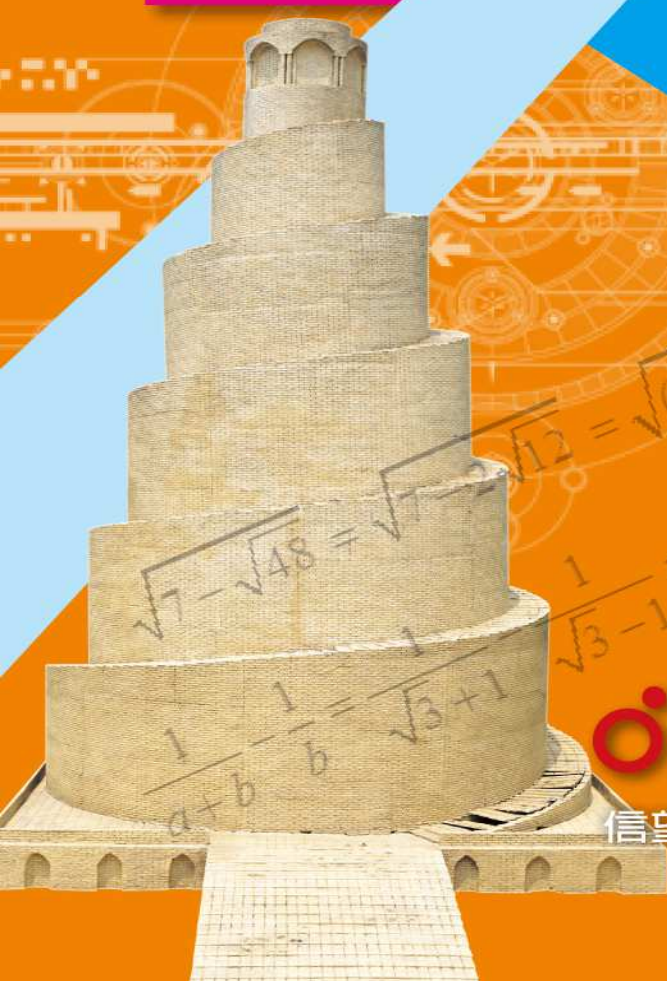


高中數學

進階
講義

指數

陳清海 老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\div$

ok131 指數

一、指數與指數律

1. 正整數指數： $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{n\text{個}}$ ，其中 a 為實數， n 為正整數。

2. 零指數： $a^0 = 1$ ，其中 $a \neq 0$ 。

3. 負整數指數： $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ ，其中 $a \neq 0$ ， n 為正整數。

4. 分數指數：設 $a > 0$ ， n 為正整數， m 為整數。

$$(1) a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a} \quad (2) a^{\frac{m}{n}} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$$

5. 指數律：設 $a > 0$ ， $b > 0$ ， r ， s 是任意實數。

$$(1) a^r \cdot a^s = a^{r+s} \quad (2) \left(a^r\right)^s = a^{rs} \quad (3) a^r \cdot b^r = (ab)^r$$

【範例 1】

求下列各式的值：

$$(1) (\sqrt{5})^3 \times (\sqrt{5})^5, \quad (2) \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 \right)^4, \quad (3) (-\sqrt{8})^6 \times \left(\frac{1}{2} \right)^6.$$

$$\text{Ans : (1) } 625, (2) \frac{1}{729}, (3) 8$$

【詳解】

$$(1) (\sqrt{5})^3 \times (\sqrt{5})^5 = (\sqrt{5})^{3+5} = (\sqrt{5})^8 = 5^4 = 625.$$

$$(2) \left(\left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^3 \right)^4 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{3 \times 4} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^{12} = \frac{1}{(\sqrt{3})^{12}} = \frac{1}{3^6} = \frac{1}{729}.$$

$$(3) (-\sqrt{8})^6 \times \left(\frac{1}{2} \right)^6 = \left((-\sqrt{8}) \times \frac{1}{2} \right)^6 = (-\sqrt{2})^6 = 8.$$

【演練 1】

完成下列的填空：

$$(1) 9^3 \times 3^5 = 3^{\square},$$

$$(2) (-3)^4 \times (-3)^5 = (-27)^{\square},$$

$$(3) 2^{18} = (4^{\square})^3,$$

$$(4) 2^6 \times (-3)^9 = \square^3.$$

$$\text{Ans : (1) } 11, (2) 3, (3) 3, (4) -108$$

【詳解】

$$(1) 9^3 \times 3^5 = 3^6 \times 3^5 = 3^{11}.$$

$$(2) (-3)^4 \times (-3)^5 = (-3)^{4+5} = (-3)^9 = \left((-3)^3 \right)^3 = (-27)^3.$$

$$(3) 2^{18} = (2^6)^3 = (4^3)^3.$$

$$(4) 2^6 \times (-3)^9 = (2^2)^3 \times \left((-3)^3 \right)^3 = (4 \times (-27))^3 = (-108)^3.$$

