

高中數學

進階
講義

一維數據分析

陳清海 老師



信望愛文教基金會

lt99ok241 一維數據分析

主題一代表數據的數

統計經常以一簡單的數量來代表整個母體的某一特性，以作為衡量的標準。常用的代表數有眾數、中位數、算術平均數與幾何平均數。

1. 眾數：是指一群數據中出現次數最高的數。
2. 中位數：將一組數據由小到大排列如下： $x_1 \leq x_2 \leq \cdots \leq x_n$ ，
 - (1) 當 n 為奇數時，令 $k = \frac{n+1}{2}$ ，中位數為 x_k 。
 - (2) 當 n 為偶數時，令 $k = \frac{n}{2}$ ，中位數為 $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ 。
3. 算術平均數：
 - (1) 設 n 個數據為 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ ，則算術平均數（簡稱平均數）

$$\mu = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k .$$
 - (2) 已分組數據以組中點代表該組數據。
4. 幾何平均數：當 n 個數據為 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 時，

其幾何平均數 G 為 $G = \sqrt[n]{x_1 \cdot x_2 \cdots x_n}$ 。

平均成長率：當 n 年的成長率分別為 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 時，

其平均成長率 x 為 $x = \sqrt[n]{(1+r_1)(1+r_2)\cdots(1+r_n)} - 1$ 。

【例題 1】【配合課本例 1、例 2】

求數值 3, 2, 3, 7, 5, 3, 6, 4, 1, 3, 6, 8 的眾數與中位數。

Ans：眾數 3，中位數 3.5

【詳解】

將 12 個數據由小到大排列：1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 8,
因為出現最多次的數是 3，眾數為 3。

中位數是第 6 與第 7 的平均，為 $\frac{3+4}{2}=3.5$ 。

序號	數值	
9	1	1
2	2	1
1	3	
3	3	
6	3	
10	3	4
8	4	1
5	5	1
7	6	
11	6	2
4	7	1
12	8	1

【類題 1】

某班參加英文能力檢定的成績（級分）如下，求眾數與中位數。

級分	3	4	5	6	7	8	9
人數	1	6	5	4	8	2	1

Ans：眾數 7，中位數 6

【詳解】

因為出現最多次的數是 7，共出現 8 次，所以眾數為 7（級分）。
全班 27 人，中位數在第 14 位，所以中位數為 6。

級分	人數	累積
3	1	1
4	6	7
5	5	12
6	4	16
7	8	24
8	2	26
9	1	27

【例題 2】 **【配合課本例 3】**

(1) 求 1, 2, 3, 4, 5, 5, 7, 7, 7, 9 十個數據的算術平均數。

(2) 擲一般子 100 次，將其結果記錄如下表，求此資料的算術平均數。

點數	1	2	3	4	5	6
次數	10	25	20	20	10	15

Ans : (1) 5 , (2) 3.4

【詳解】

$$(1) \quad \mu = \frac{1}{10}(1+2+3+4+5+5+7+7+7+9) = 5 .$$

(2) 因為 1, 2, 3, 4, 5, 點分別出現 10, 25, 20, 20, 10, 15 次，所以算術平均數為

$$\mu = \frac{1 \times 10 + 2 \times 25 + 3 \times 20 + 4 \times 20 + 5 \times 10 + 6 \times 15}{100} = \frac{340}{100} = 3.4 .$$

數值	點數	次數	
1	1	10	10
2	2	25	50
3	3	20	60
4	4	20	80
5	5	10	50
5	6	15	90
7		100	340
7			3.4
7			
9			
5			

【類題 2】

某班抽樣 10 位同學的英文成績依次為

32, 58, 86, 34, 62, 78, 91, 69, 63, 77 (分)，求算術平均數。

Ans : 65

【詳解】

$$\mu = \frac{32+34+58+62+63+69+77+78+86+91}{10} = 65 .$$

成績 32 58 86 34 62 78 91 69 63 77 65

【例題 3】 【配合課本例 4】

某班段考成績如下，求算術平均數。

分數	30 ~ 40	40 ~ 50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80	80 ~ 90	90 ~ 100	合計
人數	5	7	6	7	10	10	5	50

Ans : 67

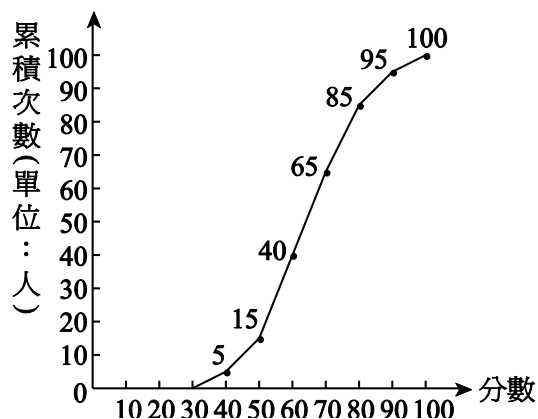
【詳解】

$$\mu = \frac{1}{50}(35 \times 5 + 45 \times 7 + 55 \times 6 + 65 \times 7 + 75 \times 10 + 85 \times 10 + 95 \times 5) = 67.$$

分數	30~40	40~50	50~60	60~70	70~80	80~90	90~100	合計
人數	5	7	6	7	10	10	5	50
組中點	35	45	55	65	75	85	95	
	175	315	330	455	750	850	475	3350 67

【類題 3】

如圖是高二學生 100 人數學考試成績的累積次數分配曲線圖。假設各組內的次數都平均分布在組距內，求算術平均數。



Ans : 64.5

【詳解】

將累積次數分配曲線圖中，
各組的人數列表如下：

分數	30~40	40~50	50~60	60~70	70~80	80~90	90~100	
組中點	35	45	55	65	75	85	95	
人數	5	10	25	25	20	10	5	100
	175	450	1375	1625	1500	850	475	6450 64.5

