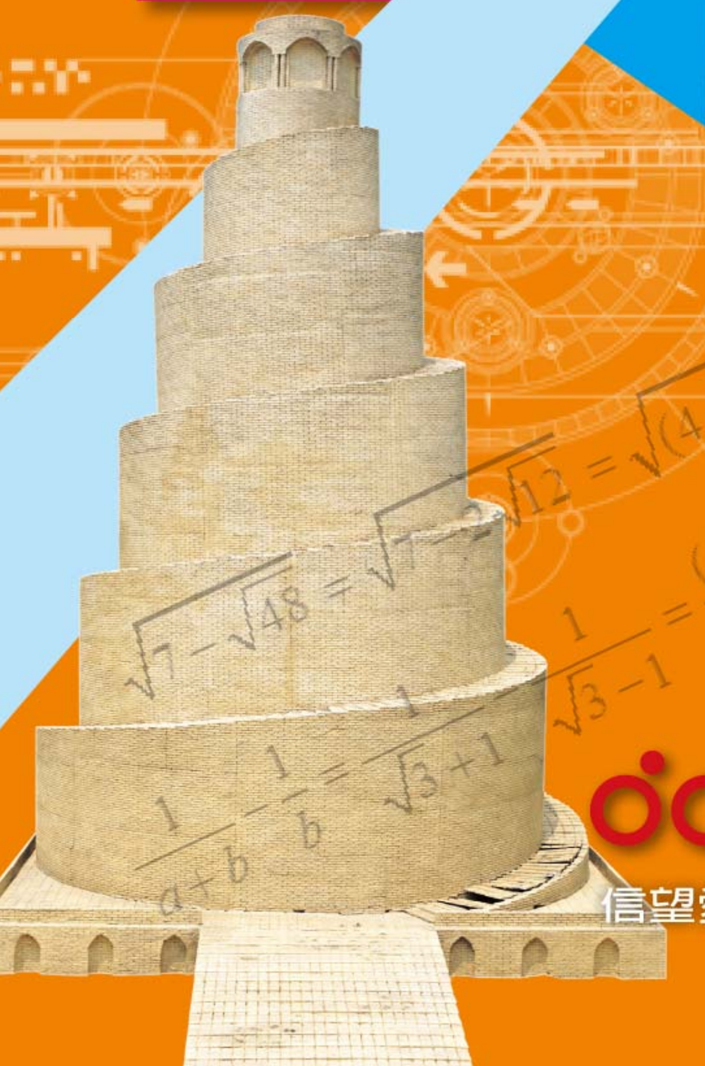
選修數學 進階講義 上

橢圓的參數式

大同高中·陳盈穎老師



信望愛文教基金會

16-2-3　橢圓的參數式

定理敘述

◆橢圓的參數式

若橢圓的方程式 $\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$，$a>0$，$b>0$

則橢圓的參數式為 $\begin{cases} x=a\cos\theta+h \\ y=b\sin\theta+k \end{cases}$，其中 $0\le\theta\le 2\pi$

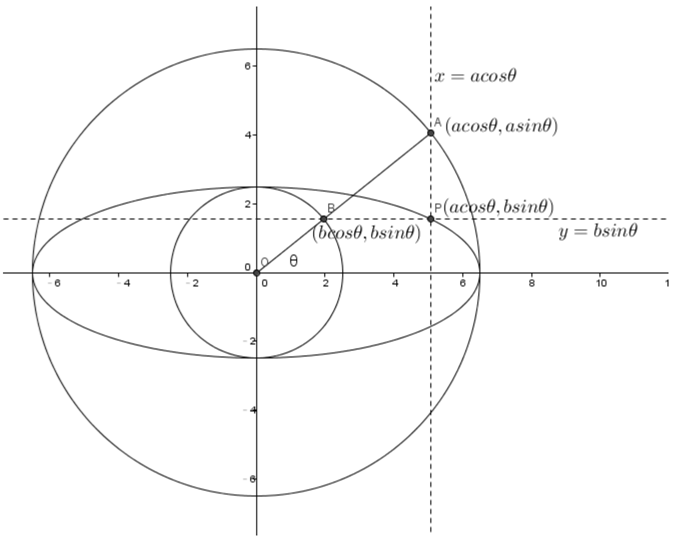
定理證明或說明

如圖，若橢圓中心為原點，則過橢圓中心，作一直線與 x 軸正向夾 θ 角。

直線與以橢圓半長軸長 a 為半徑，橢圓中心為圓心之圓，交於 A 點。

與以橢圓半短軸長 b 為半徑，橢圓中心為圓心之圓，交於 B 點。

則 A 點坐標可表示為 $(a\cos\theta,a\sin\theta)$，B 點坐標可表示為 $(b\cos\theta,b\sin\theta)$



過 A 點作平行 y 軸之鉛直線，過 B 點作平行 x 軸之水平行線，兩線與橢圓交於 P 點。則 P 點坐標可表示為 $(a\cos\theta,b\sin\theta)$

