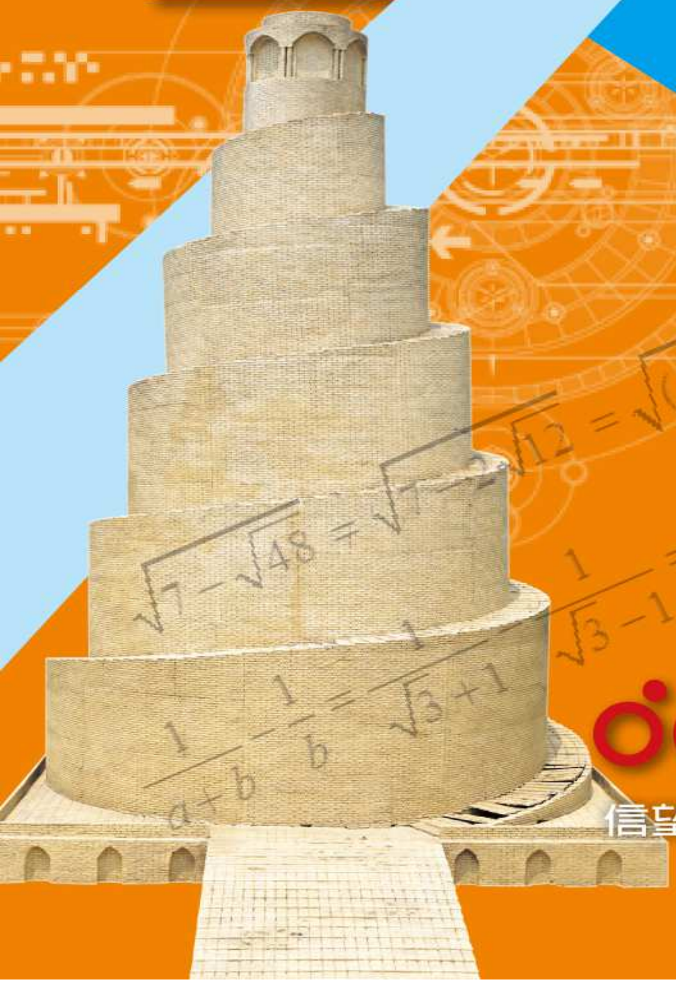
# 高中數學 進階講義

## 級數

陳清海 老師



信望愛文教基金會

# lt99ok212 級數

## 主題一、級數

1. 數列 $\langle a_n \rangle$ 中的前 $n$ 項依序用「＋」號連接起來的算式 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$

   稱爲**級數**，數列前 $n$ 項的和常用 $S_n$ 來表示，即 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ .

2. 等差級數的和公式：

   設 $\langle a_n \rangle$ 爲等差數列，且公差爲 $d$，則

   $$S_n=\frac{n\left(2a_1+(n-1)d\right)}{2} \quad 或 \quad S_n=\frac{n\left(a_1+a_n\right)}{2} .$$

3. 等比級數的和公式：

   設 $\langle a_n \rangle$ 爲等比數列，且公比爲 $r$，則

   (1)當 $r\neq 1$ 時，$S_n=\dfrac{a_1\left(1-r^n\right)}{1-r}$ .

   (2)當 $r=1$ 時，$S_n=na_1$ .

**【例題 1】**【配合課本例 1】

**(1) 求等差級數 $76+72+\cdots+12$ 的和．**

**(2) 求等比級數 $1024+512+\cdots+8$ 的和．**

Ans：(1) 748，(2) 2040

【詳解】

(1) 等差級數 $76+72+\cdots+12$ 的首項

$a_1=76$，公差 $d=72-76=-4$．

因爲 $12=76+16(-4)=76+(17-1)(-4)$，

所以此級數共有 17 項，其和

$$S_{17}=\frac{17\left(a_1+a_{17}\right)}{2}=\frac{17(76+12)}{2}=748 .$$

(2) 等比級數 $1024+512+\cdots+$ 的首項

$a_1=1024$，公比 $r=\dfrac{512}{1024}=\dfrac{1}{2}$．

因為 $8=1024\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^7=1024\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^{8-1}$，

所以此級數共有 8 項，其和

$$S_8=\frac{a_1\left(1-r^8\right)}{1-r}=\frac{1024\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1-\frac{1}{2}}=2040\ .$$

**【類題 1】**

**(1) 求 100 到 200 的正整數中，所有 7 的倍數的和．**

**(2) 設 $\langle a_n\rangle$ 是一個等比數列，其中 $a_2=-24$，$a_3=12$．求 $a_1+a_2+\cdots+a_8$ 的值．**

Ans：(1) 2107，(2) $\dfrac{255}{8}$

【詳解】

(1) 100 到 200 中所有 7 的倍數的正整數是一個

首項 $a_1=105$，公差 $d=7$，

末項 $a_n=196$，共有 14 項的等差數列．利用

$S_n=\dfrac{n\cdot\left(a_1+a_n\right)}{2}$，得 $S_{14}=\dfrac{14(105+196)}{2}=2107$．

(2) $r=\dfrac{a_3}{a_2}=\dfrac{12}{-24}=-\dfrac{1}{2}$，$a_1=\dfrac{a_2}{r}=\dfrac{-24}{-\frac{1}{2}}=48$．

$$a_1+a_2+\cdots+a_8=\frac{a_1\left(1-r^8\right)}{1-r}=\frac{48\left(1-\left(-\frac{1}{2}\right)^8\right)}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)}=\frac{255}{8}\ .$$