【範例 2】

求下列各式的值：

(1) $2^{10} \times 2^{-12}$, (2) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^0$,

(3) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-5} \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-5}$, (4) $\frac{(\sqrt{8})^{-2}}{(\sqrt{2})^3}$.

Ans : (1) $\frac{1}{4}$, (2) 1 , (3) 1 , (4) $\frac{\sqrt{2}}{32}$

【詳解】

(1) $2^{10} \times 2^{-12} = 2^{10+(-12)} = 2^{-2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

(2) $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^0 = 1$.

(3) $(\sqrt{3} - \sqrt{2})^{-5} \times (\sqrt{3} + \sqrt{2})^{-5} = [(\sqrt{3} - \sqrt{2})(\sqrt{3} + \sqrt{2})]^{-5} = (3 - 2)^{-5} = 1^{-5} = 1$.

(4) $\frac{(\sqrt{8})^{-2}}{(\sqrt{2})^3} = \left((\sqrt{2})^3\right)^{-2} \times (\sqrt{2})^{-3} = (\sqrt{2})^{(-6)+(-3)}$
 $= (\sqrt{2})^{-9} = \frac{1}{(\sqrt{2})^9} = \frac{1}{16\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{32}$.

【演練 2】

求下列各式的值：

(1) $(3 + \sqrt{2})^2 \times (3 - \sqrt{2})^0$, (2) $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4}$,

(3) $(4 - \sqrt{7})^{-2} \times (4 + \sqrt{7})^{-2}$, (4) $\frac{(-\sqrt{2})^2}{(-\sqrt{2})^{-4}}$.

Ans : (1) $11 + 6\sqrt{2}$, (2) -2 , (3) $\frac{1}{81}$, (4) 8

【詳解】

(1) $(3 + \sqrt{2})^2 \times (3 - \sqrt{2})^0 = (3 + \sqrt{2})^2 \times 1 = 11 + 6\sqrt{2}$.

$$(2) \left(-\frac{1}{2}\right)^3 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{-\frac{1}{2}} = -2.$$

$$(3) (4-\sqrt{7})^{-2} \times (4+\sqrt{7})^{-2} = \left((4-\sqrt{7})(4+\sqrt{7})\right)^{-2} = 9^{-2} = \frac{1}{9^2} = \frac{1}{81}.$$

$$(4) \frac{(-\sqrt{2})^2}{(-\sqrt{2})^{-4}} = (-\sqrt{2})^{2-(-4)} = (-\sqrt{2})^6 = 8.$$

【範例 3】

求下列各式的值：

$$(1) \sqrt[3]{2^7} \times \sqrt[3]{2^{10}}, \quad (2) \frac{3^{1.3} \times 3^{2.4}}{3^{0.3}}, \quad (3) \left(\frac{0.8}{2700}\right)^{-\frac{2}{3}}.$$

Ans : (1) 16 , (2) 81 , (3) 225

【詳解】

$$(1) \sqrt[3]{2^7} \times \sqrt[3]{2^{10}} = 2^{\frac{7}{3}} \times \left(2^{\frac{10}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{7}{3}} \times 2^{\frac{5}{3}} = 2^{\frac{7+5}{3}} = 2^4 = 16.$$

$$(2) \frac{3^{1.3} \times 3^{2.4}}{3^{0.3}} = 3^{1.3} \times 3^{2.4} \times 3^{0.3} = 3^{1.3+2.4+0.3} = 3^4 = 81.$$

$$(3) \left(\frac{0.8}{2700}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{27000}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{8}{30^3}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\left(\frac{2}{30}\right)^3\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(\frac{1}{15}\right)^{-2} = 15^2 = 225.$$

【演練 3】

求下列各式的值：

$$(1) \sqrt[3]{27\sqrt{3}}, \quad (2) \frac{(0.01)^{1.3} \times 10^{0.4}}{100^{-0.1}}, \quad (3) \left(\frac{1.6}{2.5}\right)^{-\frac{3}{2}}.$$

