x-\frac{1}{2}|<\frac{\sqrt{5}}{2}$

$\Rightarrow \frac{1-\sqrt{5}}{2}<x<\frac{1+\sqrt{5}}{2}$，但 $x\neq 1$。

6.　解下列不等式：

(1) $\frac{(x-2)^4(x+2)^3}{(x-1)(x+1)^2}\le 0$.

(2) $\frac{x+3}{x-1}\le x$.

Ans：(1)　$-2\le x<-1$或 $-1<x<1$或 $x=2$，(2)　$-1\le x<1$或 $x\ge 3$

【詳解】

(1)　$\frac{(x-2)^4(x+2)^3}{(x-1)(x+1)^2}\le 0$

$\Rightarrow (x-2)^4(x+2)^3(x-1)(x+1)^2\leqq 0$

$\Rightarrow (x+2)(x-1)\leqq 0$

$\Rightarrow -2\leqq x\leqq 1$ 或 $x=2$，但 $x\neq -1$。

(2)　$\frac{x+3}{x-1}\le x$

$\Rightarrow \frac{x+3}{x-1}-\frac{x(x-1)}{x-1}\leqq 0$

$\Rightarrow \frac{x+3-x^2+x}{x-1}\leqq 0$

$\Rightarrow (x^2-2x-3)(x-1)\geqq 0$

$\Rightarrow (x+1)(x-3)(x-1)\geqq 0$

$\Rightarrow x\geqq 3$ 或$-1\leqq x\leqq 1$，但 $x\neq 1$

$\Rightarrow -1\leqq x<1$ 或 $x\geqq 3$。

7. 下列哪些不等式的解為$1<x<3$?

(1) $(x-1)^2(x-3)<0$.

(2) $x^2(x-1)(x-3)<0$.

(3) $x^2-4x+3<0$.

(4) $(x-1)(x-2)^2(x-3)<0$.

(5) $\dfrac{x-3}{x-1}<0$.

Ans：(2)(3)(5)

【詳解】

(1) $(x-1)^2(x-3)<0$

$\Rightarrow x-3<0$

$\Rightarrow x<3$。

(2) $x^2(x-1)(x-3)<0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)<0$

$\Rightarrow 1<x<3$。

(3) $x^2-4x+3<0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)<0$

$\Rightarrow 1<x<3$。

(4) $(x-1)(x-2)^2(x-3)<0$

$\Rightarrow (x-1)(x-3)<0$

$\Rightarrow 1<x<3$，但 $x\neq 2$。

(5) $\dfrac{x-3}{x-1}<0$

$\Rightarrow (x-3)(x-1)<0$

$\Rightarrow 1<x<3$。

進階題

8. 設a, b為正整數．若$b^2=9a$，且$a+2b>280$，則a的最小可能值為何？【**97** 學測】

Ans：225

【詳解】

a，b $\in$ N，$b^2=9a \Rightarrow b=3\sqrt{a}\in N \Rightarrow \sqrt{a}\in N$。

$a+2b>280$

$\Rightarrow a+6\sqrt{a}>280$

$\Rightarrow (\sqrt{a})^2+6\sqrt{a}+9>280+9=289$

$\Rightarrow (\sqrt{a}+3)^2>289$

$\Rightarrow \sqrt{a}+3>17$

$\Rightarrow \sqrt{a}\geqq 15$

$\Rightarrow a\geqq 225$。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
a	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100	121	144	169	196	225	256
b	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30	33	36	39	42	45	48
a+2b	7	16	27	40	55	72	91	112	135	160	187	216	247	280	315	352

9. 已知二次不等式 $ax^2-2ax+(2a-3)<0$.

(1) 若不等式的解為 $-1<x<3$，求 a 的值 .

(2) 若不等式的解為無實數解，求 a 的範圍 .