**【例題 2-1】【配合課本例 2】**

**設一等差級數第 1 項到第 5 項的和為 $-5$，第 6 項到第 10 項的和為 $-30$，求此等差級數第 11 項到第 15 項的和．**

Ans：$-55$

【詳解】

設等差級數的首項爲 a，公差爲 d，由題意可知：
第 1 項到第 10 項的和爲−35，

因此 $\begin{cases} S_5=\dfrac{5(2a+4d)}{2}=-5 \\ S_{10}=\dfrac{10(2a+9d)}{2}=-35 \end{cases}$

解得 $a=1$， $d=-1$ .
因爲第 1 項到第 15 項的和爲
$\dfrac{15(2a+14d)}{2}=\dfrac{15(2+14\cdot(-1))}{2}=-90$ ,
又第 1 項到第 10 項的和爲−35，
所以第 11 項到第 15 項的和爲−55 .

**【例題 2-2】【配合課本例 2】**

**設一等比級數第 1 項到第 5 項的和爲 1，第 1 項到第 10 項的和爲 5，求此等比級數第 1 項到第 15 項的和 .**

Ans：21

【詳解】

設等比級數的首項爲 a，公比爲 r，

則 $\begin{cases} S_5=\dfrac{a(1-r^5)}{1-r}=1 \\ S_{10}=\dfrac{a(1-r^{10})}{1-r}=5 \end{cases}$ ,

將兩式相除，得 $1+r^5=5$，解得 $r^5=4$ .
因爲第 1 項到第 15 項的和爲
$\dfrac{a(1-r^{15})}{1-r}=\dfrac{a(1-r^5)}{1-r}(1+r^5+r^{10})$ ,
將 $\dfrac{a(1-r^5)}{1-r}=1$ 與 $r^5=4$ 代入，得和爲 21 .

**【類題 2-1】**

**已知一等差數列的第 8 項爲 18，第 15 項爲 $-94$，前 $n$ 項和爲 $S_n$，求 $S_n$ 的最大值 .**

Ans：594

【詳解】

設此等差數列的首項爲 a，公差爲 d .
由題意知，第 8 項爲 18，第 15 項爲−94，可列得

$$\begin{cases} a+(8-1)d=18, \\ a+(15-1)d=-94. \end{cases}$$ ，解得 $a=130,\ d=-16$ .

假設第 k 項開始為負，得 $130+(k-1)(-16)<0$,

推得 $k>\dfrac{73}{8}=9.125$，因此第 10 項開始為負 .

因為等差數列在第 10 項開始為負，

所以前 9 項之和為最大值 .

因此，$S_n$的最大值為

$$S_9=\frac{9\left[2\cdot130+(9-1)(-16)\right]}{2}=594$$ .

**【類題 2-2】**

**一等比數列的首項為 7，末項為 448，總和為 889，求此數列的項數 .**

Ans：7

【詳解】

設此等比數列的公比為 r，共有 n 項 .

由題意知，末項為 448，總和為 889，可列得

$$\begin{cases} a_n=7\cdot r^{n-1}=448, \\ S_n=\dfrac{7\cdot(1-r^n)}{1-r}=889. \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} r^{n-1}=64 \\ \dfrac{1-r\cdot r^{n-1}}{1-r}=127 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{1-r\cdot64}{1-r}=127,$$

解得 $r=2$，代回 $r^{n-1}=64$ 得到 $n=7$ .

**【例題 3】【配合課本例 3】**

**某巨蛋球場 $E$ 區共有 25 排座位，此區每一排都比其前一排多 2 個座位．小明坐在正中間那一排（即第 13 排），發現此排共有 64 個座位，則此球場 $E$ 區共有幾個座位？【96 學測】**

Ans：1600

【詳解】

假設球場 E 區第 k 排共有 $a_k$ 個座位．
因為此區每一排都比前一排多 2 個座位，
所以數列 $\langle a_k \rangle$ 為等差數列．
由題意知， $a_{13}=64$ ．
因為 $\langle a_k \rangle$ 為等差數列，所以

$$a_1+a_2+\cdots+a_{25}=\frac{25(a_1+a_{25})}{2}.$$

又因為 $a_{13}$ 為 $a_1$ 和 $a_{25}$ 的等差中項，
所以 $a_1+a_{25}=2a_{13}=2\cdot 64=128$,
因此球場 E 區總共有 $\frac{25\cdot 128}{2}=1600$ 個座位．

**【類題 3】**

**某巨蛋球場 $E$ 區每一排的座位都比其前一排多 2 個座位．若第一排有 12 個，且球場 $E$ 區的座位不超過 600 個，則 $E$ 區的座位最多有幾排?**

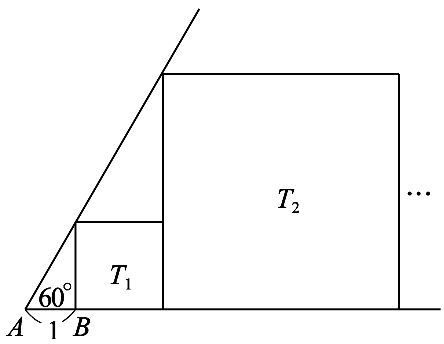
Ans：19

【詳解】
假設球場 E 區共有 n 排座位，
則總座位數為 $\frac{n(12\times 2+(n-1)\times 2)}{2}=n^2+11n$ ．
因為總座位數不超過 600 個，
即 $n^2+11n\le 600$ ， 解得 $n<20$ ，
所以 E 區的座位最多有 19 排．