算術平均數為

$$\frac{35 \times 5 + 45 \times 10 + 55 \times 25 + 65 \times 25 + 75 \times 20 + 85 \times 10 + 95 \times 5}{100}$$

$$= \frac{6450}{100} = 64.5 \text{ (分)}.$$

【例題 4】 【配合課本例 6】

某公司統計其產品 4 年來的銷售量成長率分別為 10%，21%，21%，33.1%，求這 4 年銷售量的平均成長率。

Ans : 21%

【詳解】

若平均成長率為 x ，則有

$$(1+x)^4 = (1+10\%)(1+21\%)(1+21\%)(1+33.1\%) ,$$

整理可得

$$x = \sqrt[4]{(1+10\%)(1+21\%)(1+21\%)(1+33.1\%)} - 1$$

$$= \sqrt[4]{1.1 \times 1.21 \times 1.21 \times 1.331} - 1 = 0.21 ,$$

即這 4 年的平均成長率為 21%。

$$1.1 \quad 1.21 \quad 1.21 \quad 1.331 \quad 1.21$$

【類題 4】

已知股票每天最大漲跌幅為前一日的 $\pm 7\%$ ，某股票漲停 2 天又跌停 2 天，求此股票 4 天的平均漲跌幅。

Ans : -0.25%

【詳解】

若平均漲跌幅為 x ，則有

$$(1+x)^4 = (1+7\%)(1+7\%)(1-7\%)(1-7\%) ,$$

$$\text{整理可得 } x = \sqrt[4]{1.07 \times 1.07 \times 0.93 \times 0.93} - 1 \approx -0.0025 ,$$

即這 4 天的平均漲跌幅為 -0.25%。

$$1.07 \quad 1.07 \quad 0.93 \quad 0.93 \quad 0.997547$$

主題二、表示數據離散趨勢的數

用來量測資料分散程度的數，稱為離差。常用的有：全距、四分位距及標準差。

1. 全距：是一群數據中，最大數與最小數的差。

若為已分組數據，則為最大一組的上限與最小一組的下限之差。

2. 四分位距（ IQR ）：是第 3 四分位數 Q_3 與第 1 四分位數 Q_1 的差，即

$$IQR = Q_3 - Q_1 .$$

計算四分位數的步驟如下：第 i 四分位數（ Q_i ）。

- (1) 將 n 個數據從小到大排列。

- (2) 計算 $k_i = \frac{i}{4} \times n$, $i=1, 2, 3$ 。

① 若 k_i 不是整數，則四分位數 Q_i 為比 k_i 大的下一個整數位置所對應的數值。

② 若 k_i 是整數，則四分位數 Q_i 為第 k_i 個位置和第 $k_i + 1$ 個位置所對應之數值的平均。

3. 標準差：設 n 個數據為 $x_1, x_2, \dots, x_n$ ，其算術平均數為 μ ，變異數 σ^2 為所有離均差平方的平均，即

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 .$$

標準差 σ 為變異數的正平方根，即

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \mu^2} .$$

【例題 5】【配合課本例 7、例 8】

某班參加英文能力檢定的成績（級分）如下，求全距與四分位距。

級分	3	4	5	6	7	8	9
人數	1	6	5	4	8	2	1

Ans：全距 6，四分位距 3

【詳解】

全距 $= 9 - 3 = 6$,

計算 27 人的四分位距：

計算 Q_1 ：因為 $k_1 = \frac{1}{4} \times 27 = 6.75$ 非整數，

所以 Q_1 是第 7 個數，即 $Q_1 = 4$ 。

計算 Q_3 ：因為 $k_3 = \frac{3}{4} \times 27 = 20.25$ 非整數，

所以 Q_3 是第 21 個數，即 $Q_3 = 7$ 。

故四分位距 IQR 為 $IQR = Q_3 - Q_1 = 7 - 4 = 3$ 。

【類題 5】

求數值 3, 2, 3, 7, 5, 3, 6, 4, 1, 3, 7, 8 的全距與四分位距。

Ans：全距 7，四分位距 3.5

【詳解】

將 12 個數據由小到大排列：

1, 2, 3, 3, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 7, 8,

全距 $= 8 - 1 = 7$,

計算 Q_1 ：因為 $k_1 = \frac{1}{4} \times 12 = 3$ 是整數，

所以 Q_1 是第 3 個數和第 4 個數的平均，

即 $Q_1 = \frac{3+3}{2} = 3$ 。

計算 Q_3 ：因為 $k_3 = \frac{3}{4} \times 12 = 9$ 是整數，

所以 Q_3 是第 9 個數和第 10 個數的平均，

即 $Q_3 = \frac{6+7}{2} = 6.5$ 。

故四分位距 IQR 為

$IQR = Q_3 - Q_1 = 6.5 - 3 = 3.5$ 。

【例題 6】【配合課本例 9】

求下列 5 個數據的算術平均數、變異數和標準差。

1, 2, 3, 4, 5。

Ans：算術平均數 3，變異數 2，標準差 $\sqrt{2}$

【詳解】

$$\text{平均數 } \mu = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3,$$

$$\text{變異數 } \sigma^2 = \frac{(1-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (5-3)^2}{5} = 2,$$

$$\text{標準差 } \sigma = \sqrt{2}.$$

數值	離均差			算術平均數	變異數	標準差
1	-2	4		3	2	1.414214
2	-1	1				
3	0	0				
4	1	1				
5	2	4				
		10				

【類題 6】

求數據 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 的算術平均數、變異數和標準差。

Ans：算術平均數 5，變異數 $\frac{20}{3}$ ，標準差 $\frac{2\sqrt{15}}{3}$

【詳解】

$$\text{平均數 } \mu = \frac{1+2+\cdots+9}{9} = \frac{45}{9} = 5,$$

離均差分別為 -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4,

$$\text{變異數 } \sigma^2 = \frac{16+9+4+1+0+1+4+9+16}{9} = \frac{60}{9} = \frac{20}{3},$$

$$\text{標準差 } \sigma = \sqrt{\frac{20}{3}} = \frac{2\sqrt{15}}{3}.$$

數值	離均差	算術平均數	變異數	標準差	
1	-4	16	5	6.666667	2.581989
2	-3	9			
3	-2	4			
4	-1	1			
5	0	0			
6	1	1			
7	2	4			
8	3	9			
9	4	16			
	0	60			

