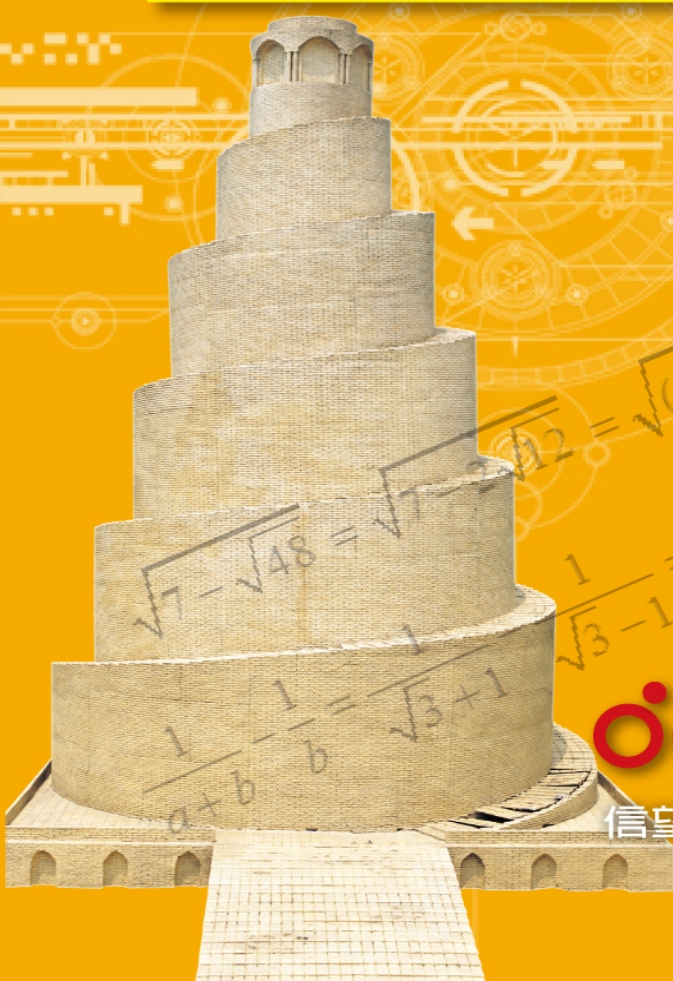


99 學測解析

數學科

陳清海 老師



信望愛文教基金會

大學入學考試中心九十九學年度學科能力測驗試題

數學考科

第壹部分：選擇題（佔 60 分）

一、單選題（佔 35 分）

說明：第 1 至 7 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 若數列 $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, a_{10}$ 中每一項皆為 1 或 -1，則 $a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots + a_{10}$ 之值有多少種可能？

(1) 10, (2) 11, (3) p_2^{10} , (4) C_2^{10} , (5) 2^{10} 。

Ans : (2)

【詳解】

1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
值	10	8	6	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10

可能的值有 10, 8, 6, 4, 2, 0, -2, -4, -6, -8, -10 共 11 種。

2. 已知 a, b 為整數且行列式 $\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4$ ，則絕對值 $|a+b|$ 為何？

(1) 16, (2) 31, (3) 32, (4) 39, (5) 條件不足，無法確定。

Ans : (3)

【詳解】

$$\begin{vmatrix} 5 & a \\ b & 7 \end{vmatrix} = 4 \Rightarrow 35 - ab = 4 \Rightarrow ab = 31 = 1 \times 31 \text{ 或 } (-1) \times (-31),$$

故 $|a+b| = 32$ 。

3. 箱中有三顆紅球與三顆白球。一摸彩遊戲是從箱中隨機同時抽出兩顆球。如果抽出的兩球顏色不同，則得獎金 100 元；如果兩球顏色相同，則無獎金。請問此遊戲獎金的期望值為何？

(1) 20 元, (2) 30 元, (3) 40 元, (4) 50 元, (5) 60 元。

Ans : (5)

【詳解】

$$E = 100 \times \frac{C_1^3 \times C_1^3}{C_2^6} = 100 \times \frac{9}{15} = 60(\text{元})。$$

