高中數學 進階講義

數列

陳清海 老師

信望愛文教基金會

lt99ok211 數列

主題一、數列

> 數列：將一系列的數依照順序排列出來，就構成一個數列．符號$\langle a_n \rangle$表示數列
> $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$，其中$a_1$是第 1 項，$a_2$是第 2 項，$a_n$是第$n$項，又稱爲一般項．

【例題 1】【配合課本例 1】

寫出下列兩數列的前五項：

(1) $\langle 3n-2 \rangle$　　**(2)** $\left\langle \frac{-n}{2n+1} \right\rangle$ **.**

Ans：見詳解

【詳解】

(1) 數列$\langle 3n-2 \rangle$的一般項$a_n = 3n-2$,

將 n 分別以 1，2，3，4，5 代入，得

$a_1 = 1,\ a_2 = 4,\ a_3 = 7,\ a_4 = 10,\ a_5 = 13$ ．

(2) 因爲數列$\left\langle \frac{-n}{2n+1} \right\rangle$的一般項$a_n = \frac{-n}{2n+1}$，所以

$a_1 = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3},\quad a_2 = \frac{-2}{5} = -\frac{2}{5},\quad a_3 = \frac{-3}{7} = -\frac{3}{7},$

$a_4 = \frac{-4}{9} = -\frac{4}{9},\quad a_5 = \frac{-5}{11} = -\frac{5}{11}$ ．

【類題 1】

寫出下列兩數列的前五項：

(1) $\langle (1+n)(1-n) \rangle$　　**(2)** $\left\langle \frac{(-2)^n}{2n-1} \right\rangle$ **.**

Ans：見詳解

【詳解】

(1) 因爲數列$\langle (1+n)(1-n) \rangle$的一般項$a_n = (1-n)(1+n) = 1-n^2$,

所以 $a_1=0,\ a_2=-3,\ a_3=-8,\ a_4=-15, a_5=-2$.

(2) 因爲數列 $\left\langle \dfrac{(-2)^n}{2n-1} \right\rangle$ 的一般項 $a_n=\dfrac{(-2)^n}{2n-1}$ ，所以

$a_1=-2,\quad a_2=\dfrac{4}{3},\quad a_3=\dfrac{-8}{5}=-\dfrac{8}{5},$

$a_4=\dfrac{16}{7},\quad a_5=\dfrac{-32}{9}=-\dfrac{32}{9}$.

【例題 2】

設數列 $\langle a_n \rangle$ 的一般項爲 $a_n=7n-101$.

(1) 寫出 $a_2,\ a_4,\ a_7$.

(2) 求 109 是第幾項 .

(3) 問： 33 是不是數列 $\langle a_n \rangle$ 的某一項?

(4) 若 $a_n<0$，則 a_n 的最大值爲何?

Ans：(1) $a_2=-87$，$a_4=-73$，$a_7=-52$，(2)30，(3) 不是，(4) -3

【詳解】

(1) $a_2=7\cdot 2-101=-87$,

$a_4=7\cdot 4-101=-73$,

$a_7=7\cdot 7-101=-52$.

(2) 設 $7n-101=109$， 整理得 $7n=210$,

解得 $n=30$， 因此得 109 是第 30 項 .

(3) 設 $7n-101=33$， 整理得 $7n=134$, 解得 $n=19\dfrac{1}{7}$,

不是正整數，因此得 33 不是數列 $\langle a_n \rangle$ 的某一項 .

(4) 若 $a_n<0$， 即 $a_n=7n-101<0$, 則 $7n<101$,

解得 $n<\dfrac{101}{7}=14\dfrac{3}{7}$,

故當 $n=14$ 時，a_n 有最大值-3 .

【類題 2】

設數列$\langle a_n\rangle$的一般項爲 $a_n = 1024\cdot 2^{-n+2}$，

(1) 寫出 a_2, a_4, a_7 .

(2) 求128是第幾項 .

(3) 問： 0.5是不是數列$\langle a_n\rangle$的某一項?

(4) 若 $a_n < 4$，則 a_n 的最大值爲何？

Ans：(1) $a_2 = 1024$，$a_4 = 256$，$a_7 = 32$，(2) 5，(3) 13，(4) 2

【詳解】

(1) $a_2 = 1024\cdot 2^{-2+2} = 1024\cdot 2^0 = 1024$,

$a_4 = 1024\cdot 2^{-4+2} = 1024\cdot 2^{-2} = 256$,

$a_7 = 1024\cdot 2^{-7+2} = 1024\cdot 2^{-5} = 32$.

(2) 設 $1024\cdot 2^{-n+2} = 128$， 整理得 $2^{12-n} = 2^7$，
解得 $n = 5$， 因此得 128 是第 5 項 .

(3) 設 $1024\cdot 2^{-n+2} = 0.5$， 整理得 $2^{12-n} = 2^{-1}$， 解得 $n = 13$.
因此得 0.5 是數列$\langle a_n\rangle$的第 13 項 .

(4) 若 $a_n < 4$， 即 $a_n = 1024\cdot 2^{-n+2} = 2^{12-n} < 4 = 2^2$,

則 $12 - n < 2$， 解得 $n > 10$,
故當 $n = 11$ 時， a_n 有最大值 2 .

主題二　等差數列與等比數列

1. 設 $\langle a_n \rangle$ 爲等差數列．

   (1) 公差 $d=a_2-a_1=a_3-a_2=\cdots=a_n-a_{n-1}=\cdots$．

   (2) 第 n 項 $a_n=a_1+(n-1)d$．

2. 設 $\langle a_k \rangle$ 爲等比數列．

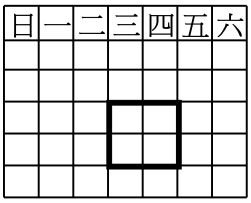
   (1) 公比 $r=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{a_3}{a_2}=\cdots=\dfrac{a_n}{a_{n-1}}=\cdots$．

   (2) 第 n 項 $a_n=a_1r^{n-1}$．

3. 若 a, b, c 成等差數列，則 $\boldsymbol{b=\dfrac{a+c}{2}}$，且稱 b 爲 a, c 的等差中項．

   若 a, b, c 成等比數列，則 $\boldsymbol{b^2=ac}$，且稱 b 爲 a, c 的等比中項．

【例題 3】【配合課本例 2】



右圖是某年三月的月曆，其中黑線所圍的 4 天的日期和爲 76，問該年的四月 1 日是星期幾?