【例題 7】【配合課本例 10】

某班 50 人的數學成績，整理如下表：

分數	30 ~ 40	40 ~ 50	50 ~ 60	60 ~ 70	70 ~ 80
人數	5	10	10	20	5

(1) 求算術平均數

(2) 設標準差為 $\sqrt{k}$ ，求 k 的值。

Ans : (1) 57 , (2) $\sqrt{136}$

【詳解】

(1) 這 50 個數的平均為

$$\bar{x} = \frac{35 \times 5 + 45 \times 10 + 55 \times 10 + 65 \times 20 + 75 \times 5}{50} = \frac{2850}{50} = 57 .$$

(2)

組中點 x_i	次數	(離均差) ²
35	5	$(35-57)^2 = 484$
45	10	$(45-57)^2 = 144$
55	10	$(55-57)^2 = 4$
65	20	$(65-57)^2 = 64$
75	5	$(75-57)^2 = 324$

得標準差為

$$\begin{aligned}
 S &= \sqrt{\frac{1}{50}(484 \times 5 + 144 \times 10 + 4 \times 10 + 64 \times 20 + 324 \times 5)} \\
 &= \sqrt{\frac{6800}{50}} = \sqrt{136} , \text{ 因此, } k = 136 .
 \end{aligned}$$

分數	30~40	40~50	50~60	60~70	70~80	
人數	5	10	10	20	5	50
組中點	35	45	55	65	75	
	175	450	550	1300	375	###
離均差	-22	-12	-2	8	18	
	2420	1440	40	1280	1620	###
算術平均	變異數					
	57					136

【類題 7】

下表為某公司 40 名員工的薪資（萬元）次數分配表，求薪資的算術平均數和標準差。

數值	0 ~ 2	2 ~ 4	4 ~ 6	6 ~ 8
次數	7	14	11	8

Ans：算術平均數 4，標準差 2

【詳解】

這 40 個數的平均為

$$\bar{x} = \frac{1 \times 7 + 3 \times 14 + 5 \times 11 + 7 \times 8}{40} = \frac{160}{40} = 4.$$

組中點 x_i	次數	(離均差) ²
1	7	$(1-4)^2 = 9$
3	14	$(3-4)^2 = 1$
5	11	$(5-4)^2 = 1$
7	8	$(7-4)^2 = 9$

得標準差為

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{40}(9 \times 7 + 1 \times 14 + 1 \times 11 + 9 \times 8)} = \sqrt{\frac{160}{40}} = 2.$$

【例題 8】【配合課本例 11】

求數據 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 的算術平均數和標準差。

Ans：算術平均數 4.5，標準差 $\frac{\sqrt{21}}{2}$

【詳解】

$$\text{平均數 } \mu = \frac{1+2+\cdots+8}{8} = \frac{36}{8} = \frac{9}{2},$$

$$\text{又 8 數的平方和為 } \sum_{i=1}^8 x_i^2 = 1^2 + 2^2 + \cdots + 8^2 = 204,$$

故標準差為 $\sigma = \sqrt{\frac{204}{8} - \left(\frac{9}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{21}{4}} = \frac{\sqrt{21}}{2}$.

數值	平方	算術平均數	變異數	標準差
1	1	4.5	5.25	2.29129
2	4			
3	9			
4	16			
5	25			
6	36			
7	49			
8	64			
	204			

【類題 8】

求數據 2, 4, 6, 8, 9 的算術平均數和標準差 .

Ans : 算術平均數 $\frac{29}{5}$, 標準差 $\frac{2\sqrt{41}}{5}$

【詳解】

平均數 $\mu = \frac{2 + 4 + 6 + 8 + 9}{5} = \frac{29}{5}$,

又 5 數的平方和為 $\sum_{i=1}^5 x_i^2 = 2^2 + 4^2 + 6^2 + 8^2 + 9^2 = 201$,

故標準差為 $\sigma = \sqrt{\frac{201}{5} - \left(\frac{29}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{164}{25}} = \frac{2\sqrt{41}}{5}$.

【例題 9】【綜合題】

求下表 16 個數據的全距、四分位距及標準差 .

數據	1	3	5	7
次數	7	3	5	1

Ans : 全距 6 , 四分位距 4 , 標準差 2

【詳解】

全距： $7 - 1 = 6$.

四分位距：

中位數為第 8, 9 個數據的平均，即 3 .

第一四分位數為第 4 與第 5 個數的平均，即 1 .

第三四分位數為第 12 與第 13 個數的平均，即 5。

故四分位距為 $5-1=4$ 。

標準差：這 16 個數的平均為

$$\bar{x} = \frac{1 \times 7 + 3 \times 3 + 5 \times 5 + 7 \times 1}{16} = \frac{48}{16} = 3。$$

數值 x_i	次數	(離均差) ²
1	7	$(1-3)^2 = 4$
3	3	$(3-3)^2 = 0$
5	5	$(5-3)^2 = 4$
7	1	$(7-3)^2 = 16$

$$\text{得標準差為 } S = \sqrt{\frac{1}{16}(4 \times 7 + 0 \times 3 + 4 \times 5 + 16 \times 1)} = 2。$$

【類題 9】

某射擊小組有六人，今各射擊 5 發，各人命中數分別為 4, 1, 4, 3, 2, 4 發，若 a 表其算術平均數， b 表其眾數， c 表其中位數， d 表其幾何平均數， e 表標準差，則 a 、 b 、 c 、 d 與 e 的大小關係為何？