4. 坐標平面上給定兩點 $A(1, 0)$ 與 $B(0, 1)$ ，又考慮另外三點 $P(\pi, 1)$ 、 $Q(-\sqrt{3}, 6)$ 與 $R(2, \log_4 32)$ 。令 $\triangle PAB$ 的面積為 p 、 $\triangle QAB$ 的面積為 q 、 $\triangle RAB$ 的面積為 r 。請問下列哪一個選項是正確的？
 (1) $p < q < r$ ，(2) $p < r < q$ ，(3) $q < p < r$ ，(4) $q < r < p$ ，
 (5) $r < q < p$ 。

Ans : (1)

【詳解】

$$\log_4 32 = \frac{\log 32}{\log 4} = \frac{5 \log 2}{2 \log 2} = \frac{5}{2}，故 R(2, \frac{5}{2})。$$

直線 $\overline{AB}$ 的斜率為 -1 ，故 $\overline{AB} : x + y - 1 = 0$ 。

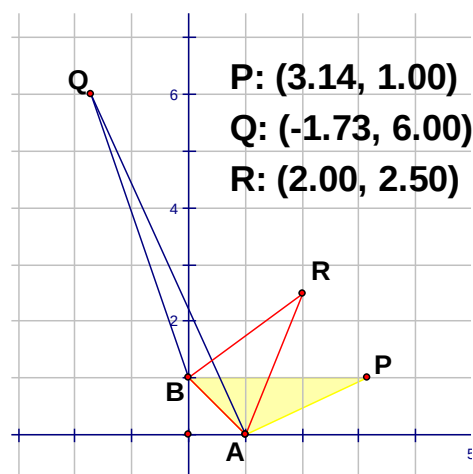
$$p = d(P, \overline{AB}) = \frac{\pi + 1 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}}，$$

$$q = d(Q, \overline{AB}) = \frac{-\sqrt{3} + 6 - 1}{\sqrt{2}} = \frac{5 - \sqrt{3}}{\sqrt{2}}，$$

$$r = d(R, \overline{AB}) = \frac{2 + \frac{5}{2} - 1}{\sqrt{2}} = \frac{\frac{7}{2}}{\sqrt{2}}，$$

$$\pi = 3.14，5 - \sqrt{3} = 3.268，$$

得 $p < q < r$ 。



5. 在密閉的實驗室中，開始時有某種細菌 1 千隻，並且以每小時增加 8% 的速率繁殖。如果依此速率持續繁殖，則 100 小時後細菌的數量最接近下列哪一個選項？
 (1) 9 千隻，(2) 108 千隻，(3) 2200 千隻，(4) 3200 千隻，(5) 32000 千隻。

Ans : (3)

【詳解】

$$a = (1.08)^{100}$$

$$\Rightarrow \log a = 100 \log(1.08)$$

$$= 100(\log 108 - \log 100)$$

$$= 100(2 \log 2 + 3 \log 3 - 2)$$

$$= 3.33$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow \log a &= 3 + 0.33 \\ &= \log 10^3 + \log 2.1647 \\ &= \log 21647 \leftarrow \text{線性插值法}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow a \doteq 2165。$$

【備註】 $(1.08)^{100} = 2199.7612563412852819736854443173。$

$\log 2000 = 3.3010$ ， $\log 3000 = 3.4771$ ，故 $2000 < a < 3000。$

6. 坐標空間中 O 為原點，點 A 的坐標為 $(1, 2, 1)$ 。設 S 是以 O 為球心、 4 為半徑的球面。請問在 S 上滿足內積 $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = 6$ 的所有點 P 所成的圖形為何？

(1) 空集合，(2) 一個點，(3) 兩個點，(4) 一個圓，(5) 兩個圓。

Ans：(4)

【詳解】

$$S: x^2 + y^2 + z^2 = 16, \overrightarrow{OA} = (1, 2, 1)。$$

設 $P(x, y, z)$ ，則 $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)。$

$$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OP} = x + 2y + z = 6 \text{ 表示一平面 } E，$$

$$d(O, E) = \frac{6}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \frac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < 4 (\text{球的半徑})$$

故 S 與 E 的交集為一圓。

7. 令橢圓 $\Gamma_1: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1$ ， $\Gamma_2: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 2$ ， $\Gamma_3: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{2x}{5}$ 的長軸長

分別為 k_1, k_2, k_3 ，請問下列哪一個選項是正確的？

(1) $k_1 = k_2 = k_3$ ，(2) $k_1 = k_2 < k_3$ ，(3) $k_1 < k_2 < k_3$ ，(4) $k_1 = k_3 < k_2$ ，
(5) $k_1 < k_3 < k_2。$