Ans：六

【詳解】

設此 4 天的日期分別爲 a, $a+1$, $a+7$, $a+8$,

則 $4a+16=76$，解得 $a=15$,

因此三月 15，22，29 日均爲星期三，

故依序可推得四月 1 日是星期六．

【類題 3】

已知一等差數列的前 2 項分別爲 321, 312，且此等差數列僅最後一項是負數，求此等差數列有幾項．

Ans：37

【詳解】

因爲公差 $d=a_2-a_1$，所以 $d=312-321=-9$．

又因爲等差數列的一般項

$a_n=a_1+(n-1)d=321+(n-1)(-9)=-9n+330$，

若 $-9n+330<0$，則 $n>36\frac{2}{3}$，

所以此數列有 37 項．

【例題 4】【常考題】

在等比數列 $\langle a_n\rangle$ 中，$a_1+a_3=20$，$a_2+a_4=-10$，求 a_5 的值．

Ans：1

【詳解】

設等比數列 $\langle a_n\rangle$ 的首項爲 a，公比爲 r．

因此，由題意可得

$$\begin{cases} a+ar^2=20 \\ ar+ar^3=-10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+ar^2=20, \\ r\left(a+ar^2\right)=-10. \end{cases}$$

兩式相除得到 $r=-\frac{1}{2}$，代回解得 a＝16．

故 $a_5=ar^4=16\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^4=1$．

【類題 4】

已知四數形成一個等比數列，前三數的乘積爲 1，後三數的和爲 $\frac{3}{4}$，求此四數．

Ans：$-2,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$

【詳解】

設此四數爲 $\frac{a}{r},\ a,\ ar,\ ar^2$．

因爲 $\frac{a}{r}\times a\times ar=1$，所以 $a^3=1$，即 $a=1$．

又因爲 $a+ar+ar^2=1+r+r^2=\frac{3}{4}$，所以解得 $r=-\frac{1}{2}$，

因此，此四數依序爲 $-2,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$．

【例題 5】【配合課本例 3】

已知三正數成等差數列，其和爲 36．且將各項依次加上$1, 4, 43$後，可成等比數列，求此三數．

Ans：3，12，21

【詳解】

因爲三正數成等差數列，

所以可假設此三數爲 $a-d,\ a,\ a+d$ ．

由題意知，此三數的和爲 36，得

$(a-d)+a+(a+d)=36$，推得 a＝12．

將各項依次加 1，4，43 後，三數分別爲$13-d,\ 16,\ 55+d$ ．

因爲此三數成等比數列，所以$16^2=(13-d)(55+d)$，

推得 $d^2+42d-459=0$，解得 d＝9 或 −51．

因爲當 d＝−51 時，此三數爲 $63,\ 12,\ -39$，與題意中三正數不合，

所以得 d＝9，且此三數爲 3，12。21．

【類題 5】

已知三正數成等比數列，公比大於1，其和爲39．且將各項依次減去$1, 2, 12$後，可得等差數列，求此三數．

Ans：4，10，25

【詳解】

因爲三正數成等比數列，所以可假設此三數爲$a,\ ar,\ ar^2$ ．

由題意知，此三數的和爲 39，得

$a+ar+ar^2=39 \cdots ①$

又將各項依次減去 1，2，12 後，

三數分別爲$a-1,\ ar-2,\ ar^2-12$，

因爲此三數成等差數列，所以

$2\times(ar-2)=(a-1)+(ar^2-12)$，整理得

$a-2ar+ar^2=9 \cdots ②$

由$①-②$得$3ar=30$，即$ar=10$或$a=\dfrac{10}{r}$ ．

將$a=\dfrac{10}{r}$代入①，得$\dfrac{10}{r}+10+10r=39$，

即 $10r^2-29r+10=0$，

分解得 $(2r-5)(5r-2)=0$，

解得 $r=\dfrac{5}{2}$ 或 $r=\dfrac{2}{5}$（不合），並得 $a=4$ ．

故得此三數為 4，10，25 ．

【例題 6】

已知 a, b, c 三數成等比數列且 $abc\neq 0$，又 $b+5$ 為 $a+1, c+25$ 的等比中項，求 $a:b:c$ ．

Ans：1：5：25

【詳解】

設 $b=ar,\ c=ar^2$ ．

因為 $b+5$ 為 $a+1,\ c+25$ 的等比中項，

所以 $(b+5)^2=(a+1)(c+25)$，即

$$(ar+5)^2=(a+1)(ar^2+25)\Rightarrow r^2-10r+25=0,$$

解得 $r=5$ ．故 $a:b:c=a:ar:ar^2=1:r:r^2=1:5:25$ ．

【類題 6】

已知四個正數 $6, x, y, 16$ 中，前三項成等差數列，後三項為等比數列，求 $x+y$ ．

Ans：21

【詳解】

因為前三項成等差數列，所以 $x-6=y-x$，又因為後三項為等比數列，

所以 $\dfrac{y}{x}=\dfrac{16}{y}$，即 $\begin{cases}2x-6=y\cdots① \\ 16x=y^2\cdots②\end{cases}$ ．

將①式代入②式，得 $16x=(2x-6)^2$，

整理得 $x^2-10x+9=0$，解得

$x=9,\ y=12$ 或 $x=1,\ y=-4$ ．

因為四數均為正數，所以 $x+y=9+12=21$ ．

主題三、遞迴關係式

描述數列相鄰項之間關係的通式,稱為該數列的遞迴關係式.

例如:

1.	等差數列 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = a_{n-1} + d \ (n \geq 2) \end{cases}$	:	$a,\ a+d,\ a+2d,\ \cdots$.
2.	等比數列 $\begin{cases} a_1 = a \\ a_n = ra_{n-1} \ (n \geq 2) \end{cases}$	:	$a,\ ar,\ ar^2,\ \cdots$.
3.	特殊數列 $\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_n = a_{n-1} + n \ (n \geq 2) \end{cases}$	:	$2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots$.