Ans： $b > c > a > d > e$

【詳解】

排列：1, 2, 3, 4, 4,

$$a = \frac{1+2+3+4+4+4}{6} = 3，$$

$$b = 4，$$

$$c = \frac{3+4}{2} = 3.5，$$

$$d = \sqrt[6]{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4} = \sqrt[6]{384} < 3，$$

$$e = \sqrt{\frac{1}{6}[(-2)^2 + (-1)^2 + 0^2 + 1^2 \times 3]}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt[6]{\left(\frac{4}{3}\right)^3} = \sqrt[6]{\frac{64}{27}} < d，$$

$\therefore b > c > a > d > e。$

【例題 10】 **【常考題】**

有 10 個數據，其中 6 個數的算術平均數為 9，標準差為 3；剩餘 4 個數的算術平均數為 4，標準差為 2，求全部 10 個數的算術平均數及標準差。

Ans：算術平均數 7，標準差 $\sqrt{13}$

【詳解】

已知前 6 個數 $x_1, x_2, \dots, x_6$ 的算術平均數為 9，標準差為 3；

剩下 4 個數 x_7, x_8, x_9, x_{10} 的算術平均數為 4，標準差為 2。

由算術平均數可列得

$$\frac{x_1 + \dots + x_6}{6} = 9$$

$$\Rightarrow x_1 + \dots + x_6 = 54, \quad \frac{x_7 + \dots + x_{10}}{4} = 4$$

$$\Rightarrow x_7 + \dots + x_{10} = 16.$$

因此，全部 10 個數的算術平均數為

$$\frac{x_1 + \dots + x_6 + x_7 + \dots + x_{10}}{10} = \frac{54 + 16}{10} = 7.$$

由標準差可列得

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^6 x_i^2}{6}} - 9^2 = 3^2 \Rightarrow \sum_{i=1}^6 x_i^2 = 540,$$

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=7}^{10} x_i^2}{4}} - 4^2 = 2^2 \Rightarrow \sum_{i=7}^{10} x_i^2 = 80.$$

因此，全部 10 個數的標準差為

$$\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{10} x_i^2}{10}} - 7^2 = \sqrt{\frac{540 + 80}{10}} - 49 = \sqrt{13}.$$

【類題 10】

某班學生 50 人分為甲、乙兩組，甲組學生 30 人，學期成績平均 72 分，樣本標準差 8 分；乙組學生 20 人，平均 67 分，樣本標準差 7 分；若全班 50 人之標準差為 $\sqrt{k}$ 分，求 k 值。

Ans：64

【詳解】

$$\text{全班平均 } \bar{x} = \frac{30 \times 72 + 20 \times 67}{50} = 70,$$

$$\text{因為 } \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{30} x_i^2}{30} - 72^2} = 8, \quad \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{20} y_i^2}{20} - 67^2} = 7.$$

$$\sum_{i=1}^{30} x_i^2 = (8^2 + 72^2) \cdot 30 = 157440, \quad \sum_{i=1}^{20} y_i^2 = (7^2 + 67^2) \cdot 20 = 90760.$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} x_i^2}{50} - 70^2} = \sqrt{\frac{(157440 + 90760)}{50} - 4900} = \sqrt{4964 - 4900} = 8 = \sqrt{64}.$$

故 $k = 64$.

【例題 11】【常考題】

已知 10 個人的數學成績，成績的算術平均數為 62 分，標準差為 10 分。但因甲生違背考場規則，其成績 80 分須由 10 個成績中剔除，求成績更改後，9 個成績的算術平均數與標準差。

Ans：算術平均數 60，標準差 $\frac{8\sqrt{10}}{3}$

【詳解】

假設甲生之外的 9 人的成績為 $x_1, x_2, \dots, x_9$.

由原算術平均數可得

$$\frac{80 + x_1 + \dots + x_9}{10} = 62 \Rightarrow x_1 + \dots + x_9 = 540,$$

因此，成績更改後，算術平均數為

$$\frac{x_1 + \dots + x_9}{9} = \frac{540}{9} = 60 \text{ (分)},$$

由原標準差可得

$$\sqrt{\frac{(80^2 + x_1^2 + \dots + x_9^2)}{10} - 62^2} = 10$$

$$\Rightarrow x_1^2 + \dots + x_9^2 = 33040.$$

成績更改後，新標準差為

$$\sqrt{\frac{(x_1^2 + \dots + x_9^2)}{9} - 60^2} = \sqrt{\frac{33040}{9} - 3600} = \sqrt{\frac{640}{9}} = \frac{8\sqrt{10}}{3} \text{ (分)}.$$

【類題 11】

已知有 11 個數據的算術平均數是 50，標準差是 4，若刪除其中的一數「40」後，

(1) 求新的算術平均數

(2) 若新標準差是 $\sqrt{k}$ ，求 k 之值。

Ans：(1) 51，(2) 6.6

【詳解】

(1) 新的算術平均數 $\bar{x} = \frac{50 \times 11 - 40}{10} = 51$ 。

(2) 由原標準差可得

$$\sqrt{\frac{(40^2 + x_1^2 + \cdots + x_{10}^2)}{11} - 50^2} = 4 \Rightarrow x_1^2 + \cdots + x_{10}^2 = 26076。$$

$$\text{所以新標準差 } \sigma = \sqrt{\frac{26076}{10} - 51^2} = \sqrt{\frac{66}{10}} = \sqrt{6.6}。$$

故 $k = 6.6$ 。

主題三、線性變換

1. 設抽取的 n 個數據 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 之算術平均數為 $\bar{x}$ ，中位數為 $Me(x)$ ，