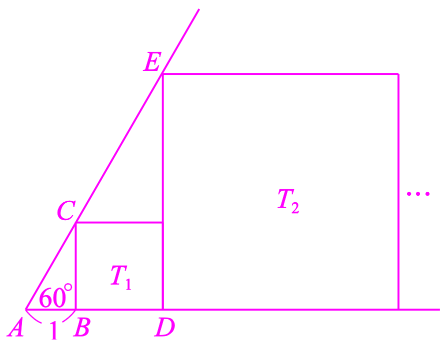
**【例題 4】【配合課本例 4】**

**右圖中，已知 $\angle A=60^\circ$， $\overline{AB}=1$， $T_1, T_2, T_3, \cdots$都是正方形，求前 4 個正方形的周長總和．**

Ans：$108+64\sqrt{3}$




【詳解】
如右圖所示，因為 $\triangle ABC$ 為 30°-60°-90°的直角三角形，所以 $T_1$ 的邊長 $\overline{BC}=\sqrt{3}$，
又因為△ADE 亦為 30°-60°-90°的直角三角形，



所以 $T_2$ 的邊長

$$\overline{DE}=\sqrt{3}\left(\overline{AB}+\overline{BD}\right)$$

$$=\sqrt{3}\,\overline{AB}+\sqrt{3}\,\overline{BC}$$

$$=\overline{BC}+\sqrt{3}\,\overline{BC}$$

$$=\left(1+\sqrt{3}\right)\overline{BC}\ .$$

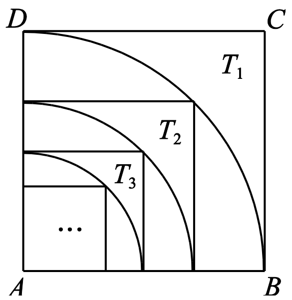
以此類推，可得正方形 $T_1$，$T_2$，$T_3$，……的周長為

$4\sqrt{3},\ 4\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right),\ 4\sqrt{3}\left(1+\sqrt{3}\right)^2,\ \cdots$ 的等比數列，

故前 4 個正方形的周長總和為

$$S_4=\frac{4\sqrt{3}\left(1-\left(1+\sqrt{3}\right)^4\right)}{1-\left(1+\sqrt{3}\right)}=\frac{4\sqrt{3}\left(1-\left(28+16\sqrt{3}\right)\right)}{-\sqrt{3}}=108+64\sqrt{3}\ .$$

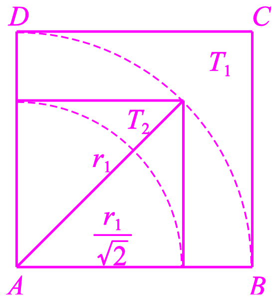
**【類題 4】**




**右圖中，$ABCD$ 為正方形．以 $A$ 為圓心，$\overline{AB}$ 為半徑畫一四分之一圓，設此四分之一圓的面積為 $T_1$．在四分之一圓內畫一個內接正方形，再仿照上面的方式得到一個小的四分之一圓，並設其面積為 $T_2$，以此類推得到數列 $T_1, T_2, T_3, \cdots$．若 $T_1=16$，則 $T_1+T_2+T_3+\cdots+T_{10}$ 的和為何?**

Ans：$\dfrac{1023}{32}$

【詳解】




設第一個四分之一圓的半徑為 $r_1$，

由右圖可知：小正方形的邊長是半徑 $r_1$ 的 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍，

而第二個四分之一圓的半徑為小正方形的邊長，

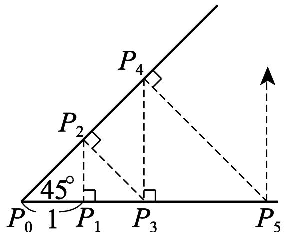
因此由面積比為半徑的平方比，可得 $T_2=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 T_1$ ．

以此類推可得：$T_1$，$T_2$，$T_3$，……是一個首項為 16，

公比為 $\dfrac{1}{2}$ 的等比級數，因此

$$T_1+T_2+T_3+\cdots+T_{10}=\frac{16\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}}=32\left(\frac{1023}{1024}\right)=\frac{1023}{32}\ .$$

**【例題 5】【配合課本例 5】**




**右圖中，$\overline{P_0P_1}=1$，$\angle P_1P_0P_2=45°$．一隻螞蟻由 $P_1$ 沿著虛線路徑前進，依序經過 $P_2, P_3, P_4, P_5, \cdots$．如果前進的方式與右圖同，那麼由 $P_1$ 走到 $P_{20}$，螞蟻行走的路徑總長爲何?**

Ans：$1023+511\sqrt{2}$

【詳解】

因爲 $\triangle P_0P_1P_2$ 爲等腰直角三角形，所以 $\overline{P_1P_2}=\overline{P_0P_1}=1$，

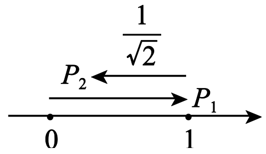
又 $\triangle P_1P_2P_3$ 也是等腰直角三角形，所以 $\overline{P_2P_3}=\sqrt{2}\ \overline{P_1P_2}$，

以此類推可得 $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$, $\overline{P_3P_4}$ $\cdots$，$\overline{P_{19}P_{20}}$ 是首項爲 1，公比爲 $\sqrt{2}$，