【例題 7】【配合課本例 4】

大同路的右側是奇數號門牌，今某環保團體從大同路 3 號開始，在大同路右側依序做宣導拜訪．設 a_n 是第 n 家宣導的門牌號碼，可知 $a_1 = 3$ ．

(1) 求 $a_2,\ a_3$ ．

(2) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

Ans：(1) $a_2 = 5$，$a_3 = 7$，(2) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \ (n \geq 2) \end{cases}$

【詳解】

(1) 依題意可得 $a_2 = 5$， $a_3 = 7$ ．

(2) 因爲每隔 1 家門牌數號碼增加 2，
所以數列 $\langle a_n \rangle$ 是一個公差爲 2 的等差數列，
其遞迴關係式爲

$$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 2 \ (n \geq 2) \end{cases} .$$

【類題 7】

伸出你的左手，從小指開始，如圖所示那樣數數字：

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, \cdots$ **.**

設 a_n **是第** n **次指到中指所數到的數字，可知** $a_1 = 3$ **.**

(1) 求 a_2, a_3 **.**

(2) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ **的遞迴關係式 .**

Ans：(1) $a_2 = 3$，$a_3 = 11$，(2) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \ (n \geq 2) \end{cases}$

【詳解】

(1) 依題意數數，可得 $a_1 = 3,\ a_2 = 7,\ a_3 = 11$.

(2) 因爲數數時，每隔 4 個數字就會再次回到中指，
所以數列 $\langle a_n \rangle$ 是一個公差爲 4 的等差數列，
其遞迴關係式爲 $\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = a_{n-1} + 4 \ (n \geq 2) \end{cases}$.

【例題 8】【配合課本例 5】

圖 1 中有一個線段，將其三等分後，取掉中間的線段後，再加上兩條等長的線段，形成圖 2，此時圖中有 4 條小線段．再將每條小線段，等分成三段，取掉中間的線段後，再加上兩條等長的更小線段，形成圖 3，此時圖中有 16 條更小線段．

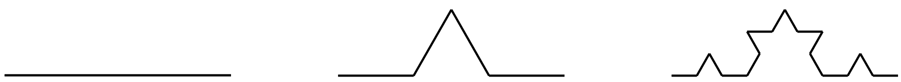


圖 1　　　　圖 2　　　　圖 3

重複上述的步驟，並設 a_n **是第** n **圖中線段的總數 .**

(1) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ **的遞迴關係式 .**

(2) 求 a_6 **.**

Ans：(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 4a_{n-1} \ (n \geq 2) \end{cases}$，(2) 1024

【詳解】

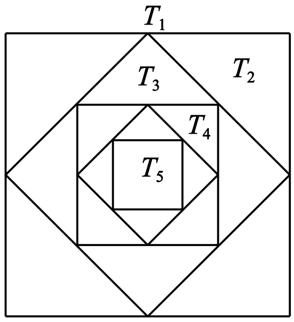
(1) 由圖可知，每經過一個步驟，
每條小線段都會變成 4 條更小的線段，
因此，$\langle a_n \rangle$ 是一個公比爲 4 的等比數列 .
又因爲 $a_1 = 1$，所以其遞迴關係式爲

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 4a_{n-1}\ (n \geq 2) \end{cases}.$$

(2) 利用等比數列的一般項公式得 $a_6 = 1 \cdot 4^{6-1} = 1024$ ．

【類題 8】

已知一正方形 T_1 的面積為 1024，以其各邊中點為頂點連成的四邊形 T_2 也是正方形，如此繼續下去，得到一序列的正方形 T_1，T_2，T_3，⋯，如圖所示．



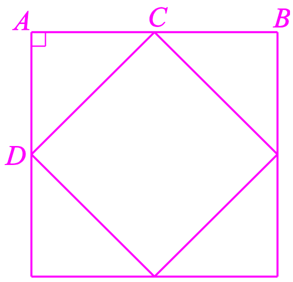
設 a_n 是正方形 T_n 的面積．

(1) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

(2) 求 a_{10} ．

Ans：(1) $\begin{cases} a_1 = 1024 \\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}\ (n \geq 2) \end{cases}$，(2) 2

【詳解】



由右圖可知：因為 $\triangle ADC$ 為等腰直角三角形，

所以 $\overline{CD} = \sqrt{2}\,\overline{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}} 2\overline{AC} = \frac{1}{\sqrt{2}}\overline{AB}$，

即 T_2 的邊長為 T_1 邊長的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，

因此 T_2 的面積為 T_1 面積的 $\frac{1}{2}$ ．

以此類推可得 T_1，T_2，T_3，⋯的面積為公比 $\frac{1}{2}$ 的等比數列 1024，512，⋯．故

(1) 數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 1024 \\ a_n = \frac{1}{2}a_{n-1}\ (n \geq 2) \end{cases}$ ．

(2) $a_{10} = 1024 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = 1024 \cdot \frac{1}{512} = 2$ ．

【例題 9】【配合課本例 6】

設平面上 n 個圓過同一點 A，這 n 個圓最多將平面分割成 a_n 個區域．

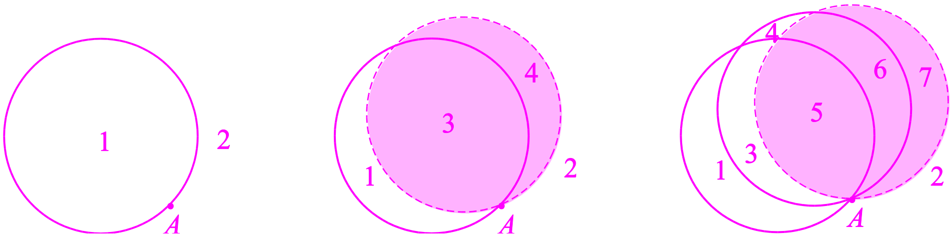
(1) 求 a_1，a_2，a_3 ．

(2) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

Ans：(1) $a_1=2$，$a_2=4$，$a_3=7$，(2) $\begin{cases} a_1=2 \\ a_n=a_{n-1}+n\ (n\geq 2) \end{cases}$

【詳解】

(1) 畫出 1 個圓、2 個圓、3 個圓的情形分別如下：

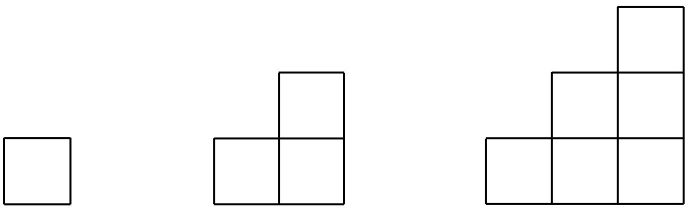


因此，$a_1=2, a_2=4, a_3=7$．

(2) 已知 $n-1$個圓最多將平面分割成 a_{n-1} 個區域，
現在多加一個圓上去，這一個圓和原先的 n－1 個圓都相交，
而且被這 n－1 個圓分成 n 個部分，這 n 個部分就是多出來的，
因此 n 個圓最多可以將所在的平面分成 $a_n=a_{n-1}+n$ 個部分，
即遞迴關係式爲 $\begin{cases} a_1=2 \\ a_n=a_{n-1}+n\ (n\geq 2) \end{cases}$．