全距為 $R(x)$ ，四分位距為 $IQR(x)$ ，標準差為 S_x 。

將每個數據乘上 a 再加 b ，形成一組新數據 $y_1, y_2, \dots, y_n$ ，

即 $y_i = ax_i + b$ ， $i = 1, 2, \dots, n$ ，

令這些新數據的算術平均數為 $\bar{y}$ ，中位數為 $Me(y)$ ，

全距為 $R(y)$ ，四分位距為 $IQR(y)$ ，標準差為 S_y ，則有

$$(1) \quad \bar{y} = a\bar{x} + b$$

$$(2) \quad Me(y) = a \cdot Me(x) + b$$

$$(3) \quad R(y) = |a|R(x)$$

$$(4) \quad IQR(y) = |a|IQR(x)$$

$$(5) \quad S_y = |a|S_x$$

2. 一元二次多項式 $\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m)^2$ 的最小值就

發生在 $m = \mu$ 時，其最小值為 σ^2 。

【例題 12】 【配合課本例 12】

設抽取的 n 個數據 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 之算術平均數為 70，中位數為 60，全距為 20，四分位距為 7，標準差為 5。將每個數據乘上 -2 再加 10，形成一組新數據 $y_1, y_2, \dots, y_n$ ，即 $y_i = -2x_i + 10, i = 1, 2, \dots, n$ ，求這些新數據的算術平均數、中位數、全距、四分位距及標準差。

Ans： 算術平均數 -130，中位數 -110，全距 40，四分位距 14，標準差 10

【詳解】

新數據的算術平均數為 $-2 \cdot 70 + 10 = -130$ ，

中位數為 $-2 \cdot 60 + 10 = -110$ ，

全距為 $|-2| \cdot 20 = 40$ ，

四分位距為 $|-2| \cdot 7 = 14$ ，

標準差為 $|-2| \cdot 5 = 10$ 。

【類題 12】

若已知某一筆數據之算術平均數 $\bar{x} = 10$ ，標準差 $S_x = 3$ ，中位數 $M_{ex} = 12$ ，眾數

$M_{ox} = 8$ ，四分位距 $IQR = 3$ ，若 $y = -4x + 3$ ，則對新資料 y 而言，下列何者正確？

- (1) 算術平均數 = 43，(2) 標準差 = -12，(3) 中位數 = -45，(4) 眾數 = -32，
(5) 四分位距 = 12。

Ans： (3)(5)

【詳解】

(1) $\times$ ： $\bar{y} = -4\bar{x} + 3 = -4 \times 10 + 3 = -37$

(2) $\times$ ： $S_y = 4S_x = 4 \times 3 = 12$

(3) $\bigcirc$ ： $M_{ey} = -4M_{ex} + 3 = -4 \times 12 + 3 = -45$

(4) $\times$ ： $M_{oy} = -4M_{ox} + 3 = -4 \times 8 + 3 = -29$

(5) $\bigcirc$ ： $IQR_y = 4IQR_x = 4 \times 3 = 12$

故選(3)(5)。

【例題 13】 **【概念題】**

設數據 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ 的平均數 $\bar{x}=5$ ，標準差為 S_x ，令 $y_i = ax_i + b$ ， $i=1, 2, \dots, 10$ ，

其中 $a > 0$ 。已知 $y_1, y_2, \dots, y_{10}$ 的平均數 $\bar{y}=3$ ，標準差 $S_y = 2S_x$ ，則

(1) $a = \underline{\hspace{2cm}}$ ，

(2) $b = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

Ans : (1) 2，(2) -7

【詳解】

由 $S_y = 2S_x$ 知 $a = 2$ 。

因為 $\bar{y} = a\bar{x} + b$ ，即 $3 = 2 \times 5 + b$ ，得 $b = -7$ 。

故 $a = 2$ ， $b = -7$ 。

【類題 13】

某次全校數學競試的成績平均為 42 分，標準差為 12 分；為使成績公告時平均值提高到 63 分，將所有成績做線性函數處理，且使原始最高分數 72 分剛好等於 88 分，此時標準差變成幾分？

Ans : 10

【詳解】

設原始分數為 x ，調整後的分數為 y ，

其關係式為 $y = ax + b$ ，

則 $\bar{y} = a\bar{x} + b$ ， $S_y = |a|S_x$ 。

$$\begin{cases} 88 = 72a + b \\ 63 = 42a + b \end{cases}, \text{ 解得 } a = \frac{5}{6}, b = 28.$$

故標準差 $S_y = \frac{5}{6} \times 12 = 10$ (分)。

【例題 14】 【概念題】

考慮下列四組數據：

A ：1, 2, 3, 4, 5 .

B ：2, 4, 6, 8, 10 .

C ：996, 997, 998, 999, 1000 .

D ：1, 4, 9, 16, 25 .

其標準差分別為 S_A, S_B, S_C, S_D ，下列何者正確？

(1) $S_B = 2S_A$, (2) $S_C = S_A$, (3) $S_C > S_A$, (4) $S_D > S_A$, (5) $S_D = S_A^2$.

Ans：(1)(2)(4)

【詳解】

因為 $B = 2A$, $C = A + 995$, $D = A^2$,

(1) ○： $S_B = 2S_A$

(2) ○： $S_C = S_A$

(3) ×

(4) ○： $\because D$ 的資料較分散， $\therefore S_D > S_A$

(5) ×

答案為(1)(2)(4) .

【類題 14】

下列各組數據，比較其標準差大小 .

A ：10, 10, 10, 10, 10 . B ：5, 10, 15, 20, 25 . C ：13, 14, 15, 16, 17 .

Ans： $S_B > S_C > S_A$

【詳解】

$S_A = 0$, B 的資料較 C 分散，

所以 $S_B > S_C$ ，故 $S_B > S_C > S_A$.

【例題 15】 【概念題】

有 10 名學生的數學考科級分數分別為 $x_1, x_2, \dots, x_{10}$ ，其算術平均數為 7 分，標準差為 3 分 . 若令 $f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \dots + (x_{10} - x)^2$ ，下列何者為真？

(1) $f(7) = 3$ (2) $f(7) = 90$ (3) $x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{10}^2 = 790$

(4) $f(6) < f(7)$ (5) $f(7) < f(8)$.