Ans : (1) $\sqrt{3}$, (2) $\frac{1}{100}$, (3) $\frac{125}{64}$

【詳解】

$$(1) \sqrt[7]{27\sqrt{3}} = \left(3^3 \times 3^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{7}} = 3^{\frac{7 \times 1}{2 \times 7}} = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$(2) \frac{(0.01)^{1.3} \times 10^{0.4}}{100^{-0.1}} = \frac{(10^{-2})^{1.3} \times 10^{0.4}}{10^{-0.2}} = 10^{-2.6+0.4-(-0.2)} = 10^{-2} = \frac{1}{100}.$$

$$(3) \left(\frac{1.6}{2.5}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{16}{25}\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\left(\frac{4}{5}\right)^2\right)^{-\frac{3}{2}} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3 = \frac{125}{64}.$$

【範例 4】

求下列各式的值：

$$(1) 9^{\sqrt{2}} \times 3^{3-\sqrt{8}}, \quad (2) \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{12}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}, \quad (3) \frac{8^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{18}}}.$$

Ans : (1) 27 , (2) 5 , (3) 1

【詳解】

$$(1) 9^{\sqrt{2}} \times 3^{3-\sqrt{8}} = 3^{2\sqrt{2}} \times 3^{3-2\sqrt{2}} = 3^3 = 27.$$

$$(2) \left(\left(\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{12}}\right)^{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \left(\sqrt[3]{5}\right)^{\sqrt{12} \times \frac{\sqrt{3}}{2}} = \left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3 = 5.$$

$$(3) \frac{8^{\sqrt{2}}}{2^{\sqrt{18}}} = \frac{(2^3)^{\sqrt{2}}}{2^{3\sqrt{2}}} = \frac{2^{3\sqrt{2}}}{2^{3\sqrt{2}}} = 1.$$

【演練 4】

求下列各式的值：

$$(1) 2^{2-\sqrt{3}} \times 2^{2+\sqrt{3}}, \quad (2) \left(3^{\frac{-1}{\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{12}}, \quad (3) \frac{3^{\sqrt{8}}}{9^{\sqrt{2}}}.$$

Ans : (1) 16 , (2) $\frac{1}{9}$, (3) 1

【詳解】

$$(1) 2^{2-\sqrt{3}} \times 2^{2+\sqrt{3}} = 2^{2-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}} = 2^4 = 16$$

$$(2) \left(3^{\frac{-1}{\sqrt{3}}}\right)^{\sqrt{12}} = 3^{\frac{-1}{\sqrt{3}} \times 2\sqrt{3}} = 3^{-2} = \frac{1}{9}.$$

$$(3) \frac{3^{\sqrt{8}}}{9^{\sqrt{2}}} = \frac{3^{2\sqrt{2}}}{3^{2\sqrt{2}}} = 1.$$

【範例 5】

求下列各式的值：

$$(1) \left(\frac{81}{16}\right)^{-0.25} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot (0.25)^{-2.5} \quad (2) 2^3 \cdot 8^{-2} \cdot \sqrt[4]{32^2 \cdot 4^{-3}}.$$

Ans : (1) 48 , (2) $\frac{1}{4}$

【詳解】

$$\begin{aligned} (1) \left(\frac{81}{16}\right)^{-0.25} \cdot \left(\frac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} \cdot (0.25)^{-2.5} &= \left(\left(\frac{3}{2}\right)^4\right)^{-\frac{1}{4}} \cdot \left(\left(\frac{2}{3}\right)^3\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)^{\frac{5}{2}} \\ &= \left(\frac{3}{2}\right)^{4\left(-\frac{1}{4}\right)} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3\left(\frac{2}{3}\right)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2\left(\frac{5}{2}\right)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{-5} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{4} \cdot 32 = 48. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2) 2^3 \cdot 8^{-2} \cdot \sqrt[4]{32^2 \cdot 4^{-3}} &= 2^3 \cdot (2^3)^{-2} \cdot \sqrt[4]{(2^5)^2 \cdot (2^2)^{-3}} = 2^3 \cdot 2^{-6} \cdot \sqrt[4]{2^{5 \cdot 2 + 2 \cdot (-3)}} \\ &= 2^3 \cdot 2^{-6} \cdot 2^{\frac{4}{4}} = 2^{3-6+1} = 2^{-2} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