【類題 9】

已知一個小正方形由 4 個長度爲 1 的線段組成．現在依一定的規律排成下面的若干圖形：



第1圖　第2圖　第3圖

設 a_n 爲第 n 圖中所使用長度爲 1 的線段總數．

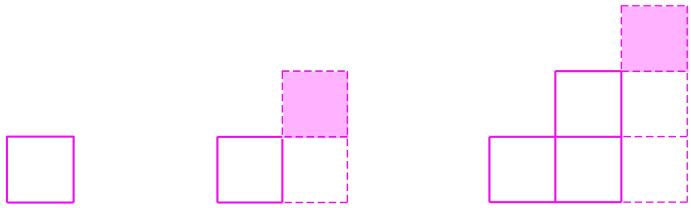
(1) 寫出數列$\langle a_n\rangle$的遞迴關係式．

(2) 求 a_6 ．

Ans：(1) $\begin{cases} a_1=4 \\ a_n=a_{n-1}+(2n+2)\ (n\geq 2) \end{cases}$，(2) 54

【詳解】

(1) 因爲第 1 圖有 4 個線段，
第 2 圖比第 1 圖增加 1 個正方形和 2 個線段，
第 3 圖比第 2 圖增加 1 個正方形和 2 組 2 個線段，
如下圖所示：



第1圖　　　第2圖　　　第3圖

因此，$a_1=4,\ a_2=a_1+4+1\cdot 2,\ \ a_3=a_2+4+2\cdot 2$，

以此類推可得

$a_n=a_{n-1}+4+(n-1)\cdot 2$，即 $a_n=a_{n-1}+(2n+2)$．

故其遞迴關係式為

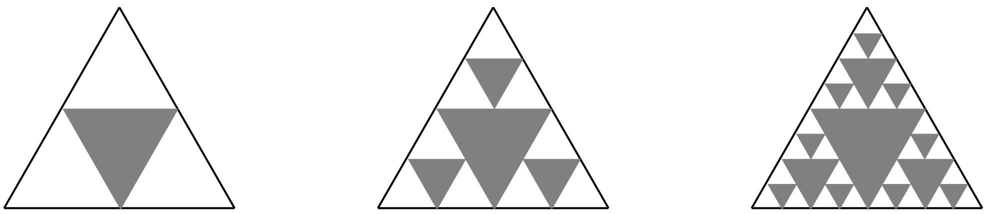
$$\begin{cases} a_1=4 \\ a_n=a_{n-1}+(2n+2)\ (n\ge 2) \end{cases}.$$

(2)　利用遞迴關係式可得：

$a_2=10,\ a_3=18,\ a_4=28,\ a_5=40,\ a_6=54$．

【例題 10】【配合課本例 7】

取一個白色正三角形，將其等分成 4 個相同的小正三角形，然後將中間的那一個三角形塗成黑色；接著再將剩下的 3 個白色小正三角形，分別等分成 4 個相同的更小正三角形，並將中間更小的正三角形塗成黑色．重複這樣的步驟，如下圖所示：



第1圖　　　第2圖　　　第3圖

設 a_n 為第 n 圖中黑色三角形的總數．

(1)　寫出數列 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式．

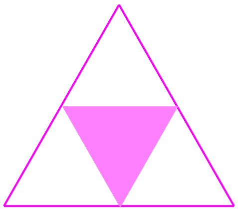
(2)　求 a_5．

Ans：(1) $\begin{cases} a_1=1 \\ a_n=3a_{n-1}+1\ (n\ge 2) \end{cases}$，(2) 121

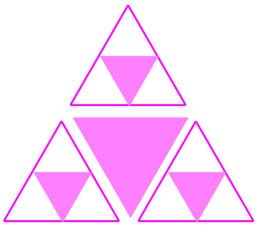
【詳解】

(1)　由圖可知，第 2 圖是 3 個第 1 圖加上中間的大三角形，

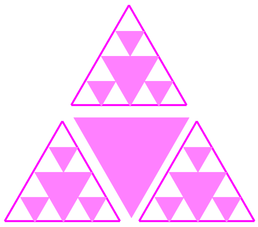
第 3 圖是 3 個第 2 圖加上中間的大三角形，



第1圖



第2圖



第3圖

因此， $a_n = 3a_{n-1} + 1$.

又因為 $a_1 = 1$，所以其遞迴關係式為

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} + 1\,(n \geq 2) \end{cases}.$$

(2) 利用遞迴關係式可得：

$a_2 = 4,\ a_3 = 13,\ a_4 = 40,\ a_5 = 121$.

【類題 10】

一種趣味糖果盒是這樣設計的：一顆糖果放入一個小盒子中，再將 2 個小盒子放入一個較大的小盒子中，形成一個 2 層的糖果盒，而 3 層的糖果盒是將 2 個 2 層的糖果盒放入一個再大的盒子中，以此類推，可依顧客需求設計 n 層的趣味糖果盒．設 a_n 為 n 層趣味糖果盒所使用的盒子總數．

(1) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

(2) 求 a_5 ．

Ans：(1) $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1\,(n \geq 2) \end{cases}$，(2) 31

【詳解】

(1) 根據題意可知：n 層糖果盒所需要的盒子為 2 個

n－1 的糖果盒所需要的盒子數加上最外層的果盒，

即 $a_n = 2a_{n-1} + 1$， 又 $a_1 = 1$， 故其遞迴關係式為

$$\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 2a_{n-1} + 1\,(n \geq 2) \end{cases}.$$

(2) 利用遞迴關係式可得：

$a_2 = 3,\ a_3 = 7,\ a_4 = 15,\ a_5 = 31$.