Ans : (2)(5)

【詳解】

$$(1)(2) \text{ 由標準差公式 } \sqrt{\frac{(x_1-7)^2 + (x_2-7)^2 + \cdots + (x_{10}-7)^2}{10}} = \sqrt{\frac{f(7)}{10}} = 3,$$

$$\text{得 } f(7) = 90.$$

$$(3) \text{ 因為 } f(7) = (x_1-7)^2 + (x_2-7)^2 + \cdots + (x_{10}-7)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 - 10 \times 7^2,$$

$$\text{所以 } x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2 = 90 + 10 \times 7^2 = 58.$$

(4) 因為二次函數

$$\begin{aligned} f(x) &= (x_1-x)^2 + (x_2-x)^2 + \cdots + (x_{10}-x)^2 \\ &= 10x^2 - 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_{10})x + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_{10}^2) \end{aligned}$$

$$\text{在 } x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_{10}}{10} = 7 \text{ 有最小值, 所以 } f(6) > f(7).$$

$$(5) \text{ 承上, } f(7) < f(8).$$

答案為(2)(5)。

【類題 15】

有9名小學生的年齡分別為 $x_1, x_2, \cdots, x_9$ ，其中位數7，算術平均數為10，標準差為5。若令 $f(x) = (x_1-x)^2 + (x_2-x)^2 + \cdots + (x_9-x)^2$ ，下列何者為真？

$$(1) \ f(10) = 7, \ (2) \ f(10) = 225, \ (3) \ x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_9^2 = 1125,$$

$$(4) \ f(5) \text{ 是極小}, \ (5) \ f(10) < f(2).$$

Ans : (2)(3)(5)

【詳解】

(1)(2) 由標準差公式

$$\sqrt{\frac{(x_1-10)^2 + (x_2-10)^2 + \cdots + (x_9-10)^2}{9}} = \sqrt{\frac{f(10)}{9}} = 5, \text{ 得 } f(10) = 225.$$

$$(3) \text{ 因為 } f(10) = (x_1-10)^2 + (x_2-10)^2 + \cdots + (x_9-10)^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_9^2 - 9 \times 10^2,$$

所以 $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_9^2 = 225 + 9 \times 10^2 = 112$.

(4) 二次函數

$$f(x) = (x_1 - x)^2 + (x_2 - x)^2 + \cdots + (x_9 - x)^2 = 9x^2 - 2(x_1 + x_2 + \cdots + x_9)x + (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_9^2)$$

在 $x = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_9}{9} = 10$ 有最小值 .

(5) 承上, $f(10) < f(2)$.

答案為(2)(3)(5) .

【例題 16】【常考題】

某次考試, 某班的數學成績不太理想, 全班 30 位學生成績的算術平均數為 36 分, 標準差為 12 分, 全班最高也僅 66 分. 該班數學老師決定將每位學生的原始成績 x 調整為成績 y , 作為成績的正式紀錄 .

(1) 如果老師採取線型函數 $y = ax + b$ 調整成績, 並設定 y 成績的最高分為 100 分, y 成績的算術平均數為 60 分, 求 y 成績的標準差 .

(2) 如果老師採取根式函數 $y = 10\sqrt{x}$ 調整成績, 且經計算知: y 成績的算術平均數為 59 分, 則 y 成績的標準差最接近哪一個正整數?

Ans : (1) 16 , (2) 11

【詳解】

由題: $\bar{x} = 36, S_x = 12$

$$(1) \quad \bar{y} = a\bar{x} + b$$

$$\begin{cases} 60 = a \times 36 + b \\ 100 = a \times 66 + b \end{cases} \Rightarrow 30a = 40 \Rightarrow a = \frac{4}{3}, \quad b = 12 .$$

即調整的公式為: $y = \frac{4}{3}x + 12$,

$$\text{故得 } S_y = \frac{4}{3}S_x = \frac{4}{3} \times 12 = 16 .$$

$$(2) \quad \text{因為 } \bar{x} = 36 \Rightarrow \sum_{i=1}^{30} x_i = 36 \times 30 = 1080 ,$$

$$y = 10\sqrt{x}$$

$$\Rightarrow y_i^2 = 100x_i$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{30} y_i^2 = 100 \sum_{i=1}^{30} x_i = 108000 ,$$

$$S_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{30} y_i^2}{30} - 59^2} = \sqrt{\frac{108000}{30} - 59^2} = \sqrt{3600 - 3481} = \sqrt{119} \doteq 11 .$$

【類題 16】

某次小考數學成績非常不理想，老師決定將每人的原始成績取平方根後，再乘以 10 做為紀錄的成績。已知全班 50 人，發現調整後的全班成績之算術平均數為 65 分，標準差為 10 分，請問這班 50 位同學未調整前成績的算術平均數。

Ans : 43.25

【詳解】

設原始成績 x ，調整後分數 y

$$\text{則 } y = 10\sqrt{x} \Rightarrow y^2 = 100x \Rightarrow x = \frac{1}{100}y^2 .$$

$$\text{已知 } \bar{y} = 65, \quad S_y = 10 = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{50} y_i^2}{50} - 65^2} \Rightarrow \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 50 \times (100 + 65^2) .$$

$$\therefore \bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} = \frac{\frac{1}{100} \sum_{i=1}^{50} y_i^2}{50} = \frac{\frac{1}{100} \times 50 \times (100 + 65^2)}{50} = 43.25 .$$

主題四、數據標準化

1. 標準分數（ z 分數）：設 n 個數據 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的算術平均數為 μ ，標準差為 σ ，則數據 x_i 的標準分數（ z 分數）為

$$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$$

2. 標準化後的 z 分數，其平均數會成為 0，標準差則成為 1。

【例題 17】【配合課本例 13】

某班級全班的語文測驗成績，平均為 10 級分，標準差 3 級分；而數學競試全班平均為 65 分，標準差 8 分。A 生的語文測驗和數學競試成績分別為 8 級分和 58 分。