共有 19 項的等比數列，因此，由 $P_1$ 走到 $P_{20}$ 的路徑總長爲

$$1+\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2+\cdots+\left(\sqrt{2}\right)^{18}=\frac{1\left(\left(\sqrt{2}\right)^{19}-1\right)}{\sqrt{2}-1}=1023+511\sqrt{2}\ .$$

**【類題 5】**




**蝸牛在數線上由原點出發，如圖所示．牠第一次向右移動 1 單位，到達點 $P_1$，第二次向左移動 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 單位，到達點 $P_2$，而後依照先向右再向左的方式移動，而且每次移動的距離都是前一次的 $\frac{1}{\sqrt{2}}$，如此依序移動到點 $P_3, P_4, P_5, \cdots$，求點 $P_{10}$ 的坐標．**

Ans：$\dfrac{62-31\sqrt{2}}{32}$

【詳解】

設向右移動的位移爲正，向左移動的位移爲負，

則根據題意，蝸牛依序的位移是等比數列

$1,\ -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2\sqrt{2}},\ \cdots$，其首項為 1，公比為 $-\frac{1}{\sqrt{2}}$，

因此，點 $P_{10}$ 的坐標為 $1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^9$，

由等比級數的和公式得

$$1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\cdots+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^9=\frac{1\left(1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{10}\right)}{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}=\frac{\frac{31}{32}}{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}}=\frac{62-31\sqrt{2}}{32},$$

故點 $P_{10}$ 的坐標為 $\frac{62-31\sqrt{2}}{32}$．

**【例題 6】**

求 $0.9+0.99+0.999+\cdots+0.\overbrace{99\cdots99}^{n個9}$ 的和．

Ans： $n-\frac{1}{9}\cdot\left(1-(0.1)^n\right)$

【詳解】

$0.9+0.99+0.999+\cdots+0.\overbrace{99\cdots99}^{n個9}$

$=(1-0.1)+(1-0.01)+\cdots+\left(1-(0.1)^n\right)$

$=n-\frac{0.1\left(1-(0.1)^n\right)}{1-0.1}$

$=n-\frac{1}{9}\cdot\left(1-(0.1)^n\right)$ ．

**【類題 6】**

求 $0.3+0.33+0.333+\cdots+0.\overbrace{33\cdots3}^{n個3}$ 的和．

Ans： $\frac{n}{3}-\frac{1}{27}\cdot\left(1-(0.1)^n\right)$

【詳解】

因為 $0.3+0.33+0.333+\cdots+0.\overbrace{33\cdots3}^{n個3}$

$=\frac{1}{3}(0.9+0.99+0.999+\cdots+0.\overbrace{99\cdots99}^{n個9})$ ,

所以 $0.3+0.33+0.333+\cdots+0.\overbrace{33\cdots3}^{n個3}=\frac{n}{3}-\frac{1}{27}\cdot\left(1-(0.1)^n\right)$ .

**【例題 7】**

**設** $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{10}{2^{10}}$ **．下列哪一個數和** $S$ **最爲接近?**

**(1)** 1.5 **，(2)** 1.8 **，(3)** 2.1 **，(4)** 2.4 **，(5)** 2.7 **．**

Ans：(3)

【詳解】

將等式 $S=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{10}{2^{10}}$ 兩邊同乘以 2，可得

$2S=1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{10}{2^9}$ ,

然後將 2S 減去 S，得

$$\begin{array}{rl} 2S= & 1+\frac{2}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{4}{2^3}+\cdots+\frac{10}{2^9} \\ -)\quad S= & \quad\ \frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{9}{2^9}+\frac{10}{2^{10}} \\ \hline S= & 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^9}-\frac{10}{2^{10}} \end{array}$$

整理得 $S=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^9}-\frac{10}{2^{10}}=\frac{1\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{10}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{10}{2^{10}}=2-\frac{1}{2^9}-\frac{10}{2^{10}}$ .

因爲 $1.98<2-\frac{1}{2^9}-\frac{10}{2^{10}}<2$，所以和 S 最爲接近的數爲(3)2.1 .

**【類題 7】**

**已知** $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ **爲等比級數，求滿足** $1-S_n<0.01$ **的最小正整數** $n$ **．**

Ans：7

【詳解】

因為 $S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=\frac{\frac{1}{2}\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{2}}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$，

所以 $1-S_n=1-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)=\frac{1}{2^n}$ ．

又 $1-S_n=\frac{1}{2^n}<0.01$， 可得 $2^n>100$．因為 $2^6<100<2^7$，

所以滿足 $1-S_n<0.01$ 的最小正整數 n 為 7．

**【例題 8】【配合課本例 6】**

**已知數列 $\langle a_n\rangle$ 之前 $n$ 項的和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=n^2+n$， 求 $a_1$, $a_5$ 及 $a_n$ ．**

Ans：(1) $a_1=2$，$a_5=10$， $a_n=2n$

【詳解】

(1) $a_1=S_1=1^2+1=2$ ．

(2) 因為

$$\begin{array}{rcccccc} & S_5 & =a_1 & +a_2 & +a_3 & +a_4 & +a_5 \\ -) & S_4 & =a_1 & +a_2 & +a_3 & +a_4 & \\ \hline & S_5-S_4 & = & & & & a_5 \end{array}$$