【演練 5】

求 $\sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2}}}$ 的值。

Ans : 1

【詳解】

$$\sqrt[5]{\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}} \cdot \sqrt[3]{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt[5]{2}}} \cdot \sqrt{\frac{\sqrt[5]{2}}{\sqrt[3]{2}}} = \left(2^{\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left(2^{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(2^{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= 2^{\left(-\frac{1}{6}\right) \cdot \frac{1}{5}} \cdot 2^{\frac{3}{10} \cdot \frac{1}{3}} \cdot 2^{\left(-\frac{2}{15}\right) \cdot \frac{1}{2}} = 2^{-\frac{1}{30} + \frac{1}{10} - \frac{1}{15}} = 2^0 = 1 \text{ .}$$

二、乘法公式與求值

1. 二次式：

$$(1) (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 .$$

$$(2) a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab .$$

$$(3) a^2 - b^2 = (a-b)(a+b) .$$

2. 三次式：

$$(1) (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 .$$

$$(2) a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2) .$$

$$(3) a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2) .$$

3. 常用關係式：

$$(1) (2^x)^2 = 2^{2x} = (2^2)^x = 4^x .$$

$$(2) (2^x)^3 = 2^{3x} = (2^3)^x = 8^x .$$

【範例 6】

設 $a \neq 0$ ，化簡下列各式：

$$(1) \left[a^{-2} \cdot (a^{-3})^2 \right]^{-1}, \quad (2) (a + a^{-1})^3, \quad (3) (a^2 + a^{-2})(a^2 - a^{-2}).$$

$$\text{Ans : (1) } a^8, (2) a^3 + 3a + 3a^{-1} + a^{-3}, (3) a^4 - a^{-4}$$

【詳解】

$$(1) \left[a^{-2} \cdot (a^{-3})^2 \right]^{-1} = (a^{-2} \cdot a^{-6})^{-1} = (a^{-8})^{-1} = a^{(-8)(-1)} = a^8.$$

$$(2) (a + a^{-1})^3 = a^3 + 3 \cdot a^2 \cdot a^{-1} + 3 \cdot a \cdot a^{-2} + (a^{-1})^3 = a^3 + 3a + 3a^{-1} + a^{-3}.$$

$$(3) (a^2 + a^{-2})(a^2 - a^{-2}) = (a^2)^2 - (a^{-2})^2 = a^4 - a^{-4}.$$

【演練 6】

設 $a \neq 0$ ，化簡下列各式：

$$(1) \left(a^{-2} \times \frac{a^{-3}}{a^{-4}} \right)^{-5}, \quad (2) (a^2 - a^{-1})^3, \quad (3) (a^2 + a^{-2})(a^4 - 1 + a^{-4}).$$

$$\text{Ans : (1) } a^5, (2) a^6 - 3a^4 + 3a^{-2} - a^{-6}, (3) a^6 + a^{-6}$$

【詳解】

$$(1) \left(a^{-2} \times \frac{a^{-3}}{a^{-4}} \right)^{-5} = (a^{-2} \times a^{-3} \times a^4)^{-5} = (a^{-1})^{-5} = a^{(-1)(-5)} = a^5.$$

$$(2) (a^2 - a^{-1})^3 = a^6 - 3 \cdot a^4 \cdot a^{-1} + 3 \cdot a^2 \cdot a^{-2} - (a^{-1})^3 = a^6 - 3a^3 + 3a^{-1} - a^{-3}.$$

$$(3) (a^2 + a^{-2})(a^4 - 1 + a^{-4}) = (a^2 + a^{-2}) \left((a^2)^2 - a^2 \cdot a^{-2} + (a^{-2})^2 \right) \\ = (a^2)^3 + (a^{-2})^3 = a^6 + a^{-6}.$$

【範例 7】

已知 $a > 0$ ，且 $a + a^{-1} = 3$ ，求下列各式的值：

$$(1) a^3 + a^{-3}, \quad (2) a - a^{-1}.$$

$$\text{Ans : (1) } 18, (2) \pm\sqrt{5}$$

【詳解】

(1) 將 $a+a^{-1}=3$ 兩邊立方，得

$$a^3+3\cdot a^2\cdot a^{-1}+3\cdot a\cdot a^{-2}+a^{-3}=27,$$

$$\text{整理得 } a^3+a^{-3}+3(a+a^{-1})=27,$$

$$\text{即 } a^3+a^{-3}=27-3\times 3=18.$$

(2) 因為 $(a-a^{-1})^2=(a+a^{-1})^2-4=3^2-4=5,$

$$\text{所以 } a-a^{-1}=\pm\sqrt{5}.$$

【演練 7】

已知 $a>0$ ，且 $\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}=2$ ，求下列各式的值：

(1) $a+a^{-1}$ ， (2) a^2+a^{-2} ， (3) $a-a^{-1}$.

