

# 數學 1 進階講義

## 根與係數的關係

景美女中 · 林哲安老師



信望愛文教基金會

3/4

@

≡

## 2-3-3 根與係數的關係

### 定理敘述

1. 若  $\alpha$ 、 $\beta$  為實係數一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的兩根，則

(1) 兩根之和： $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

(2) 兩根之積： $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

(3) 以  $\alpha$ 、 $\beta$  為兩根的一元二次方程式為  $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ 。

2. 若  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  為實係數一元三次方程式  $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$  的三根，則

(1)  $\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}$

(2)  $\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}$

(3)  $\alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$ 。

(4) 以  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  為三根的一元三次方程式為  $x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma = 0$ 。

### 關鍵字

實係數方程式

#### 例題 1

已知  $\alpha$ 、 $\beta$  為方程式  $2x^2 + 8x + 1 = 0$  的兩根，試求下列各式的值：

(1)  $\alpha^2 + \beta^2$    (2)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$    (3)  $\alpha^3 + \beta^3$

Ans :

由根與係數關係可知  $\alpha + \beta = -\frac{8}{2} = -4$ ， $\alpha\beta = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ 。

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = 16 - 2\left(\frac{1}{2}\right) = 15$ 。

(2)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{-4}{\frac{1}{2}} = -8$ 。

$$(3) \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2) = (-4)\left(15 - \frac{1}{2}\right) = -58。$$

### 例題 2

阿景、小美二人同時解一個一元二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$ ，阿景看錯一次項係數，解得兩根為  $-3$ 、 $-16$ ，小美看錯常數項，解得兩根為  $4$ 、 $10$ ，請幫助阿景、小美二人，試求此方程式正確的兩根。

Ans :

因為阿景看錯  $b$ ，並沒有看錯  $a$ 、 $c$ ，所以  $(-3) \times (-16) = \frac{c}{a} \Rightarrow c = 48a$ ，

小美看錯  $c$ ，並沒有看錯  $a$ 、 $b$ ，所以  $4 + 10 = -\frac{b}{a} \Rightarrow b = -14a$ ，

即方程式為  $ax^2 - 14ax + 48a = 0 \Rightarrow x^2 - 14x + 48 = 0$

$\Rightarrow (x-6)(x-8) = 0 \Rightarrow x = 6$  或  $x = 8$ 。

### 例題 3

已知  $\alpha$ 、 $\beta$  為方程式  $x^2 + 7x + 4 = 0$  的兩根，試求

(1)  $(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2$  的值。

(2) 以  $\alpha(\beta+1)$ 、 $\beta(\alpha+1)$  為兩根的一元二次方程式。

Ans :

(1) 由根與係數的關係得知  $\begin{cases} \alpha + \beta = -7 \\ \alpha\beta = 4 \end{cases}$ 。

因為判別式  $D = (-7)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4 = 33 > 0$ ， $\alpha\beta = 4 > 0$ ，且  $\alpha + \beta = -6$ ，

所以  $\alpha < 0$  且  $\beta < 0$ 。

$$\Rightarrow (\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = \sqrt{\alpha}^2 + 2\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} + \sqrt{\beta}^2 = \alpha - 2\sqrt{\alpha\beta} + \beta = -7 - 2\sqrt{4} = -11。$$

(2)  $\begin{cases} \alpha(\beta+1) + \beta(\alpha+1) = 2\alpha\beta + \alpha + \beta = 1 \\ [\alpha(\beta+1)] \cdot [\beta(\alpha+1)] = \alpha\beta(\alpha\beta + \alpha + \beta + 1) = -8 \end{cases}$ 。

以  $\alpha(\beta+1)$ 、 $\beta(\alpha+1)$  為兩根的一元二次方程式為  $x^2 - x - 8 = 0$ 。

#### 例題 4

設  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  為三次方程式  $x^3 + 7x^2 - 6x - 1 = 0$  的三個根，試求下列各值：

(1)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}$    (2)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$    (3)  $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma)$

(4)  $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha)$

Ans :

由根與係數關係可知

$$\alpha + \beta + \gamma = -7, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = -6, \quad \alpha\beta\gamma = 1.$$

(1)  $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = \frac{\beta\gamma + \alpha\gamma + \alpha\beta}{\alpha\beta\gamma} = \frac{-6}{1} = -6.$

(2)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - 2(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) = 49 + 12 = 51.$

(3)  $x^3 + 2x^2 - 3x - 1 = (x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma)$

令  $x = 2$  代入得  $(2 - \alpha)(2 - \beta)(2 - \gamma) = 8 + 28 - 12 - 1 = 23.$

(4) 因為  $\alpha + \beta + \gamma = -7$  所以  $(\alpha + \beta)(\beta + \gamma)(\gamma + \alpha) = (7 - \gamma)(7 - \alpha)(7 - \beta)$

令  $x = 7$  代入得  $(7 - \gamma)(7 - \alpha)(7 - \beta) = 7^3 + 2 \cdot 7^2 - 3 \cdot 7 - 1 = 419$