主題四、數學歸納法

對於某一個與正整數有關的數學命題，只要滿足下面兩件事：
(1) 驗算 $n=1$ 時命題成立．
(2) 設 $n=k$ 時命題成立，推得 $n=k+1$ 時命題亦成立．
即能證明此命題對所有的正整數 n 都成立．

【例題 11】【配合課本例 8】

設數列 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1=4 \\ a_n=3a_{n-1}-2\,(n\ge 2)\end{cases}$．

(1) 寫出 a_2，a_3．
(2) 猜測一般項 a_n．
(3) 使用數學歸納法證明：你的猜測是正確的．

Ans：(1) $a_2=10$，$a_3=28$，(2) $a_n=3^n+1$

【詳解】

(1) 由遞迴關係式可得

$a_2=3\cdot 4-2=10$，$a_3=3\cdot 10-2=28$．

(2) 因為 $a_1=4=3+1$，$a_2=10=3^2+1$，$a_3=28=3^3+1$，

所以猜測 $a_n=3^n+1$．

(3) ① 當 $n=1$ 時，$a_1=4=3^1+1$，猜測是正確的．

② 當 $n=k$ 時猜測正確，即 $a_k=3^k+1$，則

當 $n=k+1$ 時，

$a_{k+1}=3a_k-2=3(3^k+1)-2=3^{k+1}+1$

可知猜測是正確的．

故由數學歸納法可知：我們的猜測是正確的，

即對於所有的正整數 n，$a_n=3^n+1$．

【類題 11】

設數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式為$\begin{cases} a_1 = 3 \\ a_n = 4a_{n-1} + 3\,(n \ge 2) \end{cases}$.

(1) 寫出a_2, a_3.
(2) 猜測一般項a_n.
(3) 使用數學歸納法證明：你的猜測是正確的.

Ans：(1) $a_2 = 15$，$a_3 = 63$，(2) $a_n = 4^n - 1$

【詳解】

(1) 由遞迴關係式可得

$a_2 = 4 \cdot 3 + 3 = 15$, $a_3 = 4 \cdot 15 + 3 = 63$.

(2) 因為 $a_1 = 3 = 4 - 1$, $a_2 = 15 = 4^2 - 1$, $a_3 = 63 = 4^3 - 1$,

所以猜測 $a_n = 4^n - 1$.

(3) ① 當 $n = 1$時, $a_1 = 3 = 4^1 - 1$, 猜測是正確的.

② 設 $n = k$ 時猜測正確, 即 $a_k = 4^k - 1$, 則

當 $n = k + 1$時,

$$a_{k+1} = 4 \cdot a_k + 3 = 4 \cdot \left(4^k - 1\right) + 3 = 4^{k+1} - 1$$

可知猜測是正確的.

故由數學歸納法可知：我們的猜測是正確的,

即對於所有的正整數 n, $a_n = 4^n - 1$.

【例題 12】

設數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式為$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_n = \dfrac{1 + a_{n-1}}{3 - a_{n-1}}\,(n \ge 2) \end{cases}$.

(1) 寫出a_2, a_3, a_4.
(2) 猜測一般項a_n.
(3) 使用數學歸納法證明：你的猜測是正確的.

Ans：(1) $a_2 = \frac{1}{3}$，$a_2 = \frac{2}{4}$，$a_3 = \frac{3}{5}$，(2) $a_n = \frac{n-1}{n+1}$

【詳解】

(1) 由遞迴關係式可得

$$a_2=\frac{1+0}{3-0}=\frac{1}{3}，\quad a_3=\frac{1+\frac{1}{3}}{3-\frac{1}{3}}=\frac{2}{4}，\quad a_4=\frac{1+\frac{2}{4}}{3-\frac{2}{4}}=\frac{3}{5}\ .$$

(2) 因爲 $a_1=0=\frac{1-1}{1+1}$， $a_2=\frac{1}{3}=\frac{2-1}{2+1}$， $a_3=\frac{2}{4}=\frac{3-1}{3+1}$，

$a_4=\frac{3}{5}=\frac{4-1}{4+1}$，所以猜測 $a_n=\frac{n-1}{n+1}$.

(3) ① 當 $n=1$時， $a_1=0=\frac{1-1}{1+1}$，猜測是正確的 .

② 設 $n=k$時猜測正確，即 $a_k=\frac{k-1}{k+1}$，

則當 $n=k+1$時，

$$a_{k+1}=\frac{1+a_k}{3-a_k}=\frac{1+\frac{k-1}{k+1}}{3-\frac{k-1}{k+1}}=\frac{\frac{2k}{k+1}}{\frac{2k+4}{k+1}}=\frac{k}{k+2}=\frac{(k+1)-1}{(k+1)+1}$$

可知猜測是正確的 .

故由數學歸納法可知：我們的猜測是正確的，

即對於所有的正整數 n， $a_n=\frac{n-1}{n+1}$.

【類題 12】

設數列$\langle a_n\rangle$的遞迴關係式爲 $\begin{cases}a_1=2\\ a_n=2-\dfrac{1}{a_{n-1}}\ (n\ge 2)\end{cases}$.

(1) 寫出 a_2，a_3 .

(2) 猜測一般項 a_n .

(3) 使用數學歸納法證明：你的猜測是正確的 .

Ans：(1) $a_2=\frac{3}{2}$，$a_3=\frac{4}{3}$，(2) $a_n=\frac{n+1}{n}$

【詳解】

(1) 由遞迴關係式可得 $a_2=2-\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$， $a_3=2-\frac{1}{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}$.

(2) 因爲 $a_1=2=\frac{1+1}{1}$， $a_2=\frac{3}{2}=\frac{2+1}{2}$， $a_3=\frac{4}{3}=\frac{3+1}{3}$，

所以猜測 $a_n=\frac{n+1}{n}$ ．

(3) ① 當 $n=1$時， $a_1=2=\frac{1+1}{1}$， 猜測是正確的．

② 設當 $n=k$時猜測正確，即 $a_k=\frac{k+1}{k}$，

則當 $n=k+1$時，

$$a_{k+1}=2-\frac{1}{a_k}=2-\frac{1}{\frac{k+1}{k}}=2-\frac{k}{k+1}=\frac{k+2}{k+1}=\frac{(k+1)+1}{k+1}$$