Ans : (1) 6 , (2) 34 , (3) $4\sqrt{2}$

【詳解】

$$(1) \quad a+a^{-1}=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+2=2^2+2=6.$$

$$(2) \quad a^2+a^{-2}=(a+a^{-1})^2-2=6^2-2=34.$$

(3) 因為 $a>0$ ，且 $\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+4=2^2+4=8$ ，所以

$$\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}=\sqrt{8}. \text{ 又 } a-a^{-1}=\left(\sqrt{a}-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)=2\times\sqrt{8}=4\sqrt{2}.$$

【範例 8】

已知 $4^x=3$ ，求下列各式的值：

(1) 2^{x-1} ， (2) $\frac{27}{8^x}$.

Ans : (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (2) $3\sqrt{3}$

【詳解】

因為 $4^x = (2^x)^2 = 3$ ，又 $2^x > 0$ ，所以 $2^x = \sqrt{3}$ 。

$$(1) \quad 2^{x-1} = \frac{2^x}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$(2) \quad \frac{27}{8^x} = \frac{27}{(2^x)^3} = \frac{27}{(\sqrt{3})^3} = \frac{27}{3\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}.$$

【演練 8】

已知 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = 5$ ，求下列各式的值：

$$(1) \quad 9^{x-2}, \quad (2) \quad 25 \times 3^{3x}.$$

Ans : (1) $\frac{1}{405}$, (2) $\sqrt{5}$

【詳解】

因為 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2x} = (3^{-x})^2 = 5$ ，又 $3^{-x} > 0$ ，

所以 $3^{-x} = \sqrt{5}$ ，即 $3^x = \frac{1}{\sqrt{5}}$ 。

$$(1) \quad 9^{x-2} = 9^x \times 9^{-2} = (3^x)^2 \times \frac{1}{9^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 \times \frac{1}{81} = \frac{1}{405}.$$

$$(2) \quad 25 \times 3^{3x} = 25 \times (3^x)^3 = 25 \times \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^3 = \sqrt{5}.$$

【範例 9】

已知 $a^{2x} = \sqrt{3+\sqrt{8}}$ ，求 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$ 的值。

Ans : $3+\sqrt{2}$

【詳解】

將 $a^{2x} = \sqrt{3+\sqrt{8}}$ 改寫為 $a^{2x} = \sqrt{3+2\sqrt{2}} = \sqrt{(\sqrt{2}+1)^2} = \sqrt{2}+1$ ，

因此， $a^{4x} = (\sqrt{2}+1)^2 = 3+2\sqrt{2}$ ， $a^{-2x} = \frac{1}{\sqrt{2}+1} = \sqrt{2}-1$ 。

再將 $\frac{a^{3x}+a^{-3x}}{a^x-a^{-x}}$ 上下同乘以 a^x 得到

$$\frac{a^{3x} \cdot a^x + a^{-3x} \cdot a^x}{a^x \cdot a^x - a^{-x} \cdot a^x} = \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} - 1}, \text{ 故}$$

$$\begin{aligned} \frac{a^{3x} + a^{-3x}}{a^x - a^{-x}} &= \frac{a^{4x} + a^{-2x}}{a^{2x} - 1} \\ &= \frac{(3+2\sqrt{2}) + (\sqrt{2}-1)}{(\sqrt{2}+1)-1} = \frac{3\sqrt{2}+2}{\sqrt{2}} = 3+\sqrt{2}. \end{aligned}$$

【演練 9】

已知 $a = \frac{1}{2} \left(7^{\frac{1}{5}} + 7^{-\frac{1}{5}} \right)$, 求 $(a + \sqrt{a^2 - 1})^5$ 的值.