若橢圓中心為(h,k)，則圖形可視為將上圖平移(h,k)所得，故 P 點坐標可表示為 $(a\cos\theta+h,b\sin\theta+k)$

注意事項

橢圓參數式之 θ，並非 P 點與中心連線與 x 軸正向之夾角

關鍵字

橢圓、參數式

例題 1

橢圓 $\frac{(x-1)^2}{9}+\frac{(y+2)^2}{4}=1$ 之參數式為＿＿＿＿＿

Ans：$\begin{cases} x=3\cos\theta+1 \\ y=2\sin\theta-2 \end{cases}$，$0\le\theta\le 2\pi$

解：$\begin{cases} x-1=3\cos\theta \\ y+2=2\sin\theta \end{cases}$，$0\le\theta\le 2\pi$

得 $\begin{cases} x=3\cos\theta+1 \\ y=2\sin\theta-2 \end{cases}$，$0\le\theta\le 2\pi$

例題 2

在平面坐標中，橢圓方程式為 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{144}=1$，試問下列哪些點在橢圓上？

(A) $A(-5,0)$ (B) $B(-5,12)$ (C) $C(0,-12)$

(D) $D(5\cos\theta,12\sin\theta)$ (E) $E(5\sin\theta,12\cos\theta)$

Ans：(A)(C)(D)(E)

解：(A) $A(-5,0)$ 代入 $\Rightarrow \frac{(-5)^2}{25}+\frac{0^2}{144}=1$

(B) $B(-5,12)$ 代入 $\Rightarrow \frac{(-5)^2}{25}+\frac{12^2}{144}=2$

(C) $C(0,-12)$ 代入 $\Rightarrow \frac{0^2}{25}+\frac{12^2}{144}=1$

(D) $D(5\cos\theta,12\sin\theta)$ 代入 $\Rightarrow \frac{(5\cos\theta)^2}{25}+\frac{(12\sin\theta)^2}{144}=1$

(E) $E(5\sin\theta, 12\cos\theta)$ 代入 $\Rightarrow \frac{(5\sin\theta)^2}{25} + \frac{(12\cos\theta)^2}{144} = 1$

故選(A)(C)(D)(E)

例題 3

設點 $P(x, y)$ 為橢圓 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ 上之動點，若 $A(-6, -2)$ 、 $B(2, -8)$ ，

則 ΔABP 之最小面積為__________及此時 P 點坐標為__________

Ans：9 ； $P(\frac{-40}{17}, \frac{-30}{17})$

解：假設 $P(5\cos\theta, 2\sin\theta)$ ， $\overline{AP} = (5\cos\theta + 6, 2\sin\theta + 2)$ ， $\overline{AB} = (8, -6)$

$$\Delta ABP \text{ 面積} = \frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} 5\cos\theta + 6 & 2\sin\theta + 2 \\ 8 & -6 \end{vmatrix}\right|$$

$$= |-15\cos\theta - 8\sin\theta - 26| = |-17\sin(\theta + \phi) - 26|$$

其中 $\sin\phi = \frac{15}{17}, \cos\phi = \frac{8}{17}$

故所求最小面積為 9

而此時 $\theta + \phi = \frac{3}{2}\pi \Rightarrow \sin\theta = \frac{-8}{17}, \cos\theta = \frac{-15}{17}$

得 $P(\frac{-40}{17}, \frac{-30}{17})$

例題 4

設橢圓方程式為 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ ，求此橢圓內接矩形之最大面積為__________

Ans：20

解：因為此橢圓對 x 、 y 軸對稱，故內接矩形亦對 x 、 y 軸對稱

假設此矩形在第一象限的頂點坐標為 $(5\cos\theta, 2\sin\theta)$

則矩形面積為 $4 \times 5\cos\theta \times 2\sin\theta = 20\sin 2\theta$

故所求最大面積為 20

例題 5

設橢圓方程式為 $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$，求此橢圓內接矩形之最大周長為__________