Ans：(4)

【詳解】

$$\Gamma_1: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 1 \Rightarrow k_1 = 10，$$

$$\Gamma_2: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = 2 \Rightarrow \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1 \Rightarrow k_2 = 10\sqrt{2}，$$

$$\Gamma_3: \frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{3^2} = \frac{2x}{5} \Rightarrow \frac{x^2 - 10x}{25} + \frac{y^2}{9} = 0 \Rightarrow \frac{(x-5)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1 \Rightarrow k_3 = 10，$$

故得 $k_1 = k_3 < k_2。$

二、多選題（佔 25 分）

說明：第 8 至 12 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項者可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項者不給分。

8. 設 θ_1 、 θ_2 、 θ_3 、 θ_4 分別為第一、第二、第三、第四象限角，且都介於 0 與 2π 之間。已知 $|\cos \theta_1| = |\cos \theta_2| = |\cos \theta_3| = |\cos \theta_4| = \frac{1}{3}$ ，

請問下列哪些選項是正確的？

(1) $\theta_1 < \frac{\pi}{4}$ ，(2) $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ ，(3) $\cos \theta_3 = -\frac{1}{3}$ ，(4) $\sin \theta_4 = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

(5) $\theta_4 = \theta_3 + \frac{\pi}{2}$ 。

Ans：(2)(3)

【詳解】

如右圖，

A，B 對稱於 y 軸，C，D 對稱於 y 軸，

A，D 對稱於 x 軸，B，C 對稱於 x 軸，

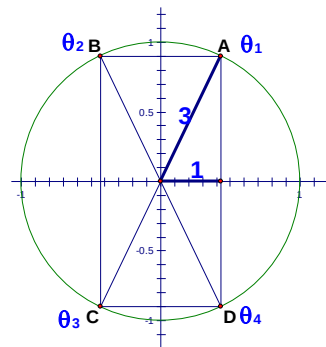
(1) $\cos \theta_1 = \frac{1}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$ ，故 $\theta_1 > \frac{\pi}{4}$ ，

(2) $\theta_1 + \theta_2 = \pi$ ，

(3) $\cos \theta_3 = -\frac{1}{3}$ ，

(4) $\sin \theta_4 = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$ ，

(5) $\theta_4 < \theta_3 + \frac{\pi}{2}$ 。



9. 下列哪些方程式有實數解？

(1) $x^3 + x - 1 = 0$ ，

(2) $2^x + 2^{-x} = 0$ ，

(3) $\log_2 x + \log_x 2 = 1$ ，

(4) $\sin x + \cos 2x = 3$ ，

(5) $4\sin x + 3\cos x = \frac{9}{2}$ 。

Ans：(1)(5)

【詳解】

(1) $x^3 + x - 1 = 0$ 為奇數次實係數方程式，故必有實根。

(2) 因 $2^x > 0$ ， $2^{-x} > 0$ ，故 $2^x + 2^{-x} = 0$ 沒有實根。

(3) $\log_2 x + \log_x 2 = 1$

$$\Rightarrow \log_2 x + \frac{1}{\log_2 x} = 1$$

$$\Rightarrow (\log_2 x)^2 - \log_2 x + 1 = 0,$$

$$\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times 1 < 0, \log_2 x \text{ 沒有實根。}$$

(4) $-1 \leq \sin x \leq 1$ ， $-1 \leq \cos 2x \leq 1$ ，

故 $\sin x + \cos 2x = 3$ 沒有實根。

(5) $4\sin x + 3\cos x = 5\sin(x + \alpha) = \frac{9}{2}$

$$\Rightarrow \sin(x + \alpha) = \frac{9}{10} \text{ 有實根。}$$

10. 設 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 為一實數數列，且對所有的正整數 n 滿足

$$a_{n+1} = \frac{n(n+1)}{2} - a_n, \text{ 請問下列哪些選項是正確的？}$$

(1) 如果 $a_1 = 1$ ，則 $a_2 = 1$ ，

(2) 如果 a_1 是整數，則此數列的每一項都是整數，

(3) 如果 a_1 是無理數，則此數列的每一項都是無理數，

(4) $a_2 < a_4 < \dots < a_{2n}$ (n 為正整數)，

(5) 如果 a_k 是奇數，則 $a_{k+2}, a_{k+4}, \dots, a_{k+2n}, \dots$

都是奇數 (n 為正整數)。

Ans : (2)(3)(4)