Ans : 7

【詳解】

先計算

$$\begin{aligned} a^2 - 1 &= \frac{1}{4} \left(7^{\frac{1}{5}} + 7^{-\frac{1}{5}} \right)^2 - 1 = \frac{1}{4} \left(7^{\frac{2}{5}} + 2 + 7^{-\frac{2}{5}} \right) - 1 = \frac{1}{4} \left(7^{\frac{2}{5}} - 2 + 7^{-\frac{2}{5}} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} \left(7^{\frac{1}{5}} - 7^{-\frac{1}{5}} \right) \right)^2, \end{aligned}$$

$$\text{因此, } a + \sqrt{a^2 - 1} = \frac{1}{2} \left(7^{\frac{1}{5}} + 7^{-\frac{1}{5}} \right) + \frac{1}{2} \left(7^{\frac{1}{5}} - 7^{-\frac{1}{5}} \right) = 7^{\frac{1}{5}}$$

(因為 $7^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{7} > 1 > 7^{-\frac{1}{5}}$).

$$\text{故 } (a + \sqrt{a^2 - 1})^5 = \left(7^{\frac{1}{5}} \right)^5 = 7^{\frac{1}{5} \cdot 5} = 7.$$

【範例 10】

地震規模的大小通常用芮氏等級表示。已知芮氏等級每增加1級，地震震幅強度約增加為原來的10倍，能量釋放強度則約為原來的32倍。現假設有兩次地震，所釋放的能量相差1000000倍，則依上述性質，兩地震震幅強度約相差幾倍？請選出最接近的答案。

(1) 10倍，(2) 100倍，(3) 1000倍，(4) 10000倍，(5) 100000倍。

Ans：(4)

【詳解】

因為 $32^2 = (2^5)^2 \approx 10^3$ ，所以 $1000000 \approx 32^4$ ，即兩次地震差4級。

又強度約增加為原來的10倍時，能量釋放強度則約為原來的32倍，因此震幅強度約相差 $10^4 = 10000$ 倍。

故正確選項為(4)。

【演練 10】

已知池塘中的布袋蓮現在的面積為20平方公尺，設布袋蓮的面積每3個月均蔓延成原來的 k 倍。

(1) 經過1個月之後，布袋蓮的面積為多少平方公尺？（以 k 表示）

(2) 若4個月之後布袋蓮的面積為80平方公尺。

則6個月後它蔓延的範圍為何？

Ans：(1) $20k^{\frac{1}{3}}$ ，(2) 160

【詳解】

(1) 設布袋蓮的面積每經過1個月均蔓延成原來的 r 倍。

因為每3個月布袋蓮均蔓延成原來的 k 倍，

所以 $r^3 = k$ ，即 $r = k^{\frac{1}{3}}$ 。得面積為 $20k^{\frac{1}{3}}$ 平方公尺。

(2) 依題意， $20 \cdot r^4 = 80$ ，即 $r^4 = 4$ ，解得 $r = \sqrt{2}$ 。

因此6個月後布袋蓮蔓延的面積為 $20 \cdot r^6$ 平方公尺，計算

$$20 \cdot r^6 = 20 \cdot (\sqrt{2})^6 = 160,$$

得面積為160平方公尺。

ok131ex

一、基礎題

1. 選出正確的選項：

(1) $(\sqrt{2})^2 = 2$, (2) $(\sqrt{2})^{-1} = -\sqrt{2}$, (3) $1 - (\sqrt{2})^0 = 1$,

(4) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = \sqrt[4]{2}$, (5) $(\sqrt{3})^3 = (3)^{\sqrt{3}}$.

Ans : (1)(4)

【詳解】

(1) $(\sqrt{2})^2 = 2$,

(2) $(\sqrt{2})^{-1} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

(3) $1 - (\sqrt{2})^0 = 1 - 1 = 0$,

(4) $(\sqrt{2})^{\frac{1}{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2}$,

(5) $(\sqrt{3})^3 = (3^{\frac{1}{2}})^3 = 3^{\frac{3}{2}}$.

2. 求下列各式的值：

(1) $125^{\frac{3}{2}}$, (2) $27^3 \times 3^{-8}$, (3) $\left((\sqrt{5})^{\frac{1}{4}} \right)^{-12}$, (4) $(3 - \sqrt{5})^{\frac{3}{2}} (3 + \sqrt{5})^{\frac{3}{2}}$,

(5) $64^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{1}{32} \right)^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{4}}$.