Ans： $4\sqrt{29}$

解：因為此橢圓對 x 、 y 軸對稱，故內接矩形亦對 x 、 y 軸對稱

假設此矩形在第一象限的頂點坐標為 $(5\cos\theta, 2\sin\theta)$

則矩形周長為 $4\times(5\cos\theta+2\sin\theta)=4\sqrt{29}\sin(\theta+\phi)$

其中 $\sin\phi=\frac{5}{\sqrt{29}}, \cos\phi=\frac{2}{\sqrt{29}}$

故所求最大周長為 $4\sqrt{29}$

例題 6

設點 $P(x,y)$ 為橢圓 $9x^2+16y^2=144$ 上之動點，求點 P 到 $L: x+y=10$ 之最短距離及此時 P 點坐標。

Ans： $\frac{5\sqrt{2}}{2}$ ； $P(\frac{12}{5},\frac{12}{5})$

解：假設 $P(4\cos\theta, 3\sin\theta)$

$$d(P,L)=\frac{|4\cos\theta+3\sin\theta-10|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}|5\sin(\theta+\phi)-10|$$

其中 $\sin\phi=\frac{4}{5}, \cos\phi=\frac{3}{5}$

得最短距離為 $\frac{5\sqrt{2}}{2}$

而此時 $\theta+\phi=\frac{\pi}{2} \Rightarrow \sin\theta=\frac{3}{5}, \cos\theta=\frac{4}{5}$

得 $P(\frac{12}{5},\frac{12}{5})$

溫故知新

習題 1

設點 $P(x,y)$ 為橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 上之動點，若 $A(8,2)$ 、 $B(4,6)$ ，則 ΔABP 之最小面積為______

習題 2

設點 $P(x,y)$ 為橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1$ 上之動點，則 $2x^2+y^2+4x$ 的最大值為______

習題 3

設橢圓方程式為 $9x^2+16y^2=144$ ，求此橢圓內接矩形之最大面積為__________

習題 4

設橢圓方程式為 $x^2+\frac{y^2}{4}=1$ ，求此橢圓內接矩形之最大周長為__________

習題 5

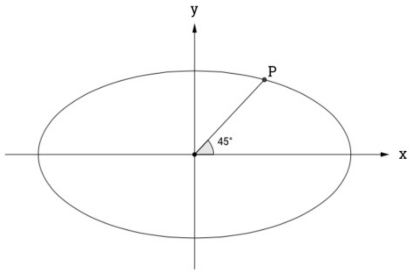
設點 $P(x,y)$ 為橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上之動點，求點 P 到 $L: x+2y=10$ 之最短距離及此時 P 點坐標。

習題 6

設點 $P(x,y)$ 為橢圓 $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$ 上之動點，求點 P 到 $L: x+2y=10$ 之最大距離。

習題 7 【學測 91】

在坐標平面上有一橢圓，它的長軸落在 x 軸上，短軸落在 y 軸上，長軸、短軸的長度分別為 4、2。如圖所示，通過橢圓的中心 O 且與 x 軸夾角為 45 度的直線在第一象限跟橢圓相交於 P 。則此交點 P 與中心 O 的距離為？



(1)1.5 (2)$\sqrt{1.6}$ (3)$\sqrt{2}$ (4)$\sqrt{2.5}$ (5)$\sqrt{3.2}$

習題 8 【學測補 92】

設 P 為橢圓 $\Gamma:\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 上的一點且位在上半平面。若 F_1 、 F_2 為 Γ 之焦點， 且 $\angle F_1PF_2$ 為直角，則 P 點的 $y-$坐標為________

解答與解析

習題 1：10

習題 2：30

習題 3：24

習題 4：$4\sqrt{5}$

習題 5：$\sqrt{5}$ ； $P(\dfrac{9}{5},\dfrac{8}{5})$

習題 6：$3\sqrt{5}$

習題 7：(2)

解：橢圓方程式為 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$

設交點 $P(t,t)$ ，代入方程式得 $t^2=0.8$

所求 $\overline{OP}=\sqrt{t^2+t^2}=\sqrt{1.6}$ ，故選(2)

習題 8：$\dfrac{9}{4}$

解：橢圓的焦點坐標為 $(4,0),(-4,0)$

假設 $P(5\cos\theta,3\sin\theta)$

$\angle F_1PF_2$ 為直角 $\Rightarrow \overline{PF_1}\cdot\overline{PF_2}=0$

$\Rightarrow (4-5\cos\theta,-3\sin\theta)\cdot(-4-5\cos\theta,-3\sin\theta)=0$

$\Rightarrow -16+25\cos^2\theta+9\sin^2\theta=0$

$\Rightarrow 9-16\sin^2\theta=0$

$\therefore \sin\theta=\pm\dfrac{3}{4}$(取正)

故得 P 點的 $y-$坐標為 $\frac{9}{4}$