所以 $a_5=S_5-S_4=\left(5^2+5\right)-\left(4^2+4\right)=10$ ．

(3) 當 $n\geq 2$ 時， $a_n=S_n-S_{n-1}=n^2+n-\left((n-1)^2+(n-1)\right)=2n$ ．

又 $a_1=2$ 也滿足 $a_n=2n$， 故 $a_n=2n$ ．

**【類題 8】**

**已知數列 $\langle a_n\rangle$ 之前 $n$ 項的和 $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n=3n^2-n$， 求 $a_1$, $a_4$ 及 $a_n$ ．**

Ans：(1) 2，(2) 20，(3) $a_n=6n-4$

【詳解】

(1) $a_1=S_1=3\times 1^2-1=2$ ．

(2) 因為

$$\begin{array}{rrrrrr} & S_4 & = a_1 & + a_2 & + a_3 & + a_4 \\ -) & S_3 & = a_1 & + a_2 & + a_3 & \\ \hline & S_4 - S_3 & = & & & a_4 \end{array}$$

所以 $a_4 = S_4 - S_3 = \left(3\times 4^2 - 4\right) - \left(3\times 3^2 - 3\right) = 20$ .

(3) 當 $n \geq 2$ 時，

$a_n = S_n - S_{n-1} = 3n^2 - n - \left(3(n-1)^2 - (n-1)\right) = 6n - 4$ .

又 $a_1 = 2$ 也滿足 $a_n = 6n - 4$，故 $a_n = 6n - 4$ .

# 主題二、$\sum$與級數求和

1. $\sum$運算性質

(1) $\sum_{k=1}^{n}(a_k+b_k)=\sum_{k=1}^{n}a_k+\sum_{k=1}^{n}b_k$ .

(2) $\sum_{k=1}^{n}(ca_k)=c\sum_{k=1}^{n}a_k$ （ $c$是常數）.

2. 級數公式

(1) $1+2+3+4+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n}k=\dfrac{n(n+1)}{2}$

(2) $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

(3) $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

**【例題 9】【配合課本例 7】**

將下列各式寫成連加式，並求出其和．

**(1)** $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$ **(2)** $\sum_{k=1}^{5}\sqrt{2}$ **(3)** $\sum_{k=2}^{5}(-3)^k$ .

Ans：(1) 34，(2) $5\sqrt{2}$，(3) $-180$

【詳解】

(1) $\sum_{k=1}^{4}(3k+1)$

$=(3\times1+1)+(3\times2+1)+(3\times3+1)+(3\times4+1)$

$=4+7+10+13=34$ .

(2) $\sum_{k=1}^{5}\sqrt{2}=\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}+\sqrt{2}=5\sqrt{2}$ .

(3) $\sum_{k=2}^{5}(-3)^k=(-3)^2+(-3)^3+(-3)^4+(-3)^5$

$=9-27+81-243=-180$ .

**【類題 9】**

**將下列各式寫成連加式，並求出其和．**

**(1)** $\sum_{k=1}^{4}(5-2k)$ **，(2)** $\sum_{k=2}^{5}16\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}$ **，(3)** $\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^{k}}{2k-3}$ **．**

Ans：(1) 0，(2) $\frac{5}{2}$，(3) $\frac{28}{15}$

【詳解】

(1) $\sum_{k=1}^{4}(5-2k)$

$=(5-2\times1)+(5-2\times2)+(5-2\times3)+(5-2\times4)$

$=3+1+(-1)+(-3)=0$ ．

(2) $\sum_{k=2}^{5}16\left(-\frac{1}{2}\right)^{k}=16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}+16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{3}+16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{4}+16\times\left(-\frac{1}{2}\right)^{5}$

$=4-2+1-\frac{1}{2}=2\frac{1}{2}$ ．

(3) $\sum_{k=1}^{4}\frac{(-1)^{k}}{2k-3}=\frac{-1}{2-3}+\frac{(-1)^{2}}{4-3}+\frac{(-1)^{3}}{6-3}+\frac{(-1)^{4}}{8-3}=1+1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}=\frac{28}{15}$ ．

**【例題 10】【配合課本例 8】**

**將下列各級數用Σ表示：**

**(1)** $15+11+7+\cdots+(-25)$ **（等差級數）．**

**(2)** $9-3+1-\cdots-\frac{1}{27}$ **（等比級數）．**

**(3)** $3\times3+4\times5+5\times7+\cdots+12\times21$ **．**

Ans：(1) $\sum_{k=1}^{11}(19-4k)$，(2) $\sum_{k=1}^{6}9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$，(3) $\sum_{k=1}^{10}(k+2)(2k+1)$

【詳解】

(1) 因為 15，11，7，……，−25 是

首項 $a_1=15$，公差 $d=-4$ 的等差數列，

所以一般項 $a_k=15+(-4)(k-1)=19-4k$，

又當 $29-4k=-25$ 時，解得 $k=11$，

即此數列有 11 項．因此

$$15+11+7+\cdots+(-25)=\sum_{k=1}^{11}a_k=\sum_{k=1}^{11}(19-4k)\ .$$

(2) 因爲 9，$-3$，1，……，$-\frac{1}{27}$ 是

首項 $a_1=9$，公比 $r=\frac{1}{3}$ 的等比數列，

所以一般項 $a_k=9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}$，

又 $9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=-\frac{1}{27}$ 時，解得 $\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}=\left(-\frac{1}{3}\right)^{5}$， $k=6$，

即此數列有 6 項．因此

$$9-3+1-\cdots-\frac{1}{27}=\sum_{k=1}^{6}a_k=\sum_{k=1}^{6}9\cdot\left(-\frac{1}{3}\right)^{k-1}\ .$$