Ans : (1) $5^{\frac{9}{2}}$, (2) 3 , (3) $\frac{\sqrt{5}}{25}$, (4) 8 , (5) 8

【詳解】

(1) $125^{\frac{3}{2}} = (5^3)^{\frac{3}{2}} = 5^{\frac{9}{2}}$,

$$(2) \quad 27^3 \times 3^{-8} = (3^3)^3 \times 3^{-8} = 3^9 \times 3^{-8} = 3,$$

$$(3) \quad \left(\left(\sqrt{5} \right)^{\frac{1}{4}} \right)^{-12} = (\sqrt{5})^{-3} = \frac{1}{(\sqrt{5})^3} = \frac{1}{5\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{25},$$

$$(4) \quad (3-\sqrt{5})^{\frac{3}{2}} (3+\sqrt{5})^{\frac{3}{2}} \\ = [(3-\sqrt{5})(3+\sqrt{5})]^{\frac{3}{2}} = [9-5]^{\frac{3}{2}} = (2^2)^{\frac{3}{2}} = 2^3 = 8,$$

$$(5) \quad 64^{\frac{2}{3}} \times \left(\frac{1}{32} \right)^{\frac{1}{3}} \div \sqrt[3]{\frac{1}{4}} \\ = (2^6)^{\frac{2}{3}} \times (2^{-5})^{\frac{1}{3}} \times (2^2)^{\frac{1}{3}} = 2^4 \times 2^{-\frac{5}{3}} \times 2^{\frac{2}{3}} = 2^3 = 8.$$

3. 已知 $2^x = 3$, 求 $\frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}}$ 的值.

Ans : $\frac{73}{9}$

【詳解】

$$\frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{3^3 + \frac{1}{3^3}}{3 + \frac{1}{3}} = \frac{3^6 + 1}{3^3} \times \frac{3}{9+1} = \frac{3^6 + 1}{90} = \frac{73}{9}.$$

【另解】

$$\frac{2^{3x} + 2^{-3x}}{2^x + 2^{-x}} = \frac{(2^x + 2^{-x})(2^{2x} - 1 + 2^{-2x})}{2^x + 2^{-x}} = 3^2 - 1 + \frac{1}{3^2} = \frac{73}{9}.$$

4. 已知 $a > 0$, $a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{-1}{2}} = 3$, 求:

(1) $a + a^{-1}$, (2) $a^{\frac{3}{2}} + a^{\frac{-3}{2}}$.

Ans : (1) 7, (2) 18

【詳解】

$$(1) \quad a + a^{-1} = (a^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{-1}{2}})^2 - 2a^{\frac{1}{2}} \times a^{\frac{-1}{2}} = 3^2 - 2 = 7.$$

$$(2) \quad a^{\frac{3}{2}} + a^{-\frac{3}{2}} = (a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}})^3 - 3(a^{\frac{1}{2}} + a^{-\frac{1}{2}}) = 3^3 - 3 \times 3 = 18 \circ$$

5. 已知 $a = (0.25)^{2.5}$ ，選出正確的選項：

(1) $-1 < a < 0$ ，(2) $0 < a < 0.5$ ，(3) $0.5 \leq a < 1$ ，(4) $1 \leq a$ 。

Ans : (2)

【詳解】

$$a = 0.03125 \circ$$

6. 已知 $67^x = 27$ ， $603^y = 81$ ，求 $\frac{3}{x} - \frac{4}{y}$ 的值。

Ans : -2

【詳解】

$$67^x = 27 = 3^3 \Rightarrow 67 = 3^{\frac{3}{x}} \dots\dots(1)$$

$$603^y = 81 = 3^4 \Rightarrow 603 = 3^{\frac{4}{y}} \dots\dots(2)$$

$$(1) \div (2) \Rightarrow \frac{67}{603} = \frac{3^{\frac{3}{x}}}{3^{\frac{4}{y}}} = 3^{\frac{3}{x} - \frac{4}{y}} = \frac{1}{9} \Rightarrow \frac{3}{x} - \frac{4}{y} = -2 \circ$$

二、進階題

7. 已知 $a^{2x} = \sqrt{2} - 1$ ，求 $\frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}}$ 的值。

Ans : $\sqrt{2} - 3$

【詳解】

$$\begin{aligned} & \frac{a^{3x} - a^{-3x}}{a^x + a^{-x}} \\ &= \frac{a^{4x} - a^{-2x}}{a^{2x} + 1} = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2 - \frac{1}{\sqrt{2} - 1}}{\sqrt{2} - 1 + 1} = \frac{3 - 2\sqrt{2} - (\sqrt{2} + 1)}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$= \frac{2-3\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}-3。$$

7. 設 $abc \neq 0$ ，且 $2^a = 3^b = 5^c = k$ ，若 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 2$ ，則 k 的值為何？