- (1) 計算 A 生兩項測驗成績的 z 分數。
- (2) 相對於全班，A 生的哪一項表現較好？

Ans : (1) $-\frac{7}{8}$, (2) 語文測驗

【詳解】

- (1) 將原始成績標準化如下：

$$\text{語文測驗 } z_1 = \frac{8-10}{3} = -\frac{2}{3},$$

$$\text{數學競試 } z_2 = \frac{58-65}{8} = -\frac{7}{8}.$$

- (2) 因為 $-\frac{7}{8} < -\frac{2}{3}$ ，相對於全班，

A 生的語文測驗表現較好。

【類題 17】

某班學生的體重平均為 65 公斤，標準差 6 公斤，身高的平均為 172 公分，標準差 9 公分。若其中 A 生的體重為 70 公斤，身高為 180 公分，

- (1) 計算 A 生體重與身高的 z 分數。
- (2) 相對於全班，A 生的哪一項較為突出？

Ans : (1) $\frac{5}{6}$, (2) 身高

【詳解】

(1) 體重 $z_1 = \frac{70-65}{6} = \frac{5}{6}$ ，身高 $z_2 = \frac{180-172}{9} = \frac{8}{9}$ 。

- (2) 因為 $\frac{5}{6} < \frac{8}{9}$ ，相對於全班，A 生的身高較為突出。

lt99ok241 重要精選考題

基礎題 ▶▶▶

1. 根據一百多年來的氣象紀錄，美國費城年雨量平均值為 41.0 英吋，標準差為 6.1 英吋。今欲將此項統計資料的單位由英制換為公制，請問該城市一百多年來年雨量的標準差，最接近下列的哪一個選項？（註：1 英吋等於 25.4 毫米）
(1) 0.240 毫米，(2) 1.61 毫米，(3) 6.10 毫米，(4) 155 毫米，(5) 1041 毫米。

【97 指乙】

Ans：(4)

【詳解】

$25.4 \times 6.1 = 159.94 \div 155 (\text{毫米})$ 。

2. 在某項才藝競賽中，為了避免評審個人主觀影響參賽者成績太大，主辦單位規定：先將 15 位評審給同一位參賽者的成績求得算術平均數，再將與平均數相差超過 15 分的評審成績剔除後重新計算平均值做為此參賽者的比賽成績。現在有一位參賽者所獲 15 位評審的平均成績為 76 分，其中有三位評審給的成績 92、45、55 應剔除，則這個參賽者的比賽成績為幾分？ 【96 學測】

Ans：79 分

【詳解】

$(76 \times 15 - 92 - 45 - 55) \div 12 = 79$ 。

3. 某班有學生 40 人，某次考試數學科平均成績 50 分，標準差為 10 分，若將最高分與最低分去掉，重新計算其他 38 人的成績，平均得 $\bar{X}$ 分及標準差 S 分，則
(1) $\bar{X}$ 必大於 50； S 必小於 10
(2) $\bar{X}$ 必小於 50； S 必大於 10
(3) $\bar{X}$ 必小於 50； S 必小於 10
(4) $\bar{X}$ 無法確定大於或小於 50； S 必小於 10
(5) $\bar{X}$ 無法確定大於或小於 50； S 也無法確定大於或小於 10。

Ans：(4)

【詳解】

去掉兩頭後所得數據較集中，故標準差減少。

4. 某商店進一批水果，平均單價為每個 50 元，標準差為 10 元。今每個水果以進價的 1.5 倍為售價出售，則水果

- (1) 平均售價為每個_____元，
(2) 標準差為_____元。 【99 指乙】

Ans : (1) 75, (2) 15

【詳解】

- (1) 水果平均售價為每個 $50 \times 1.5 = 75$ 元，
(2) 標準差為 $10 \times 1.5 = 15$ 元。

5. 有 10 個數據如下：1, 1, 3, 3, 5, 5, 6, 6, 6, 6。

今從此 10 個數據中任取 1 數刪除，問剩餘的 9 個數據中，下列何者不變？

- (1) 算術平均數，(2) 中位數，(3) 幾何平均數，(4) 全距，(5) 標準差。

Ans : (2)(4)

【詳解】

- (2) 中位數還是 5。
(4) 全距仍是 $6 - 1 = 5$ 。

6. 根據統計資料，1 月份臺北地區的平均氣溫是攝氏 16 度，標準差是攝氏 3.5 度。一般外國朋友比較習慣用華氏溫度來表示冷熱，已知當攝氏溫度為 x 時，華氏溫度為 $y = \frac{9}{5}x + 32$ ；若用華氏溫度表示，則 1 月份臺北地區的平均氣溫是華氏幾度？標準差是華氏幾度？

Ans : 60.8 度，6.3 度

【詳解】

- (1) 平均氣溫 $y = \frac{9}{5} \times 16 + 32 = 60.8$ 度。
(2) 標準差 $y = \frac{9}{5} \times 3.5 = 6.3$ 度。

7. 求數據 101 到 111 的標準差。

Ans : $\sqrt{10}$

【詳解】

101	102	103	104	105	106	107	108	109	110	111	106
-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	
25	16	9	4	1	0	1	4	9	16	25	110

進階題

8. 有一筆統計資料，共有 11 個數據如下（不完全依大小排列）：

2, 4, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 11, x 和 y ，

已知這些數據的算術平均數和中位數都是 6，且 x 小於 y 。請選出正確的選項：

(1) $x+y=14$ ，(2) $y<9$ ，(3) $y>8$ ，(4) 標準差至少是 3。

Ans：(1)(2)

【詳解】

因中位數是 6，故 $6 < x < y$ 。

$$\frac{1}{11}(2+4+4+5+5+6+7+8+11+x+y)=6$$

$$\Rightarrow x+y+52=66$$

$$\Rightarrow x+y=14$$

$$\Rightarrow x=6, y=8 \text{ 或 } x=y=7。$$

2	4	4	5	5	6	6	7	8	8	11	6
-4	-2	-2	-1	-1	0	0	1	2	2	5	
16	4	4	1	1	0	0	1	4	4	25	60 2.335497