【詳解】

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105
a(n)	-4	5	-2	8	2	13	8	20	16	29	26	40	38	53

(1) $a_1 = 1$ ，則 $a_2 = 0$

(2) $\frac{n(n+1)}{2}$ 必為整數， a_n 是整數，則 a_{n+1} 一定是整數。

(3) $\frac{n(n+1)}{2}$ 必為整數， a_n 是無理數，則 a_{n+1} 一定是無理數。

(4) 雙按開啟上表，變動儲存格 B2 即知。

(5) 如上表， $a_2 = -1$ 是奇數，但 $a_4 = 2$ 是偶數。

11. 坐標空間中，直線 L 上距離點 Q 最近的點稱為 Q 在 L 上的投影點。
 已知 L 為平面 $2x-y=2$ 上通過點 $(2, 2, 2)$ 的一直線。請問下列哪些
 選項中的點可能是原點 O 在 L 上的投影點？

(1) $(2, 2, 2)$, (2) $(2, 0, 2)$, (3) $(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$,

(4) $(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, -2)$, (5) $(\frac{8}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9})$ 。

Ans : (1)(3)(5)

【詳解】

$E: 2x-y=2$ 的法向量為 $\vec{v} = (2, -1, 0)$ 。

(1) $A(2, 2, 2)$, $\vec{AA} = (0, 0, 0)$, $\vec{AA} \cdot \vec{OA} = 0$,

即 $\vec{AA} \perp \vec{OA}$, A 可為投影點。

(2) $B(2, 0, 2)$ 代入 $E \Rightarrow 2 \times 2 - 0 \neq 2$,
 B 不在 E 上, B 不可為投影點。

(3) $C(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$

$$\Rightarrow \vec{AC} \cdot \vec{OC} = (-\frac{6}{5}, -\frac{12}{5}, -2) \cdot (\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0) = -\frac{24}{25} + \frac{24}{25} + 0 = 0,$$

即 $\vec{AC} \perp \vec{OC}$, C 可為投影點。

(4) $D(\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, -2)$, $\vec{AD} = (-\frac{6}{5}, -\frac{12}{5}, -4)$,

$$\vec{AD} \cdot \vec{OD} = -\frac{24}{25} + \frac{24}{25} + 8 \neq 0, D \text{ 不可為投影點。}$$

(5) $E(\frac{8}{9}, -\frac{2}{9}, -\frac{2}{9})$, $\vec{AE} = (-\frac{10}{9}, -\frac{20}{9}, -\frac{20}{9})$,

$$\vec{AE} \cdot \vec{OE} = -\frac{80}{81} + \frac{40}{81} + \frac{40}{81} = 0,$$

即 $\vec{AE} \perp \vec{OE}$, E 可為投影點。

12. 想要了解台灣的公民對某議題支持的程度所作的抽樣調查，依性別區分，所得結果如下表：

	女性公民	男性公民
贊成此議題的比例 $\hat{p}$	0.52	0.59
$\hat{p}$ 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$	0.02	0.04

請問從此次抽樣結果可以得到下列哪些推論？

- (1) 全台灣男性公民贊成此議題的比例大於女性公民贊成此議題的比例，
- (2) 在 95% 的信心水準之下，全台灣女性公民贊成此議題之比例的信賴區間為 $[0.48, 0.56]$ （計算到小數點後第二位，以下四捨五入），
- (3) 此次抽樣的女性公民數少於男性公民數，
- (4) 如果不區分性別，此次抽樣贊成此議題的比例 $\hat{p}$

介於 0.52 與 0.59 之間，

- (5) 如果不區分性別，

此次抽樣 $\hat{p}$ 的標準差 $\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$ 介於 0.02 與 0.04 之間。

Ans：(2)(4)

【詳解】

- (1) 不能代表全台灣。
- (2) 信賴區間為 $[0.52 - 0.02 \times 2, 0.52 + 0.02 \times 2] = [0.48, 0.56]$ 。
- (3) $0.52 \times 0.48 = (0.02)^2 \times n_1 \Rightarrow n_1 = 624$ ，
 $0.59 \times 0.41 = (0.04)^2 \times n_2 \Rightarrow n_2 = 151$ 。
 女性 $n_1 = 624$ ，男性 $n_2 = 151$ 。
- (4) $\hat{p} = \frac{624 \times 0.52 + 151 \times 0.59}{624 + 151} = 0.5336$ 。
- (5) 標準差為 $\sqrt{\frac{0.5336 \times (1 - 0.5336)}{624 + 151}} = 0.017918$ 。