#### 例題 5

設  $k$  為實數，且方程式  $x^3 - 3x^2 - 13x + k = 0$  的三根成等差數列，試求  $k$  之值且此方程式之三根。

Ans :

設三根為  $a - d$ 、 $a$ 、 $a + d$

則  $a - d + a + a + d = 3$ ，得  $a = 1$ 。

又  $(1 - d) \times 1 + (1 + d) \times 1 + (1 - d)(1 + d) = -13$

$\Rightarrow d^2 = 16 \Rightarrow d = \pm 4$ ，所以三根為  $-3, 1, 5$ 。

又三根  $k = (-3) \times 1 \times 5 = -15$ 。

### 例題 6

已知  $\alpha$ 、 $\beta$  為方程式  $x^2 - 4x + 5 = 0$  的兩根，試求  $(\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha + 2)(\beta^3 - 4\beta^2 + 6\beta + 2)$

Ans :

$$\text{已知 } \alpha^2 - 4\alpha + 5 = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 4\alpha^2 + 5\alpha = 0 \Rightarrow \alpha^3 - 4\alpha^2 = -5\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha + 2 = (-5\alpha) + (6\alpha + 2) = \alpha + 2$$

$$\text{同理 } \beta^3 - 4\beta^2 + 6\beta + 2 = \beta + 2$$

$$(\alpha^3 - 4\alpha^2 + 6\alpha + 2)(\beta^3 - 4\beta^2 + 6\beta + 2) = (\alpha + 2)(\beta + 2)$$

$$= \alpha\beta + 2(\alpha + \beta) = 4 + 2 \times 5 = 14$$



### 習題 1

已知  $\alpha$ 、 $\beta$  為方程式  $x^2 + 7x + 4 = 0$  的兩根，試求：

(1)  $\alpha^2 + \beta^2$    (2)  $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta}$    (3)  $(\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})^2$    (4)  $\frac{1}{\alpha^2 + 4} + \frac{1}{\beta^2 + 4}$

### 習題 2

若  $\alpha$ 、 $\beta$  為  $x^2 - 3x + 4 = 0$  的兩根，以  $\frac{\beta-1}{\alpha+3}$ 、 $\frac{\alpha-1}{\beta+3}$  為兩根的方程式  $22x^2 + ax + b = 0$ ，試求  $(a, b)$  的值。

### 習題 3

設  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  為三次方程式  $2x^3 - 6x^2 + x + 2 = 0$  的三個根，試求：

(1)  $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2$

(2)  $(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)$

(3)  $(2\alpha^3 - 6\alpha^2 + 2\alpha + 3)(2\beta^3 - 6\beta^2 + 2\beta + 3)(2\gamma^3 - 6\gamma^2 + 2\gamma + 3)$

### 習題 4

設  $a$ 、 $b$  為整數，若方程式  $x^3 + ax^2 + bx + 11 = 0$  有三個相異的有理根，試求  $a$ 、 $b$  之值。

### 習題 5

已知實係數方程式  $x^3 - 15x^2 + 39x + (c-5) = 0$  的三個根成等差數列，求  $c$  值及此方程式的三個根。

### 習題 6

設  $a$  為實數，令  $\alpha$ 、 $\beta$  為二次方程式  $x^2 + ax + (a-2) = 0$  的兩個根。試問當  $a$  為何值時， $|\alpha - \beta|$  有最小值？

【指考乙 93】

## 習題 7

已知實係數多項式方程式  $x^3 + ax^2 + bx + 8 = 0$  的三根相同，請問  $b$  的值等於下列哪一個選項？

(A) 6 (B) 8 (C) 10 (D) 12 (E) 14。

【指考乙 101】

### 解答與解析

習題 1 : (1) 41 (2)  $\frac{41}{4}$  (3) -3 (4)  $\frac{1}{4}$

習題 2 :  $(a, b) = (-1, 2)$

習題 3 : (1) 8 (2)  $-\frac{1}{2}$  (3)  $\frac{7}{2}$

習題 4 :  $a = -11$ 、 $b = -1$

習題 5 :  $c = 60$ ，三根  $-1$ 、 $5$ 、 $11$

習題 6 : 2

可由根與係數關係知  $\alpha + \beta = -a$ ， $\alpha\beta = a - 2$ ，

而  $|\alpha - \beta|^2 = (\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = (-a)^2 - 4(a - 2) = a^2 - 4a + 8 = (a - 2)^2 + 4$

當  $a = 2$  時， $|\alpha - \beta|$  有最小值  $\sqrt{4} = 2$ 。

習題 7 : (D)

設三根皆為  $\alpha$ ，則  $\alpha^3 = -8$ ，故  $\alpha = -2$ 。

所以  $x^3 + ax^2 + bx + 8 = (x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$ ，

可得  $a = 6$ 、 $b = 12$ ，故選(D)。