(3) 因爲級數 $3\times3+4\times5+5\times7+\cdots+12\times21$ 的

每一項均可分成兩個數字相乘，

又前一個數字 3，4，……，12 是

一般項爲 $k+2$ 的等差數列，

而後一個數字 3，5，……，21 是

一般項爲 $2k+1$ 的等差數列，

所以級數 $3\times3+4\times5+5\times7+\cdots+12\times21$ 的

一般項爲 $(k+2)(2k+1)$，且其項數爲 10．用 Σ 表示得：

$$3\times3+4\times5+5\times7+\cdots+12\times21=\sum_{k=1}^{10}(k+2)(2k+1)\ .$$

**【類題 10】**

**將下列各級數用 Σ 表示：**

**(1)** $(-31)+(-24)+\cdots+32$ **（等差級數）．**

**(2)** $\frac{3}{64}+\frac{3}{16}+\cdots+12$ **（等比級數）．**

**(3)** $\frac{1}{2\times1}+\frac{1}{4\times4}+\frac{1}{6\times7}+\cdots+\frac{1}{20\times28}$ **．**

Ans：(1) $\sum_{k=1}^{10}(7k-38)$，(2) $\sum_{k=1}^{5}3\times4^{k-4}$，(3) $\sum_{k=1}^{10}\frac{1}{2k(3k-2)}$

【詳解】

(1) $\left(-31\right)+\left(-24\right)+\cdots+32=\sum_{k=1}^{10}\left(7k-38\right)$ .

(2) $\dfrac{3}{64}+\dfrac{3}{16}+\cdots+12=\sum_{k=1}^{5}\dfrac{3}{64}\times 4^{k-1}=\sum_{k=1}^{5}3\times 4^{k-4}$ .

(3) $\dfrac{1}{2\times 1}+\dfrac{1}{4\times 4}+\dfrac{1}{6\times 7}+\cdots+\dfrac{1}{20\times 28}=\sum_{k=1}^{10}\dfrac{1}{2k\left(3k-2\right)}$ .

**【例題 11】**【配合課本例 9】

**使用數學歸納法證明：**

$$1^2+3^2+\cdots+\left(2n-1\right)^2=\frac{n\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}{3}$$ .

【證明】

(1) 當 $n=1$時，左式 $=1^2=1$，

右式 $=\dfrac{1\cdot\left(2\cdot 1-1\right)\left(2\cdot 1+1\right)}{3}=1$，原式成立．

(2) 設 $n=k$ 時原式成立，即

$1^2+3^2+\cdots+\left(2k-1\right)^2=\dfrac{k\left(2k-1\right)\left(2k+1\right)}{3}$，則

當 $n=k+1$時，

左式 $=1^2+3^2+\cdots+\left(2k-1\right)^2+\left(2k+1\right)^2$

$$=\frac{k\left(2k-1\right)\left(2k+1\right)}{3}+\left(2k+1\right)^2$$

$$=\left(2k+1\right)\left(\frac{2k^2-k+6k+3}{3}\right)$$

$$=\frac{\left(2k+1\right)\left(2k+3\right)\left(k+1\right)}{3}$$

$$=\frac{\left(k+1\right)\left(2\left(k+1\right)-1\right)\left(2\left(k+1\right)+1\right)}{3}=\text{右式}，$$

原式也成立．

故由數學歸納法可知，對於所有正整數 $n$，

$1^2+3^2+\cdots+\left(2n-1\right)^2=\dfrac{n\left(2n-1\right)\left(2n+1\right)}{3}$ 恆成立．

**【類題 11】**

**使用數學歸納法證明：**

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$

**對所有的正整數 $n$ 都成立．**

【證明】

(1) 當 $n=1$ 時，左式 $=\frac{1}{1\times 3}=\frac{1}{3}$，

右式 $=\frac{1}{2\cdot 1+1}=\frac{1}{3}$，原式成立．

(2) 設 $n=k$ 時原式成立，即

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}=\frac{k}{2k+1},$$

則當 $n=k+1$ 時，

$$\text{左式}=\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{k}{2k+1}+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k(2k+3)+1}{(2k+1)(2k+3)}$$

$$=\frac{2k^2+3k+1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{(2k+1)(k+1)}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k+1}{2k+3}=\frac{k+1}{2(k+1)+1}=\text{右式},$$

原式也成立．

故由數學歸納法可知，對於所有的正整數 $n$

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$$ 恆成立．

**【例題 12】【配合課本例 10】**

**求 $9^3+10^3+\cdots+15^3$ 的值．**

Ans：13104

【詳解】

由立方和公式可知：

$$1^3+2^3+\cdots+15^3=\left(\frac{15(15+1)}{2}\right)^2=14400,$$

$$1^3+2^3+\cdots+8^3=\left(\frac{8(8+1)}{2}\right)^2=1296\ .$$

因此 $9^3+10^3+\cdots+15^3=14400-1296=13$ .

**【類題 12】**

**求 $1^2+3^2+\cdots+29^2$ 的值 .**

Ans：4495

【詳解】

由平方和公式可知：

$$1^2+2^2+\cdots+29^2=\frac{29(29+1)(2\cdot29+1)}{6}=8555,$$

$$2^2+4^2+\cdots+28^2=4\left(1^2+2^2+\cdots+14^2\right)$$

$$=4\left(\frac{14(14+1)(2\cdot14+1)}{6}\right)=4060\ .$$

因此 $1^2+3^2+\cdots+29^2=8555-4060=44$ .