0.52	0.02	n(1)	624	324.48	總平均	0.5337	標準差	0.0003	0.0179
0.59	0.04	n(2)	151.19	89.201					

第貳部分：選填題（佔 40 分）

說明：1. 第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號(13–32)。

2. 每題完全答對得 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 坐標平面上有一個平行四邊形 $ABCD$ ，其中點 A 的坐標為 $(2, 1)$ ，點 B 的坐標為 $(8, 2)$ ，點 C 在第一象限且知其 x 坐標為 12 。若平行四邊形 $ABCD$ 的面積等於 38 平方單位，則 D 點的坐標為_____。

Ans : $(6, 8)$

【詳解】

如下圖，設 $C(12, y)$ ，

因 $ABCD$ 為平行四邊形，故 $D(6, y-1)$ 。

直線 $\overline{AB}$: $x - 6y + 4 = 0$ ，

$$d(D, \overline{AB}) = \frac{|6 - 6(y-1) + 4|}{\sqrt{37}} = \frac{|16 - 6y|}{\sqrt{37}},$$

$$\overline{AB} = \sqrt{37}.$$

平行四邊形 $ABCD$ 的面積為

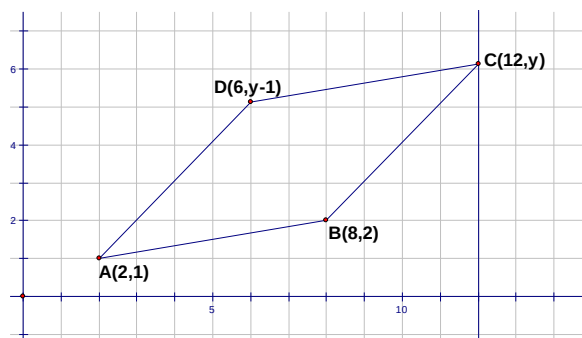
$$\frac{|16 - 6y|}{\sqrt{37}} \times \sqrt{37} = 38$$

$$\Rightarrow |16 - 6y| = 38$$

$$\Rightarrow 16 - 6y = 38 \text{ 或 } 16 - 6y = -38$$

$$\Rightarrow y = 9 \text{ 或 } y = -\frac{11}{3} \text{ (不合)}$$

$$\Rightarrow D(6, 8).$$



【另解】

$$\overrightarrow{AB} = (6, 1), \overrightarrow{AD} = (4, y-2), \text{ 則}$$

平行四形 $ABCD$ 的面積

$$= \left\| \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 4 & y-2 \end{vmatrix} \right\| = |6(y-2) - 4| = |6y - 16| = 38$$

$$\Rightarrow 3y - 8 = \pm 19 \Rightarrow y = 9 \text{ 或 } y = -\frac{11}{3} \text{ (不合)}$$

$$\Rightarrow D(6, 8).$$

- B. 設 $f(x)$ 為滿足下列條件的最低次實係數多項式： $f(x)$ 最高次項的係數為 1 ，且 $3 - 2i$ 、 i 、 5 皆為方程式 $f(x) = 0$ 的解（其中 $i^2 = -1$ ）。則 $f(x)$ 之常數項為_____。

Ans : -65

【詳解】

$$f(x) = (x - 3 + 2i)(x - 3 - 2i)(x + i)(x - i)(x - 5),$$

$f(x)$ 之常數項為

$$\begin{aligned} f(0) &= (3+2i)(3-2i) \cdot i \cdot (-i) \cdot (-5) \\ &= (9+4) \cdot 1 \cdot (-5) \\ &= -65。 \end{aligned}$$

- C. 有一個兩列三行的表格如下圖。在六個空格中分別填入數字 1、2、3、4、5、6（不得重複），則 1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有_____種。

Ans : 432

【詳解】

1、2 這兩個數字在同一列的有 $2 \times 3 \times 2 \times 4! = 288$ ，

1、2 這兩個數字在同一行的有 $3 \times 2 \times 4! = 144$ ，

1、2 這兩個數字在同一行或同一列的方法有 $288 + 144 = 432$ 種。

- D. 設實數 $a > 0$ 。若 $x、y$ 的方程組 $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - 2y = a \\ x - ay = 122 \end{cases}$ 有解，則 $a = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans : 14