Ans：(1) $a=\frac{3}{5}$，(2) $a\geq 3$

【詳解】

(1) $-1<x<3$

$\Rightarrow (x+1)(x-3)<0$

$\Rightarrow x^2-2x-3<0$

$\Rightarrow \frac{a}{1}=\frac{-2a}{-2}=\frac{2a-3}{-3}$

$\Rightarrow -3a=2a-3$

$\Rightarrow a=\frac{3}{5}$。

(2) 不等式的解為無實數解，則

(a) $a>0$，

(b) 判別式 $(-2a)^2-4a(2a-3)\leqq 0$

$\Rightarrow a-(2a-3)\leqq 0$

$\Rightarrow a\geqq 3$。

由(a)(b)得 $a\geqq 3$。

10. 已知三次不等式 $ax^3+bx^2+cx-8\le 0$ 的解為 $x\ge 4$ 或 $-2\le x\le 1$，求 a, b 與 c 的值．

Ans： $a=-1, b=3, c=6$

【詳解】

$x\ge 4$ 或 $-2\le x\le 1$

$\Rightarrow (x-4)(x+2)(x-1)\geqq 0$

$\Rightarrow (x^2-2x-8)(x-1)\geqq 0$

$\Rightarrow x^3-3x^2-6x+8\geqq 0$

$\Rightarrow -x^3+3x^2+6x-8\leqq 0$

比較係數得 $a=-1$，$b=3$，$c=6$。

11. 解不等式 $\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}<-1$．

Ans： $1<x<2$

【詳解】

$\dfrac{x^2-7x+12}{x^2-3x+2}<-1$

$\Rightarrow \dfrac{(x^2-7x+12)+(x^2-3x+2)}{x^2-3x+2}<0$

$\Rightarrow (x^2-5x+7)(x^2-3x+2)<0$

因 $x^2-5x+7=(x-\dfrac{5}{2})^2+\dfrac{3}{4}>0$ 恆成立，故

$x^2-3x+2<0$

$\Rightarrow (x-1)(x-2)<0$

$\Rightarrow 1<x<2$。

12. 已知對任意實數 x，$\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}\le 1$ 恆成立，求實數 k 的範圍．

Ans： $1\le k\le 3$

【詳解】

$4x^2+6x+3=4(x+\dfrac{3}{4})^2+\dfrac{3}{4}>0$ 恆成立，

$\dfrac{2x^2+2kx+k}{4x^2+6x+3}\le 1$

$\Rightarrow 2x^2+2kx+k \leqq 4x^2+6x+3$，移項

$\Rightarrow 2x^2+(6-2k)x+(3-k) \geqq 0$

$\Rightarrow$ 判別式$(6-2k)^2-4\times 2\times(3-k) \leqq 0$

$\Rightarrow (3-k)^2-2(3-k) \leqq 0$

$\Rightarrow (3-k)(3-k-2) \leqq 0$

$\Rightarrow (k-3)(k-1) \leqq 0$

$\Rightarrow 1 \leqq k \leqq 3$。

13. **已知 $f(x)$為一個實係數三次多項式，其三次項係數為 1．**

若不等式 $f(x)>-2$的解為 $0<x<1$或 $x>1$，

則下列哪些 x的值滿足不等式 $f(x)>0$?

(1) $-\dfrac{3}{2}$，**(2)** $-\dfrac{1}{2}$，**(3)** 1，**(4)** $\dfrac{5}{2}$，**(5)** 3 **.**

Ans：(4)(5)

