

數學 1 進階講義

多項式的定義與四則運算

景美女中・莊瑋倫老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\equiv$

2-2-1 多項式的定義

2-2-2 多項式的四則運算

多項式的定義

1. x 的單項式：如 2 ， $3x^2$ ， $-\frac{5}{2}x^3$ ， x^{100} ， $\dots$ 等。
2. x 的多項式：由有限多個 x 的單項式與數的乘積用加號連接而成的式子，如： $3x^2 - 5x + 7$ ， $x^{100} - 2x^{50} - 1 \dots$ 等。

一般形式如： $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1 x + a_0$ ，為 x 的降冪排列多項式，其中 $a_n \neq 0$ ， $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ， $a_k \in \mathbb{R}$ ，則 $f(x)$ 叫做 x 的實係數多項式，以 $f(x) \in R[x]$ 表示。其中 a_n 叫做 $f(x)$ 的領導係數， n 叫做 $f(x)$ 的次數，記作 $\deg f(x) = n$ ， a_0 叫做 $f(x)$ 的常數項。

多項式的 x 不能在根號內，不能在絕對值內，也不能在分母。

例如： $|x-1|$ 、 $\sqrt{x^2+3x+1}-5x$ 、 $\frac{1}{x}$ 都不是多項式。

3. 零多項式與零次多項式： $f(x) = c$ 叫做零次多項式； $f(x) = 0$ 叫做零多項式，沒有次數可言。

($\because 0 = 0x^1 = 0x^2 = 0x^3 = \dots \therefore 0$ 不定義次方)

多項式的相等

1. 定義：設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x + a_1 x + a_0$ ，

與 $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_2 x + b_1 x + b_0$ 為兩個非零多項式

若 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow$ 次數相同且同次項係數相等。

也就是， $f(x) = g(x) \Leftrightarrow n = m$ 且 $a_k = b_k$ ($\forall k = 1, 2, 3, \dots, n$)

2. 若 $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{R}, f(\alpha) = g(\alpha)$

3. 若至少有 $n+1$ 個相異實數，使得 $f(x) = 0$ ，則 $f(x)$ 恆等於 0，記作 $f(x) \equiv 0$

4. 多項式恆等定理：若至少有 $n+1$ 個相異實數，使得 $f(x) = g(x)$ ，記作 $f(x) \equiv g(x)$ 。



多項式的係數

1. 設 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_2 x + a_1 x + a_0$,

其中 $a_n \neq 0$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $a_k \in \mathbb{R}$

則

(1) 常數項 $a_0 = f(0)$

(2) 各項係數總和 $= a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1} + a_n = f(1)$

(3) 偶次項係數和 $= a_0 + a_2 + a_4 + a_6 + \cdots = \frac{f(1) + f(-1)}{2}$

(4) 奇次項係數和 $= a_1 + a_3 + a_5 + a_7 + \cdots = \frac{f(1) - f(-1)}{2}$

2. 設 $g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_2 x + b_1 x + b_0$,

其中 $b_m \neq 0$, $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $b_k \in \mathbb{R}$

(1) 若 $n > m$, 則 $\deg[f(x) \pm g(x)] = n$; 若 $n = m$, 則 $\deg[f(x) \pm g(x)] =$ 不一定

(2) 若 $n > m$, 則 $\deg[f(x) \times g(x)] = n + m$; 若 $n > m$, 則 $\deg[f(x) \div g(x)] = n - m$

(3) 若 $n = m$, 則 $\deg[f(x) \times g(x)] = 2n$;

(4) 若 $n = m \neq 0$, 則 $\deg[f(x) \div g(x)] = 0$, 其中 $g(x) \neq 0$



注意事項

多項式的 x 不能在根號內, 不能在絕對值內, 也不能在分母。



關鍵字

多項式、零多項式、零次多項式、領導係數、常數項。

例題 1

下列何者是 x 的多項式？(A) 0 (B) $x + x^3$ (C) $\frac{1}{x+1}$ (D) $|x|$

Ans：AB

例題 2

已知 a 、 b 為整數，且 $a < b$ ， $f(x) = (ab + a + 3b)x^3 + (a + 2)x^2 + 4x + 6$ ，

若 $\deg f(x) = 2$ ，試求數對 $(a, b) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans：

$$ab + a + 3b = 0$$

$$(a + 3)(b + 1) - 3 = 0$$

$$(a + 3)(b + 1) = 3$$

$a+3$	1	3	-1	-3
$b+1$	3	1	-3	-1
a	-2	0	-4	-6
b	2	0	-4	-2

(不合) (不合) (不合)

故， $(a, b) = (-6, -2)$

例題 3

一數學題「兩多項式 A 、 B ； B 為 $7x^2 + 4x - 5$ ，試求 $A - B$ 」

某生誤讀將「 $A - B$ 」看成「 $A + B$ 」，算出答案為「 $12x^2 + x + 4$ 」，

則 $A - B$ 的正確答案是 。

Ans :

$$A + (7x^2 + 4x - 5) = 12x^2 + x + 4$$

$$\begin{aligned} A &= 12x^2 + x + 4 - (7x^2 + 4x - 5) \\ &= 5x^2 - 3x + 9 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A - B &= (5x^2 - 3x + 9) - (7x^2 + 4x - 5) \\ &= -2x^2 - 7x + 14 \end{aligned}$$

例題 4

$$f(x) = (a-2)x^3 + (b-c+1)x^2 + (2c-1)x + d + 2,$$

已知 $f(\sqrt{5}) = f(\pi) = f(102) = f(0.7) = 6$ ，試求 $(a, b, c, d) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans :

由題意可知 $f(x) = 6$

$$\text{故} \begin{cases} a-2=0 \\ b-c+1=0 \\ 2c-1=0 \\ d+2=6 \end{cases} \Rightarrow (a, b, c, d) = (2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 4)$$