【詳解】

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \Rightarrow 3x = 2 - a，$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2 \Rightarrow 3y = 1 - 2a，$$

$$\text{代入} \textcircled{3} \quad 3x - 3ay = 366$$

$$\Rightarrow 2 - a - a(1 - 2a) = 366$$

$$\Rightarrow a^2 - a - 182 = 0$$

$$\Rightarrow (a - 14)(a + 13) = 0$$

$$\Rightarrow a = 14 \text{ 或 } a = -13(\text{不合})。$$

E. 如右圖，直角三角形 ABD 中， $\angle A$ 為直角， C 為 $\overline{AD}$ 邊上的點。

已知 $\overline{BC} = 6$ ， $\overline{AB} = 5$ ， $\angle ABD = 2\angle ABC$ ，則 $\overline{BD} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

(化成最簡分數)

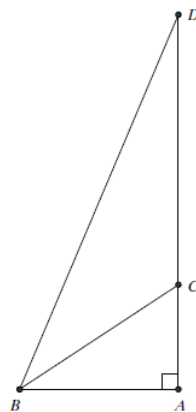
Ans : $\frac{90}{7}$

【詳解】

設 $\angle ABC = \theta$ ，則 $\angle ABD = 2\theta$ ， $\cos \theta = \frac{5}{6}$ 。

$$\Rightarrow \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1 = 2 \times \frac{25}{36} - 1 = \frac{7}{18} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BD}} = \frac{5}{\overline{BD}}$$

$$\Rightarrow \overline{BD} = \frac{5 \times 18}{7} = \frac{90}{7}。$$



F. 設 a 、 b 為實數。已知坐標平面上拋物線 $y = x^2 + ax + b$ 與 x 軸交於 P 、 Q 兩點，且 $\overline{PQ} = 7$ 。若拋物線 $y = x^2 + ax + (b+2)$ 與 x 軸的兩交點為 R 、 S ，則 $\overline{RS} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans : $\sqrt{41}$

【詳解】

設 x_1, x_2 為 $x^2 + ax + b = 0$ 之二根，則

$$x_1 + x_2 = -a, \quad x_1 \cdot x_2 = b,$$

$$\Rightarrow \overline{PQ}^2 = |x_1 - x_2|^2 = (x_1 + x_2)^2 - 4x_1x_2 = a^2 - 4b = 49。$$

設 x_3, x_4 為 $x^2 + ax + b + 2 = 0$ 之二根，則

$$x_3 + x_4 = -a, \quad x_3 \cdot x_4 = b + 2,$$

$$\Rightarrow \overline{RS}^2 = |x_3 - x_4|^2 = (x_3 + x_4)^2 - 4x_3x_4 = a^2 - 4(b + 2) = 49 - 8。$$

$$\Rightarrow \overline{RS} = \sqrt{41}。$$

【另解】特殊化

$$f(x) = x(x - 7) = x^2 - 7x, \text{ 即 } a = -7, b = 0。$$

$$g(x) = x^2 - 7x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{7 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$\Rightarrow \overline{RS} = \frac{7+\sqrt{41}}{2} - \left(\frac{7-\sqrt{41}}{2}\right) = \sqrt{41}。$$

G. 已知 $\triangle ABC$ 中， $\overline{AB}=2$ 、 $\overline{BC}=3$ 且 $\angle A=2\angle C$ ，則 $\overline{AC}=\underline{\hspace{2cm}}$ 。

(化成最簡分數)

Ans : $\frac{5}{2}$

【詳解】

由正弦定理知

$$\frac{3}{\sin 2\theta} = \frac{2}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = 3 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{4}。$$

$$\text{又 } \frac{\overline{AC}}{\sin(\pi-3\theta)} = \frac{2}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow \overline{AC} \cdot \sin \theta = 2 \cdot \sin(\pi-3\theta)$$

$$= 2 \sin 3\theta = 2(3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta)$$

$$\Rightarrow \overline{AC} = 2(3 - 4 \sin^2 \theta) = 6 - 8 \sin^2 \theta$$

$$= 6 - 8 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{4}\right)^2 = 6 - \frac{7}{2} = \frac{5}{2}。$$

