數學 3 進階講義

直線與圓的關係

成功高中．陳冠宏　老師

信望愛文教基金會

10-3-4　直線與圓的關係

定理敘述

➢ **直線與圓的關係**

給定一圓，圓心 O，半徑為 r，及一直線 L，$d(O,L)$ 為圓心 O 到 L 的距離，則

(1) $d(O,L) > 0$：直線 L 與圓相離

(2) $d(O,L) = 0$：直線 L 與圓相切

(3) $d(O,L) < 0$：直線 L 與圓相割

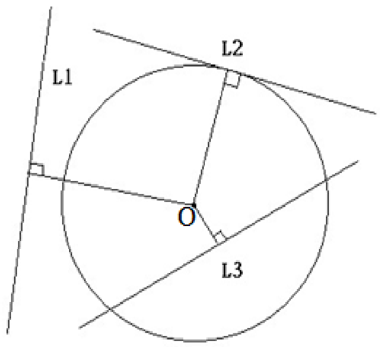
定理證明或說明

➢ **如圖**

L_1 與圓相離：$d(O,L_1) > 0$

L_2 與圓相切：$d(O,L_2) > 0$

L_3 與圓相割：$d(O,L_3) > 0$



關鍵字

直線與圓的關係

例題 1

直線 L：$y = kx + 4$ 與圓 C：$x^2 + y^2 = 4$ 相切，則 $k =$ ＿＿＿＿＿＿

Ans：$\pm\sqrt{3}$

解：

C 的圓心 O(0,0)，半徑 2

$\because$ 相切 $\therefore d(O,L) = \dfrac{|0-0+4|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = 2 \Rightarrow k = \pm\sqrt{3}$

例題 2

設直線 L：$y = mx - 1$ 與圓 C：$x^2 + y^2 - 6x - 2y + 6 = 0$ 有兩相異交點，則 m 的範圍為______

Ans： $0 < m < \frac{12}{5}$

解：

C 的圓心 O(3,1)，半徑 2

$\because$兩交點$\therefore d(O,L) = \frac{|3m-1-1|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} > 2 \Rightarrow 0 < m < \frac{12}{5}$

例題 3

與單位圓：$x^2 + y^2 = 1$ 相切的圖形有哪些？

(1)$x = 1$　(2)$y = 1$　(3)$x + y = 1$　(4) $x - y = \sqrt{2}$　(5)2y=1

Ans：(1)(2)(4)

解：

計算圓心(0,0)到各選項直線的距離是否等於半徑 1

(1)距離 1；(2)距離 1；(3)距離$\frac{\sqrt{2}}{2}$；(4)距離 1；(5)距離$\frac{1}{2}$，故選(1)(2)(4)

例題 4

試求自圓外一點 P(6,2)，對圓 C：$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$的切線方程式

Ans：y=2 或 24x-7y-130=0

解：

圓 C 的圓心 O(2,-1)，半徑 r=3

設切線斜率 m，則切線 L：mx-y=6m-2

則$d(O,L) = r \Rightarrow \frac{|2m+1-6m+2|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}} = 3 \Rightarrow |4m-3| = 3\sqrt{m^2+1}$

$\Rightarrow 16m^2 - 24m + 9 = 9m^2 + 9 \Rightarrow 7m^2 - 24m = 0 \Rightarrow m = 0, \frac{24}{7}$

$\therefore$$y$=2 或 24$x-7y$-130=0

例題 5

試求斜率為 3，且與圓 C：$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 9$ 相切的直線

Ans：$3x-y-7\pm3\sqrt{10}=0$

解：

圓 C 的圓心 O(2,-1)，半徑 r=3

設切線 L：3x-y+k=0

則 $d(O,L)=r\Rightarrow\dfrac{|6+1+k|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}}=3\Rightarrow k=-7\pm3\sqrt{10}$

$\therefore 3x-y-7\pm3\sqrt{10}=0$

例題 6

圓 C：$x^2+y^2-4x+2y-20=0$，直線 L：$3x-4y+5=0$，圓 C 與直線 L 交於 A，B 兩點，則 $\overline{AB}=$__________