Ans : $\sqrt{30}$

【詳解】

$$2^a = 3^b = 5^c = k$$

$$\Rightarrow 2 = k^{\frac{1}{a}}, 3 = k^{\frac{1}{b}}, 5 = k^{\frac{1}{c}}, \text{三式相乘}$$

$$\Rightarrow 30 = k^{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} = k^2$$

$$\Rightarrow k = \sqrt{30}。$$

8. 設 $f(x) = a + bx^n$ ，其中 a, b 為實數， n 為正整數。若

$$f(2) = 17, f(4) = 77, f(8) = 377, \text{則 } a, b \text{ 的值為何？}$$

Ans : $a=2, b=3$

【詳解】

$$f(2) = a + b \cdot 2^n = 17 \dots\dots\dots(1),$$

$$f(4) = a + b \cdot 4^n = 77 \dots\dots\dots(2),$$

$$f(8) = a + b \cdot 8^n = 377 \dots\dots\dots(3),$$

$$(2) - (1) \Rightarrow b(4^n - 2^n) = 60 \Rightarrow b \cdot 2^n(2^n - 1) = 60 \dots\dots(4)$$

$$(3) - (2) \Rightarrow b(8^n - 4^n) = 300 \Rightarrow b \cdot 4^n(2^n - 1) = 300 \dots(5)$$

$$(5) \div (4) \Rightarrow 2^n = 5,$$

$$\text{代入}(4) \Rightarrow b \times 5(5 - 1) = 60 \Rightarrow b = 3,$$

$$\text{代入}(1) \Rightarrow a + 3 \times 5 = 17 \Rightarrow a = 2。$$

9. 已知在某項新實驗中，細菌數目1日後增加 k 倍（即增加為 $k+1$ 倍），且3日後細菌數為 2000，5日後細菌數為 32000。

(1) 求常數 k 的值。

(2) 若 n 日後細菌數為 128000，則 n 的值為何？

Ans : (1) $k=3$, (2) $n=6$

【詳解】

設 n 日後的細菌數為 $f(n) = a \times (k+1)^n$ ，

$$f(3) = a \times (k+1)^3 = 2000 \cdots \cdots (A)，$$

$$f(5) = a \times (k+1)^5 = 32000 \cdots \cdots (B)，$$

$$(1) (B) \div (A) \Rightarrow (k+1)^2 = 16 \Rightarrow k+1 = 4 \Rightarrow k = 3。$$

$$(2) f(n) = a \times 4^n = 128000 \cdots \cdots (D)，而 a \times 4^5 = 32000 \cdots \cdots (E)$$

$$(E) \div (D) \Rightarrow 4^{n-5} = 4 \Rightarrow n-5 = 1 \Rightarrow n = 6。$$

10. 小明身體不舒服需依照醫生指示服藥。假設在服藥後 t 小時，

殘存在胃裡的藥量尚有 $M(t) = 450(0.64)^t$ 毫克，則

(1) 經過 1.5 小時後藥量殘存為多少毫克？

(2) 自 t 小時到 $t+1$ 小時內吸收的藥量，
與第 t 小時殘存藥量的比值為何？

Ans：(1) 230.4 毫克，(2) 0.36

【詳解】

$$(1) M(1.5) = 450(0.64)^{1.5}$$

$$= 450(0.8)^3 = 450 \times 0.512 = 230.4。$$

(2) 殘存量為 0.64，故吸收量為 0.36。

11. 心理學家常用數學模式 $L(t) = a(1 - 10^{-bt})$ 來描述學生經過 t 星期學習

之後所得到的學習量（或成果），這裡的常數 a 與 b 跟學生及學習的科目相關。如果小華一星期可以背熟 75 個單字，兩星期可以背熟 135 個單字，那麼請利用這個數學模式，推算小華三星期可以背熟多少個生字？

Ans：183 個

【詳解】

$$L(t) = a(1 - 10^{-bt})，$$

$$L(1) = a(1 - 10^{-b}) = 75 \cdots \cdots (1)$$

$$L(2) = a(1 - 10^{-2b}) = 135 \cdots \cdots (2)，$$

$$(2) \div (1) \Rightarrow \frac{a(1 - 10^{-b})(1 + 10^{-b})}{a(1 - 10^{-b})} = \frac{135}{75}$$

$$\Rightarrow 1 + 10^{-b} = \frac{9}{5} \Rightarrow 10^{-b} = \frac{4}{5} ,$$

$$\text{代入(1)} \Rightarrow a(1 - \frac{4}{5}) = 75 \Rightarrow a = 75 \times 5 = 375 \circ$$

$$L(3) = a(1 - 10^{-3b}) = 375 \times (1 - (\frac{4}{5})^3) = 3(5^3 \times 4^3) = 3 \times 61 = 183 \circ$$