可知猜測是正確的．

故由數學歸納法可知：我們的猜測是正確的，

即對於所有的正整數 n， $a_n=\frac{n+1}{n}$ ．

【例題 13】【配合課本例 9】

使用數學歸納法證明：對於所有的正整數 n， 3^n+7^n-2恆爲 8 的倍數．

【證明】

設 $a_n=3^n+7^n-2$ ．

(1) 當 $n=1$時， $a_1=3^1+7^1-2=8$， 是 8 的倍數．

(2) 設當 $n=k$時命題成立，即 $a_k=3^k+7^k-2$是 8 的倍數，

則當 $n=k+1$時，

$$a_{k+1}=3^{k+1}+7^{k+1}-2=3\cdot 3^k+7\cdot 7^k-2$$

$$=3\left(3^k+7^k-2\right)+4\left(7^k+1\right)=3\cdot a_k+4\left(7^k+1\right),$$

因爲 7^k+1是偶數，所以 $4\left(7^k+1\right)$是 8 的倍數，

而 a_k 也是 8 的倍數，因此 a_{k+1}是 8 的倍數．

故由數學歸納法可知：對於所有的正整數 n，

3^n+7^n-2 恆爲 8 的倍數．

【類題 13】

使用數學歸納法證明：對於所有的正整數 n， 7^n+5恆爲 6 的倍數．

【證明】

設 $a_n=7^n+5$ ．

(1) 當 $n=1$時， $a_1=12$，是 6 的倍數．

(2) 設當 $n=k$時命題成立，即 $a_k=7^k+5$是 6 的倍數，則

當 $n=k+1$時，

$$a_{k+1}=7^{k+1}+5=7\cdot 7^k+5=7\left(7^k+5\right)-30=7\cdot a_k+6\cdot(-5),$$

因爲 a_k 是 6 的倍數，所以 a_{k+1}也是 6 的倍數．

故由數學歸納法可知：

對於所有的正整數 n， 7^n+5 恆爲 6 的倍數．

【例題 14】【常考題】

對任一正整數 n， $3^{2n+1}+2^{n+2}$恆爲某一質數 p 的倍數，

(1) 試推測此質數 p ．

(2) 請用數學歸納法證明你的推測是正確的．

Ans：(1) 7

【詳解】

(1) 當 $n=1$時， $3^{2\cdot 1+1}+2^{1+2}=35$.

又當 $n=2$時， $3^{2\cdot 2+1}+2^{2+2}=259$.

因爲 35 和 259 的最大公因數爲 7，

所以我們猜測此質數爲 7．

(2) ① 當 $n=1$時， $3^{2\cdot 1+1}+2^{1+2}=35$，是 7 的倍數．

② 設 $n=k$時猜測正確，即 $3^{2k+1}+2^{k+2}$ 爲 7 的倍數，因此

$3^{2k+1}+2^{k+2}=7q$，其中 q 是一個正整數．

當 $n=k+1$時，

$$\begin{aligned}3^{2\cdot(k+1)+1}+2^{(k+1)+2}&=3^{2k+3}+2^{k+3}=9\cdot 3^{2k+1}+2\cdot 2^{k+2}\\&=7\cdot 3^{2k+1}+2\left(3^{2k+1}+2^{k+2}\right)=7\cdot 3^{2k+1}+2\cdot 7q\\&=7\left(3^{2k+1}+2q\right)\end{aligned}$$

也是 7 的倍數．

故由數學歸納法可知：

對所有的正整數 n， $3^{2n+1}+2^{n+2}$恆爲質數 7 的倍數．

【類題 14】

對任一正整數 n， $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 恆爲某一質數 p 的倍數，

(1) 試推測此質數 p ．

(2) 請用數學歸納法證明你的推測是正確的．

Ans：(1) 13

【詳解】

(1) 當 $n=1$時， $4^{2+1}+3^{1+2}=91$．
又當 $n=2$時， $4^{2\cdot 2+1}+3^{2+2}=1105$．
因爲 91 和 1105 的最大公因數爲 13，
所以我們猜測此質數爲 13．

(2) ① 當 $n=1$時， $4^{2+1}+3^{1+2}=91$，是 13 的倍數．
② 設 $n=k$時猜測正確，即 $4^{2k+1}+3^{k+2}$ 爲 13 的倍數，因此

$a_k=4^{2k+1}+3^{k+2}=13q$， 其中 q 是一個正整數．

當 $n=k+1$時，

$$
\begin{aligned}
a_{k+1}&=4^{2(k+1)+1}+3^{(k+1)+2}\\
&=16\cdot 4^{2k+1}+3\cdot 3^{k+2}\\
&=16\left(4^{2k+1}+3^{k+2}\right)-13\cdot 3^{k+2}\\
&=16\cdot 13q-13\cdot 3^{k+2}\\
&=13\left(16q-3^{k+2}\right)
\end{aligned}
$$

也是 13 的倍數．
故由數學歸納法可知:
對於所有的正整數 n， $4^{2n+1}+3^{n+2}$ 恆爲質數 13 的倍數．

test99ok211 重要精選考題

基礎題 ▶▶▶

1. 設等差數列$\langle a_n \rangle$滿足 $a_{12}=88$， $a_{88}=12$，選出正確的選項：

(1) $a_1=99$ **(2)** $a_{100}=0$ **(3)** $a_{150}>0$ **(4)** $a_{33}+a_{67}=0$ **(5)** $a_{50}+a_{150}=0$.

Ans：(1)(2)(5)

【詳解】

設首項為 a_1，公差為 d，則

$a_{12}=a_1+11d=88$⋯⋯⋯①

$a_{88}=a_1+87d=12$⋯⋯⋯②

② －① ⇒ $76d=-76$ ⇒ $d=-1$，

代入① ⇒ $a_1=99$。

(1) $a_1=99$。

(2) $a_{100}=a_1+99d=99-99=0$。

(3) $a_{150}=a_1+149d=99-149=-50<0$。

(4) $a_{33}+a_{67}=(a_1+32d)+(a_1+66d)$

$=2a_1+98d=2\times99-98=100$。

(5) $a_{50}+a_{150}=(a_1+49d)+(a_1+149d)$

$=2a_1+198d=2\times99-198=0$。

2. 設$\langle a_n \rangle$為等比數列，若 $a_1+a_2+a_3=3$ 且 $a_4+a_5+a_6=-24$， 求 a_7的值 .