Ans：8

解：

C 的圓心 O(2,-1)，半徑 5

$d(O,L)=\dfrac{|6+4+5|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}}=3$

$\therefore \overline{AB}=2\times\sqrt{5^2-3^2}=8$

溫故知新

習題 1

坐標平面上兩圓 C_1：$x^2+y^2=1$ 與 C_2：$(x-6)^2+y^2=4$，下列哪些直線是這兩圓的共同切線（公切線）？

(1) $x+y=\sqrt{2}$ (2) $x-\sqrt{3}y+2=0$ (3) $x+\sqrt{3}y+2=0$ (4) $x-\sqrt{3}y-2=0$ (5) $x+\sqrt{3}y-2=0$

習題 2

過 $P(5,4)$作圓 C:$x^2+y^2-6x-2y+6=0$ 的切線方程式為____________

習題 3

已知一圓方程式為 $x^2+y^2-2x-4y+k=0$，若一直線 $3x+4y-1=0$ 與該圓無交點，試問 k 的範圍為___________

習題 4

圓 C：$x^2+y^2-2x+2y+k=0$ 與直線 L：$x+y=5$ 不相交時，k 的範圍為________

習題 5

直線 L：$x+y=2$ 被圓 C：$x^2+y^2=20$ 所截弦長為__________

習題 6

試求斜率為 2，且與圓 C：$(x-2)^2+(y-1)^2=16$ 相切的直線

習題 7 【學測 97】

設 $\Gamma: x^2+y^2-10x+9=0$ 為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？

(1) Γ 的圓心坐標為 $(5,0)$

(2) Γ 上的點與直線 $L: 3x+4y-15=0$ 的最遠距離等於 4

(3) 直線 $L_1: 3x+4y+15=0$ 與 Γ 相切

(4) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2: 3x+4y=0$ 的距離等於 2

(5) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3: 3x+4y-5=0$ 的距離等於 2

習題 8 【指考乙 95】

在坐標平面上，選出與圓 $(x-3)^2+(y-4)^2=5^2$ 相切的直線：

(1)3x+4y=5 (2)3x+4y=0 (3)4x+3y=5 (4)4x+3y=0 (5)4x+3y=1

解答與解析

習題 1：(4)(5)

習題 2：$x=5$ 或 $5x-12y=-23$

習題 3：$1<k<5$

習題 4：$-\frac{21}{2}<k<2$

習題 5：$6\sqrt{2}$

習題 6： $2x-y-3\pm 4\sqrt{5}=0$

習題 7：(1)(2)(4)

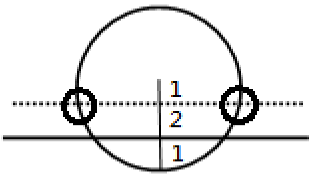
解：(1)配方可得圓方程式 $(x-5)^2+y^2=4^2$ 故圓心(5,0) 半徑 4

(2)圓心在直線上，故最遠距離即半徑 4

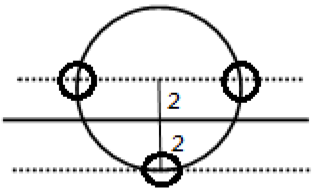
(3)計算圓心與直線距離為 6>4，故相離

(4)計算圓心與直線距離為 3，故有二個點(如圖一)

(5)計算圓心與直線距離為 2，故有三個點(如圖二)



圖一



圖二

習題 8：(2)

解：計算圓心(3,4)到各直線的距離，如等於半徑即為切線

(1) $\dfrac{|9+16-5|}{\sqrt{3^2+4^2}}=3$ (2) $\dfrac{|9+16|}{\sqrt{3^2+4^2}}=5$ (3) $\dfrac{|12+12-5|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{19}{5}$

(4) $\dfrac{|12+12|}{\sqrt{4^2+3^2}}=\dfrac{24}{5}$ (5) $\dfrac{|12+12-1|}{4\sqrt{3^2+3^2}}=\dfrac{23}{5}$ 故選(2)