2	4	4	5	5	6	7	7	7	8	11	6
-4	-2	-2	-1	-1	0	1	1	1	2	5	
16	4	4	1	1	0	1	1	1	4	25	58 2.296242

9. SARS 疫情期間，為了建立指標顯示疫情已受控制，以便向國人宣示可以過正常生活，有位公共衛生專家建議的指標是「連續 7 天，每天新增的可能病例都不超過（小於或等於）5 人」。根據連續 7 天的新增病例計算，下列各選項，哪些必定符合此指標？

(1) 平均數 ≤ 3 ，(2) 標準差 ≤ 1 ，(3) 平均數 ≤ 3 且標準差 ≤ 2 ，
(4) 平均數 ≤ 3 且全距 ≤ 2 ，(5) 眾數 = 1 且全距 ≤ 4 。

Ans：(4)(5)

【詳解】

(1) 例如：7, 7, 2, 1, 0, 0, 0。

(2) 例如：7, 7, 2, 1, 0, 0, 0。

(3) 例如：7, 7, 2, 1, 0, 0, 0。

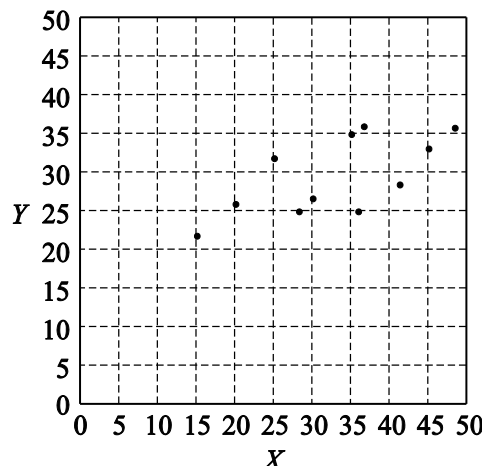
7	7	2	1	0	0	0	算術平均數	變異數	標準差
4.57	4.57	-0.4	-1.4	-2.4	-2.4	-2.4	2.428571429	8.816327	2.96923
20.9	20.9	0.18	2.04	5.9	5.9	5.9	61.7		

10. 某次數學測驗分為選擇題與非選擇題兩部

分。右列的散佈圖中每個點 (X, Y) 分別代表一位學生於此兩部分的得分，其中 X 表該生選擇題的得分， Y 表該生非選擇題的得分。設 $Z = X + Y$ 為各生在該測驗的總分。共有 11 位學生的得分數據。

試問以下哪些選項是正確的？

- (1) X 的中位數 $>$ Y 的中位數
 (2) X 的標準差 $>$ Y 的標準差
 (3) X 的全距 $>$ Y 的全距
 (4) Z 的中位數 $= X$ 的中位數 $+ Y$ 的中位數。 【95 指乙】



Ans : (1)(2)(3)

【詳解】

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
X	15	20	25	28	30	35	36	37	41	45	48
	平均數 33			變異數 105			標準差 10				
Y	22	26	32	25	27	35	25	36	28	33	36
	平均數 30			變異數 25			標準差 5				
X+Y	37	46	57	53	57	70	61	73	69	78	84

- (1) X 的中位數為 35， Y 的中位數為 28。
 (2) X 的全距為 33， Y 的全距為 14。
 (3) 顯然 X 較分散。
 (4) X 的中位數為 35，
 Y 的中位數為 28，
 $X + Y$ 的中位數為 61。

11. 已知 9 個人的數學成績，其算術平均數為 56 分，標準差為 4 分，且其中 7 個人的成績為 50, 52, 53, 54, 57, 60, 61。求另 2 個人的成績。

Ans : 55 分及 62 分

【詳解】

設另 2 個人的成績為 x, y ，則

$$\frac{1}{9}(50 + 52 + 53 + 54 + 57 + 60 + 61 + x + y) = 56$$

$$\Rightarrow x + y = 117 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$\frac{1}{9}(6^2 + 4^2 + 3^2 + 2^2 + 1^2 + 4^2 + 5^2 + (x-56)^2 + (y-56)^2) = 16$$

$$\Rightarrow (x-56)^2 + (y-56)^2 = 37$$

$$\Rightarrow (x-56)^2 + (117-x-56)^2 = 37$$

$$\Rightarrow (x-56)^2 + (x-61)^2 = 37 = (-1)^2 + 6^2$$

$$\Rightarrow x = 55 \text{ 或 } x = 62。$$

50	52	53	54	57	60	61	55	62	
-6	-4	-3	-2	1	4	5	-1	6	
36	16	9	4	1	16	25	1	36	144

算術平均數 56 變異數 16 標準差 4

12. 定義一組資料的第一十分位數 w_1 為「至少有（含） $\frac{1}{10}$ 的資料不大於 w_1 ，

且至少有（含） $\frac{9}{10}$ 的資料不小於 w_1 」，試問下列敘述何者為真？

- (1) 任一組資料都恰有一個第一十分位數
- (2) 若將原資料每個數據分別乘以 5，則原資料的第一十分位數乘以 5 也會是新資料的第一十分位數
- (3) 若將原資料每個數據分別加 5，則原資料的第一十分位數加 5 也是新資料的第一十分位數
- (4) 若有 A、B 兩組資料其第一十分位數分別為 w_A, w_B ，

則 $w_A + w_B$ 也是此兩組資料合併成一組後的第一十分位數

- (5) 任一組資料的第一十分位數必小於該組資料之算術平均數。【94 指乙】

Ans：(2)(3)

【詳解】

- (A) ×：若資料相同，則不唯一。
- (B) ○：同四分位數之觀念。
- (C) ○：同(B)。
- (D) ×：同(B)。
- (E) ×：若資料相同，有可能相等。