**【例題 13】【配合課本例 11】**

**(1) 求 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)$ 的和（以 $n$ 表示）.**

**(2) 求(1)中的級數前 10 項的和 .**

Ans：(1) $\dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$，(2) 4290

【詳解】

(1) 先將級數 $1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)$ 用 $\Sigma$ 表示成

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+n(n+1)(n+2)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)\ .$$

根據 $\Sigma$ 的運算性質及級數和公式，得

$$\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)=\sum_{k=1}^{n}\left(k^3+3k^2+2k\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}k^3+\sum_{k=1}^{n}3k^2+\sum_{k=1}^{n}2k=\sum_{k=1}^{n}k^3+3\sum_{k=1}^{n}k^2+2\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2+3\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\cdot\frac{n(n+1)}{2}$$

$$=n(n+1)\left[\frac{n(n+1)}{4}+\frac{2n+1}{2}+1\right]=n(n+1)\left(\frac{n^2+5n+6}{4}\right)$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4} .$$

(2) 利用(1)所得的公式，將 $n=10$ 代入，得

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+10(10+1)(10+2)=\frac{10(10+1)(10+2)(10+3)}{4}=4290 .$$

**【類題 13】**

**(1) 求 $2\cdot3+3\cdot5+\cdots+(n+1)(2n+1)$ 的和（以 $n$ 表示）．**

**(2) 求(1)中的級數前 10 項的和．**

Ans：(1) $\frac{n}{6}\left(4n^2+15n+17\right)$，(2) 945

【詳解】

(1) 先將級數 $2\cdot3+3\cdot5+\cdots+(n+1)(2n+1)$ 用 $\Sigma$ 表示成

$$2\cdot3+3\cdot5+\cdots+(n+1)(2n+1)=\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k+1) .$$

根據 $\Sigma$ 的運算性質及級數和公式，得

$$\sum_{k=1}^{n}(k+1)(2k+1)=\sum_{k=1}^{n}\left(2k^2+3k+1\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}2k^2+\sum_{k=1}^{n}3k+\sum_{k=1}^{n}1=2\sum_{k=1}^{n}k^2+3\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=2\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+3\cdot\frac{n(n+1)}{2}+n$$

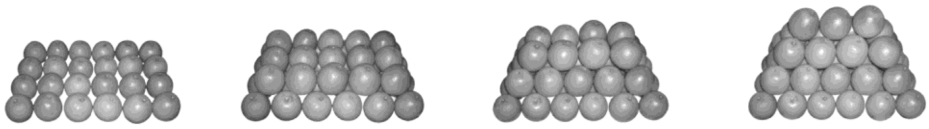
$$=\frac{n}{6}\left(4n^2+6n+2+9n+9+6\right)=\frac{n}{6}\left(4n^2+15n+17\right) .$$

(2) 利用(1)所得的公式，將 $n=10$ 代入，得

$$2\cdot3+3\cdot5+\cdots+(10+1)(20+1)=\frac{10(4\times100+15\times10+17)}{6}=945 .$$

**【例題 14】【配合課本例 12】**

下圖表示長方形垛的疊法：



某水果販將柳丁堆成長方形垛．若最底層長邊有 15 個柳丁，短邊有 10 個，則此長方形垛最多有幾個柳丁？

Ans：660

【詳解】

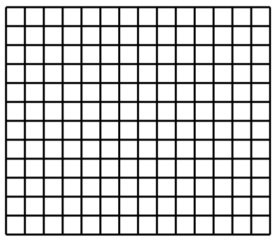
由圖知道：柳丁數目為

$$15\times10+14\times9+\cdots+6\times1=\sum_{k=1}^{10}k(k+5)=\sum_{k=1}^{10}k^2+5\sum_{k=1}^{10}k$$

$$=\frac{10(10+1)(20+1)}{6}+5\cdot\frac{10(10+1)}{2}$$

$=385+275=660$（個）.

**【類題 14】**



如右圖，各小方格為 $0.25\text{cm}^2$ 的正方形．

試問圖中大大小小的正方形共有多少個？

Ans：806

【詳解】

由圖可知：正方形個數由大（$12\times12$）到小（$1\times1$）

分別為：

$$1\times3+2\times4+\cdots+12\times14$$

$$=\sum_{k=1}^{12}k(k+2)=\sum_{k=1}^{12}k^2+2\sum_{k=1}^{12}k$$

$$=\frac{12(12+1)(2\times12+1)}{6}+2\times\frac{12(12+1)}{2}$$

$=650+156=806$（個）.

**【例題 15】**

已知 $\sum_{k=1}^{4}(ak+b)=18$，$\sum_{k=0}^{3}(ak+b)=6$，求 $a, b$．

Ans：a＝3，b＝−3

【詳解】

因爲 $\sum_{k=1}^{4}(ak+b)=(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+(4a+b)=10a+4b$，