【詳解】

$y=f(x)$通過$(0，-2)$，$(1，-2)$←切點，

設 $f(x)=(x-1)^2(x-k)-2$，

$(0，-2)$代入 $\Rightarrow f(0)=(0-1)^2(0-k)-2=-2 \Rightarrow k=0$，

故 $f(x)=x(x-1)^2-2$，

(1) $f(-\dfrac{3}{2})<0$，(2) $f(-\dfrac{1}{2})<0$，(3) $f(1)<0$，

(4) $f(\dfrac{5}{2})>0$，(5) $f(3)=1>0$，

x	(1.50)	(0.50)	1.00	2.50	3.00
f(x)	(11.38)	(3.13)	(2.00)	3.63	10.00

【另解】

$0<x<1$或 $x>1$

$\Rightarrow g(x)=x(x-1)^2>0$

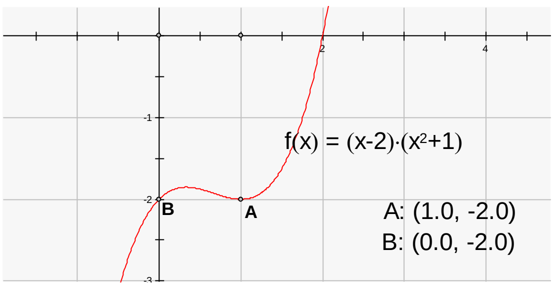
$\Rightarrow g(x)=x^3-2x^2+x=f(x)+2$

$\Rightarrow f(x)=x^3-2x^2+x-2>0$

$\Rightarrow x^2(x-2)+(x-2)>0$

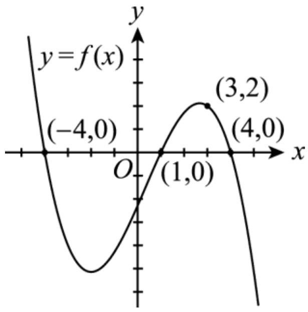
$\Rightarrow (x-2)(x^2+1)>0$

$\Rightarrow x>2$，



故選(4)(5)。

14. 下圖為三次函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ 的圖形，
選出正確的選項：



(1) 方程式 $f(x)=0$ 有三個相異實根．
(2) 方程式 $f(x)-1=0$ 有三個相異實根．
(3) 方程式 $f(x)-3=0$ 有三個相異實根．
(4) 多項式$(x-4)\cdot f(x)$除以 $x-3$ 的餘式為 1．
(5) 多項式 $x\cdot f(x)$可被$(x-1)(x+4)$整除．

Ans：(1)(2)(5)

【詳解】

(1) $y=f(x)$與 x 軸有三個交點(4，0)，(−4，0)，(1，0)，
故方程式 $f(x)=0$ 有三個相異實根 4，−4，1。
(2) $y=f(x)$與 $y=1$ 有三個交點，
故方程式 $f(x)-1=0$ 有三個相異實根。
(3) $y=f(x)$與 $y=3$ 有一個交點，
故方程式 $f(x)-3=0$ 有一個實根。
(4) $y=f(x)$通過(3，2)，故 $f(3)=2$。
設 $g(x)=(x-4)\cdot f(x)$，則以 $x-3$ 除 $g(x)$得餘式為
$g(3)=(3-1)\cdot f(3)=2\times2=4$。
(5) $f(x)=a(x+4)(x-1)(x-4)$
設 $h(x)=x\cdot f(x)=ax(x+4)(x-1)(x-4)$
可被$(x-1)(x+4)$整除。

15. 設 a, b 為實數．已知坐標平面上拋物線 $y=x^2+ax+b$ 與 x 軸交於 P, Q 兩點，且 $\overline{PQ}=7$．若拋物線 $y=x^2+ax+(b+2)$ 與 x 軸的兩交點為 R, S，則 $\overline{RS}$ 之值為何？ 【99 學測】

Ans：$\sqrt{41}$

【詳解】

設 x_1，x_2 為 $x^2+ax+b=0$ 之二根，則
$x_1+x_2=-a$，$x_1\cdot x_2=b$，

$\Rightarrow \overline{PQ}^2=|x_1-x_2|^2=(x_1+x_2)^2-4x_1x_2=a^2-4b=49$。

設 x_3，x_4 為 $x^2+ax+b+2=0$ 之二根，則

$x_3+x_4=-a$，$x_3\cdot x_4=b+2$，

$\Rightarrow\ \overline{RS}^2=|x_3-x_4|^2=(x_3+x_4)^2-4x_3x_4=a^2-4(b+2)=49-8$。

$\Rightarrow\ \overline{RS}=\sqrt{41}$。

【另解】特殊化

$f(x)=x(x-7)=x^2-7x$，即 $a=-7$，$b=0$。

$g(x)=x^2-7x+2=0\Rightarrow x=\dfrac{7\pm\sqrt{41}}{2}$

$\Rightarrow\ \overline{RS}=\dfrac{7+\sqrt{41}}{2}-(\dfrac{7-\sqrt{41}}{2})=\sqrt{41}$。