例題 5

設多項式 $f(x)$ 滿足 $f(x+2) - f(x) = 8x - 2$ ， $f(0) = 5$ ，試求 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

【Hint】： $k \neq 0$ ，若 $f(x)$ 為 x 的多項式，則 $\deg(f(x+k) - f(x)) = n \Leftrightarrow \deg f(x) = n+1$

Ans :

由題意可假設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ，且 $f(0) = 5 \Rightarrow c = 5$

$$\text{又因為 } f(2) = -2 \text{ 且 } f(-2) = 23 \Rightarrow \begin{cases} 4a + 2b + 5 = 3 \\ 4a - 2b + 5 = 23 \end{cases} \Rightarrow a = 2, b = -5$$

故， $f(x) = 2x^2 - 5x + 5$

例題 6

將 $f(x) = (2x^7 - x + 3)^5$ 展開，試求

(1) $f(x)$ 的各項係數和 = $\underline{\hspace{2cm}}$ (2) $f(x)$ 的常數項 = $\underline{\hspace{2cm}}$

(3) $f(x)$ 的偶次項係數和 = $\underline{\hspace{2cm}}$ (4) $f(x)$ 的奇次項係數和 = $\underline{\hspace{2cm}}$

Ans :

(1)

$$\text{所求} = f(1) = 1024$$

(2)

$$\text{所求} = f(0) = 243$$

(3)

$$\text{所求} = \frac{f(1) + f(-1)}{2} = \frac{1024 + 32}{2} = 528$$

(4)

$$\text{所求} = \frac{f(1) - f(-1)}{2} = \frac{1024 - 32}{2} = 496$$

例題 7

試求 $(8x+1)(7x+1)(6x+1)\cdots(2x+1)(x+1)$ 展開式中

(1) x 項係數=_____， (2) x^2 項係數=_____。

Ans :

$$(1) \text{所求} = 8 + 7 + \cdots + 2 + 1 = 36$$

(2) 所求

$$\begin{aligned} &= (8 \times 7) + (8 \times 6) + (8 \times 5) + (8 \times 4) + (8 \times 3) + (8 \times 2) + (8 \times 1) \\ &\quad + (7 \times 6) + (7 \times 5) + (7 \times 4) + (7 \times 3) + (7 \times 2) + (7 \times 1) \\ &\quad + (6 \times 5) + (6 \times 4) + (6 \times 3) + (6 \times 2) + (6 \times 1) \\ &\quad + (5 \times 4) + (5 \times 3) + (5 \times 2) + (5 \times 1) \\ &\quad + (4 \times 3) + (4 \times 2) + (4 \times 1) \\ &\quad + (3 \times 2) + (3 \times 1) \\ &\quad + (2 \times 1) \\ &= 546 \end{aligned}$$

例題 8

已知 $f(x)$ 為 x 的多項式，且 $8f(x) - 5x^{100}f(x^3) - 2f(x^{50}) + 18 = 0$ ，

則 $f(x)$ 之常數項=_____。

Ans :

$$\text{所求} = f(0) = -3$$



習題 1

一數學題「兩多項式 A 、 B ； B 為 $x^2 + x + 1$ ，試求 $A \div B$ 。」

某生誤將「 $A \div B$ 」看成「 $A + B$ 」，結果求出答案為「 $x^3 + x^2 + x$ 」，
試求 $A \div B$ 的正確答案為_____。

習題 2

若 $(3x^2 + ax - 6)(2x^2 + x - 1) = 6x^4 + mx^3 + nx^2 - 2x + 6$ ，

試求 $a + m + n =$ _____。

習題 3

設 $(x-1)(x-2)(x+3)(x-5) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ ，

則 $c =$ _____，係數總和=_____， $e =$ _____。

習題 4

試求 $(x^5 - 3x^4 + 4x^3 - 2x^2 + 6)(2x^4 + x^3 - 4x^2 - 3x + 5)$ 展開式中，

偶次方項係數和為_____。

習題 5

已知 $f(x) = (3x^{15} - 2x^{13} + 6x^8 - 7x^4 - x)^{21}$ 展開式中，

各項係數和為 a ，各奇次項係數和為 b ，各偶次項係數和為 c ，

試求 $2a + 3b - 4c =$ _____。

習題 6

若 $2x^3 - 5x^2 + 4x - 7 = a(x-1)(x+2)(x+3) + b(x-1)(x+2) + c(x-1) + d$ ，

則 $(a, b, c, d) =$ _____。

習題 7

【指考乙 96】

設 r 、 s 為整數，已知整係數多項式 $x^3 + rx + s$ 的因數分解是 $x^3 + rx + s = (x+a)^2(x+b)$ ，

其中 a 、 b 為相異實數，求證 a 、 b 都是有理數。



習題 1 : $x-1$

習題 2 : -28

習題 3 : -7 ; 0 ; -30

習題 4 : -7

習題 5 : 2

習題 6 : $(2, -13, 15, -6)$

習題 7 :

$$x^3 + rx + s = (x+a)^2(x+b) = x^3 + (2a+b)x^2 + (a^2 + 2ab)x + a^2b$$

$$\begin{cases} 2a+b=0 \cdots \cdots (1) \\ a^2+2ab=r \cdots \cdots (2) \\ a^2b=s \cdots \cdots (3) \end{cases}$$

由(1)可得 $b = -2a$ 代入(2)可得 $r = -3a^2 \cdots \cdots (4)$

代入(3)可得 $s = -2a^3 \cdots \cdots (5)$

(5)÷(4)得 $a = \frac{3s}{2r}$ 為有理數 $\Rightarrow b$ 也為有理數，因此， a 、 b 都是有理數。