Ans：64

【詳解】

設首項為 a_1，公比為 r，則

$a_1+a_2+a_3=a_1+a_1r+a_1r^2=3$ ⇒ $a_1(1+r+r^2)=3$⋯⋯⋯①

$a_4+a_5+a_6=a_1r^3+a_1r^4+a_1r^5=a_1r^3(1+r+r^2)=-24$⋯⋯②

② ÷① ⇒ $r^3=-8$ ⇒ $r=-2$，

代入① ⇒ $a_1(1-2+4)=3$ ⇒ $a_1=1$，

故 $a_7=a_1\cdot r^6=1\cdot(-2)^6=64$。

3. 某人存入銀行 **10000** 元，言明年利率 **4%**，以半年複利計息，求滿一年的本利和 .【**91** 學測補】

Ans：10404 元

【詳解】

滿一年的本利和爲 $10000(1+0.02)^2=10404$ 元。

4. **已知等比數列 $\langle a_n \rangle$ 中，滿足 $a_1=1$， $a_4=2-\sqrt{5}$， $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$， $n\geq 1$，**

求 $\langle a_n \rangle$ 的公比．

Ans： $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$

【詳解】

設公比爲 r，則

$a_2=a_1r=r$，$a_3=a_1r^2=r^2$，$a_4=a_1r^3=r^3=2-\sqrt{5}$，又

$a_4=a_3+a_2 \Rightarrow r^3=2-\sqrt{5}=r+r^2 \Rightarrow r^2+r-2+\sqrt{5}=0$

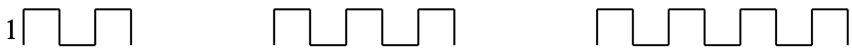
$$\Rightarrow r=\frac{-1\pm\sqrt{1-4(\sqrt{5}-2)}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9-4\sqrt{5}}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{9-2\sqrt{20}}}{2}$$

$$=\frac{-1\pm\sqrt{(\sqrt{5}-\sqrt{4})^2}}{2}$$

$$\Rightarrow r=\frac{-1\pm(\sqrt{5}-2)}{2}$$

$$\Rightarrow r=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \text{ 或 } r=\frac{-3+\sqrt{5}}{2}\text{(不合)}$$

5. **用長度爲 1 的線段依一定的規律排成若干圖形：**



第1圖　　第2圖　　第3圖

設 a_n 爲第 n 圖中所使用長度爲 1 的線段總數．

(1) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

(2) 求 a_{20} ．

Ans：(1) $\begin{cases} a_1=7 \\ a_n=a_{n-1}+4\ (n\geq 2) \end{cases}$，(2) 83

【詳解】

(1) $a_1=7$，

$a_2=a_1+4=11$，

$a_3=a_2+4=15$，

$a_n=a_{n-1}+4$。

(2) $a_n=7+4(n-1)$，

故 $a_{20}=7+4\times 19=83$。

6. 將一個長度為 **1** 的線段，剪去其長度的 $\frac{2}{3}$；再將剩下的線段，剪去其長度的 $\frac{2}{3}$；如此繼續下去．設 a_n 為剪了 n 次後剩下的長度．

(1) 寫出數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式．

(2) 求 a_5 ．

Ans：(1) $\begin{cases} a_1 = \frac{1}{3} \\ a_n = \frac{1}{3} a_{n-1}\ (n \ge 2) \end{cases}$，(2) $\frac{1}{243}$

【詳解】

(1) $a_1 = \frac{1}{3}$，

$a_2 = (\frac{1}{3}) \cdot a_1$，……，

$a_n = \frac{1}{3} \cdot a_{n-1} = (\frac{1}{3})^n$。

(2) $a_5 = (\frac{1}{3})^5 = \frac{1}{243}$。

7. 設 a_n 為 4^n 除以 **7** 的餘數，求 a_{99} ．

Ans：1

【詳解】

n=	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
f(n)=	4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262144	1048576	####
餘數	4	2	1	4	2	1	4	2	1	4	

$a_1 = 4$，$a_2 = 2$，$a_3 = 1$，

$a_{3k+1} = 4$，$a_{3k+2} = 2$，$a_{3k} = 1$，

故 $a_{99} = a_3 = 1$。

8. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 的遞迴關係式為 $\begin{cases} a_1 = 1 \\ a_n = 3a_{n-1} + 4\ (n \ge 2) \end{cases}$．使用數學歸納法證明，對於所有的正整數 n， $a_n = 3^n - 2$ ．

【證明】

(1) $a_1 = 1 = 3^1 - 2$ 成立。

(2) 設 $a_k = 3^k - 2$，

則當 $n = k + 1$ 時，

$a_{k+1} = 3 \cdot a_k + 4 = 3(3^k - 2) + 4 = 3^{k+1} - 2$，成立。

故由數學歸納法可知:

對所有的正整數 n， $a_n = 3^n - 2$ 恆成立。

進階題 ▶▶▶

9. 已知數列 $\langle a_n \rangle$ 滿足 $a_1 = \frac{1}{7}$, $a_2 = \frac{3}{7}$ 及 $a_{n+1} = \frac{7}{2} a_n (1 - a_n)$ $(n \ge 1)$，求 $a_{101} - a_{100}$.【92 指乙】

Ans： $\frac{3}{7}$

【詳解】

由 $a_{n+1} = \frac{7}{2} a_n (1 - a_n)$

$\Rightarrow a_3 = \frac{6}{7}$， $a_4 = \frac{3}{7}$， $a_5 = \frac{6}{7}$， …得此數列之規律:

自第二項起，偶數項為 $\frac{3}{7}$， 奇數項為 $\frac{6}{7}$，

所以 $a_{101} - a_{100} = \frac{6}{7} - \frac{3}{7} = \frac{3}{7}$ 。

10. 已知 a_1, a_2, a_3 成等差數列， b_1, b_2, b_3 成等比數列 . 選出正確的選項:

(1) $a_1 < a_2$ 與 $a_2 > a_3$ 可同時成立　　**(2)** $b_1 < b_2$ 與 $b_2 > b_3$ 可同時成立

(3) 若 $a_1 + a_2 < 0$，則 $a_2 + a_3 < 0$　　**(4)** 若 $b_1 b_2 < 0$，則 $b_2 b_3 < 0$

(5) 若 b_1, b_2, b_3 皆為正整數，且 $b_1 < b_2$，則 b_1 整除 b_2 . 【97 學測】

Ans：(2)(4)

【詳解】

(1) 不可能成立。

(2) 公比小於 0。

(3) 例如 $a_1 = -5$，$a_2 = -1$，$a_3 = 3$。

(4) $b_1 b_2 < 0 \Rightarrow$ 公比小於 $0 \Rightarrow b_2 b_3 < 0$。

(5) 例如 $b_1 = 4$，$b_2 = 6$，$b_3 = 9$。

11. **設實數** a_1, a_2, a_3, a_4 **是一個等差數列，且滿足** $0<a_1<2$ **，及** $a_3=4$ **.**

若定義 $b_n=2^{a_n}$ **，則下列哪些選項是正確的?**

(1) b_1, b_2, b_3, b_4 **是一個等比數列，(2)** $b_1<b_2$ **，(3)** $b_2>4$ **，(4)** $b_4>32$ **，**
(5) $b_2\times b_4=256$ **.** **【95 學測】**