【另解】

$$\text{利用正弦定理，} \frac{3}{\sin 2\theta} = \frac{2}{\sin \theta}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot 2 \sin \theta \cos \theta = 3 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \cos \theta = \frac{3}{4}。$$

利用餘弦定理，設 $\overline{AC}=x$ ，

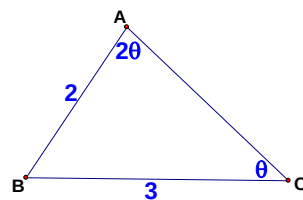
$$\Rightarrow x^2 + 3^2 - 2x \cdot 3 \cos \theta = 2^2$$

$$\Rightarrow x^2 - 6x \cdot \frac{3}{4} + 5 = 0$$

$$\Rightarrow 2x^2 - 9x + 10 = 0$$

$$\Rightarrow (2x-5)(x-2) = 0$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{2}，\text{或 } x = 2(\text{不合})。$$



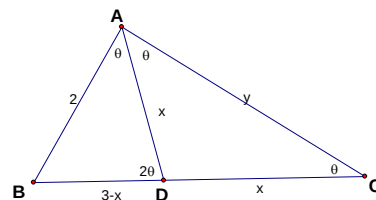
【再解】

如右圖， $\triangle BAD \sim \triangle BCA$ ，

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{3-x}{2} = \frac{x}{y}$$

$$\Rightarrow 3(3-x) = 4, 3x = 2y$$

$$\Rightarrow x = \frac{5}{3}, y = \frac{5}{2}.$$



H. 坐標平面上給定點 $A(\frac{9}{4}, 2)$ ，直線 $L: y = -5$ 與拋物線 $\Gamma: x^2 = 8y$ 。

以 $d(P, L)$ 表示點 P 到直線 L 的距離。若點 P 在 Γ 上變動，則

$|d(P, L) - \overline{AP}|$ 之最大值為_____。（化成最簡分數）

Ans: $\frac{21}{4}$

【詳解】

$\Gamma: x^2 = 8y$ 為拋物線，焦點 $F(0, 2)$ ，準線： $y = -2$ 。

如右圖， $\overline{PF} = \overline{PB}$ ， $\overline{BC} = 3$ 。

在 $\triangle PAF$ 中， $\overline{PF} - \overline{AP} \leq \overline{AF} = \frac{9}{4}$ ，

$$|d(P, L) - \overline{AP}|$$

$$= |\overline{PC} - \overline{AP}|$$

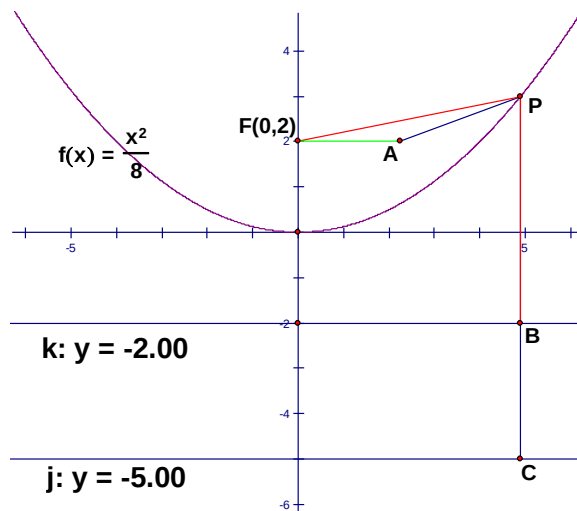
$$= |3 + \overline{PB} - \overline{AP}|$$

$$= |3 + \overline{PF} - \overline{AP}|$$

$$\leq |3 + \frac{9}{4}|$$

$$= \frac{21}{4}.$$

即 $|d(P, L) - \overline{AP}|$ 之最大值為 $\frac{21}{4}$ 。



可能用到的參考公式及數值

- 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
- 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$
- 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$
- 首項為 a 且公差為 d 的等差數列前 n 項之和 $S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$
首項為 a 且公比為 r 的等比數列前 n 項之和 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ， $r \neq 1$
- 三角函數的和角公式：
$$\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$
$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$
- $\triangle ABC$ 的正弦定理：
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$
$$\triangle ABC \text{ 的餘弦定理： } c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$
- 算術平均數：
$$\bar{X} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

(樣本)標準差：
$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} \left(\left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) - n\bar{X}^2 \right)}$$
- 95% 信心水準下之信賴區間：
$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$
- 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$
- 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$