Ans：(1)(2)(3)(4)(5)

【詳解】

設<a_n>的公差為 d，則

$a_1=4-2d$，$a_2=4-d$，$a_4=4+d$。

$0<a_1=4-2d<2 \Rightarrow -4<-2d<-2 \Rightarrow 1<d<2$。

$b_1=2^{4-2d}$，$b_2=2^{4-d}$，$b_3=2^4=16$，$b_4=2^{4+d}$。

(1) $\dfrac{b_2}{b1}=\dfrac{b_3}{b_2}=\dfrac{b_4}{b_3}=2^d$，故 b_1，b_2，b_3，b_4 是一個等比數列。

(2) $\dfrac{b_2}{b1}=\dfrac{b_3}{b_2}=\dfrac{b_4}{b_3}=2^d>1$，故 $b_2>b_1$。

(3) $1<d<2 \Rightarrow 2<4-d<3 \Rightarrow 2^2<b_2<2^3 \Rightarrow b_2>4$。

(4) $1<d<2 \Rightarrow 5<4+d<6 \Rightarrow 2^5<b_4<2^6 \Rightarrow b_4>32$。

(5) $b_2\times b_4=2^{4-d}\times 2^{4+d}=2^8=256$。

12. **使用數學歸納法證明：對於所有的正整數** n **，** $2^{8n+1}-2^{4n}$ **的個位數字是 6 .**

【證明】

設 $f(n)=2^{8n+1}-2^{4n}$。

(1) $f(1)=2^9-2^4=512-16=496$，

個位數字為 6。

(2) 設 $f(n)=2^{8n+1}-2^{4n}=10k+6$，則

$f(n+1)=2^{8(n+1)+1}-2^{4(n+1)}$

$=2^{8n+1}\cdot 2^8-2^{4n}\cdot 2^4$

$=2^4\cdot 2^{8n+1}-2^{4n}\cdot 2^4+15\cdot 2^4\cdot 2^{8n+1}$

$=2^4\cdot(2^{8n+1}-2^{4n})+15\times 16\times 2^{8n+1}$

$=16(10k+6)+240\times 2^{8n+1}$

個位數字亦為 6。

故由數學歸納法可知：

對所有的正整數 n，$2^{8n+1}-2^{4n}$ 的個位數字恆為 6。

13. 設數列$\langle a_n \rangle$的遞迴關係式為$\begin{cases} a_1 = \dfrac{1}{3} \\ a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{4n^2-1} \, (n \ge 2) \end{cases}$.

(1) 寫出a_2, a_3 .

(2) 猜測一般項a_n .

(3) 使用數學歸納法證明：你的猜測是正確的 .

Ans：(1) $a_2 = \dfrac{2}{5}$，$a_3 = \dfrac{3}{7}$，(2) $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$

【詳解】

(1) $a_2 = a_1 + \dfrac{1}{4\times 2^2 - 1} = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{15} = \dfrac{6}{15} = \dfrac{2}{5}$。

$a_3 = a_2 + \dfrac{1}{4\times 3^2 - 1} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{1}{35} = \dfrac{15}{35} = \dfrac{3}{7}$。

(2) $a_n = a_{n-1} + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$

$= a_{n-1} + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1})$

$= a_1 + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2\times 2-1} - \dfrac{1}{2\times 2+1} + \dfrac{1}{2\times 3-1} - \dfrac{1}{2\times 3+1}$

$+ \cdots\cdots + \dfrac{1}{2\times n-1} - \dfrac{1}{2\times n+1})$

$= \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2n+1})$

$= \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2(2n+1)}$

$= \dfrac{2n+1-1}{2(2n+1)} = \dfrac{2n}{2(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$。

(3) $a_1 = \dfrac{1}{2\times 1+1} = \dfrac{1}{3}$成立。

令 $a_k = \dfrac{k}{2k+1}$，即 $n = k$ 時成立，則

$a_{k+1} = a_k + \dfrac{1}{4(k+1)^2 - 1}$

$= \dfrac{k}{2k+1} + \dfrac{1}{2(k+1)-1} - \dfrac{1}{2(k+1)+1}$

$= \dfrac{k+1}{2k+1} - \dfrac{1}{(2k+1)(2k+3)}$

$$=\frac{(k+1)(2k+3)-1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{2k^2+5k+2}{(2k+1)(2k+3)}$$

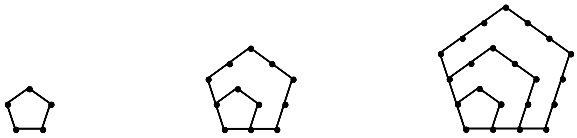
$$=\frac{(k+2)(2k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+2}{2k+3}=\frac{(k+1)+1}{2(k+1)+1}，$$

即 n＝k＋1 時也成立。

故由數學歸納法可知：

對所有的正整數 n，$a_n=\dfrac{n}{2n+1}$ 恆成立。

14. 據說畢達哥拉斯研究過這樣的問題：下圖中的黑點分別落在正五邊形的頂點或邊上，第 1 圖有 5 個黑點，第 2 圖共有 12 個黑點，第 3 圖則有 22 個黑點．設 a_n 為第 n 圖中黑點的總數，即 $a_1=5$，$a_2=12$，$a_3=22$．



第1圖　第2圖　第3圖

(1) 寫出數列 $\langle a_n\rangle$ 的遞迴關係式．

(2) 求 a_5．

Ans：(1) $\begin{cases}a_1=5\\ a_n=a_{n-1}+(3n+1)\ (n\ge 2)\end{cases}$，(2) $a_5=51$

【詳解】

(1) $a_1=5$，

第二層右邊每邊多 2 點，即

$a_2=5+3\times2+1=12$，

第三層右邊每邊多 3 點，即

$a_3=a_2+3\times3+1=12+10=22$，

…………

第 n 層右邊每邊多 n 點，即

$a_n=a_{n-1}+3\times n+1$，

即 $\begin{cases}a_1=5\\ a_n=a_{n-1}+(3n+1)\ (n\ge 2)\end{cases}$。

(2) $a_4=a_3+(3\times4+1)=22+13=35$，

$a_5=a_4+(3\times5+1)=35+16=51$。