又 $\sum_{k=0}^{3}(ak+b)=b+(a+b)+(2a+b)+(3a+b)=6a+4b$，

所以 $\begin{cases}10a+4b=18\\6a+4b=6\end{cases}$，解得 $a=3$，$b=-3$．

**【類題 15】**

已知 $\sum_{k=2}^{4}(ak+b)=21$，$\sum_{k=1}^{3}(ak+b)=15$，求 $\sum_{k=1}^{3}(bk+a)$．

Ans：12

【詳解】

因爲 $\sum_{k=2}^{4}(ak+b)=(2a+b)+(3a+b)+(4a+b)=9a+3b$，

又 $\sum_{k=1}^{3}(ak+b)=(a+b)+(2a+b)+(3a+b)=6a+3b$，

所以 $\begin{cases}9a+3b=21\\6a+3b=15\end{cases}$，解得 $a=2$，$b=1$．

因爲 $\sum_{k=1}^{3}(bk+a)=(b+a)+(2b+a)+(3b+a)=6b+3a$，

所以 $a=2$，$b=1$ 代入得 $\sum_{k=1}^{3}(bk+a)=12$．

**【例題 16】【常考題】**

求 $\frac{1}{1}+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+\cdots+\frac{1}{1+2+3+\cdots+n}$ 的和（以 $n$ 表示）．

Ans：$\frac{2n}{n+1}$

【詳解】

原式 $=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+2+\cdots+k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\frac{k(k+1)}{2}}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)}$

$=2\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}\right)$

$$=2\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\frac{2n}{n+1}\ .$$

**【類題 16】**

**將級數 $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{11\cdot 13}+\frac{1}{12\cdot 14}$ 的和化成最簡分數 $\frac{q}{p}$，求 $p+q$ 的值．**

Ans：305

【詳解】

$$\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 5}+\cdots+\frac{1}{11\cdot 13}+\frac{1}{12\cdot 14}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{13}-\frac{1}{14}\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{246}{182}=\frac{123}{182}\ .$$

因此， $p=182$， $q=123$，故 $p+q=305$ ．

**【例題 17】**

**若有一個規則的數列如下：**

$\frac{1}{1}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{5}, \cdots,$

**(1) 求此數列的第 80 項．**

**(2) 求 $\frac{6}{19}$ 是此數列的第幾項．**

Ans：(1) $\frac{16}{17}$，(2) 87

【詳解】

雖然此數列不是等差數列，但是其規律與等差數列有關．

我們可以將此數列分成

$\frac{1}{1}$, $\quad$ $\frac{1}{3}, \frac{}{}\frac{2}{3}$, $\quad$ $\frac{1}{5}, \frac{}{5}\ \frac{2}{5}\ \frac{3}{5}, \frac{}{5}$ ， $\quad\cdots$

等區塊，每一區塊的項數爲 1, 3, 5, ⋯ ．

(1) 因爲 $1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$，又 $8^2=64$，

所以第 80 項所在的位置應在第 9 區塊，

且爲第 9 區塊的第 16 項 $\frac{16}{2\cdot 9-1}=\frac{16}{17}$ ．

(2) 因爲 $19=2\cdot 10-$，所以依規律可知

$\dfrac{6}{19}$是第 10 區塊中第 6 個數．

又前 9 個區塊中有 $9^2=81$ 個數，

因此$\dfrac{6}{19}$是第 $81+6=87$ 項．

**【類題 17】**

**若有一個規則的數列如下：**

$\dfrac{1}{1},\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{1},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{3}{1},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{1},\ \dfrac{1}{5},\ \cdots,$

**則此數列的第 100 項爲何？又$\dfrac{17}{20}$應該是第幾項呢？**

Ans：(1) $\dfrac{9}{6}$，(2) 647

【詳解】

雖然此數列不是等差數列，但是其規律與等差數列有關．

我們可以將此數列分成

$\dfrac{1}{1},\qquad \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{1},\qquad \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{2},\ \dfrac{3}{1},\qquad \dfrac{1}{4},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{2},\ \dfrac{4}{1},\qquad \cdots$

等區塊，每一區塊的項數爲 1, 2, 3, 4, ⋯．

(1) 因爲 $1+2+3+\cdots+13=9$，

所以第 100 項所在的位置應在第 14 區塊，

且爲第 14 區塊的第 9 項$\dfrac{9}{6}$（不要約分）．

(2) 因爲$\dfrac{17}{20}$滿足 $17+20-1=3$，

所以依規律可知$\dfrac{17}{20}$在第 36 區塊．

又前 35 區塊共有 $1+2+3+\cdots+35=63$項，

因此$\dfrac{17}{20}$爲第 $630+17=64$項．

# lt99ok212 重要考題精選

## 基礎題 ▶▶▶

**1.** 試問有多少個正整數 $n$ 使得 $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}$ 爲整數?

**(1) 1 個，(2) 2 個，(3) 3 個，(4) 4 個，(5) 5 個．　【92 學測】**

Ans：(4)

【詳解】

將原式化簡 $\frac{1}{n}+\frac{2}{n}+\cdots+\frac{10}{n}=\frac{1+2+\cdots+10}{n}=\frac{55}{n}$，

因爲 $\frac{55}{n}$ 及 $n$ 都是正整數，所以 $n$ 是 55 的正因數，

即 $n$ 可爲 1，5，11，55 共 4 個．

**2.** 已知一等差數列共有 **10** 項，且知其奇數項之和爲 **15**，偶數項之和爲 **30**，則下列哪一選項爲此數列之公差?

**(1)** 1，**(2)** 2，**(3)** 3，**(4)** 4，**(5) 5．　【93 學測】**

Ans：(3)

【詳解】

設公差爲 $d$，

由題意知：$\begin{cases} a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=15\cdots① \\ a_2+a_4+a_6+a_8+a_{10}=30\cdots② \end{cases}$，

因爲 $a_2-a_1=a_4-a_3=a_6-a_5=a_8-a_7=a_{10}-a_9=d$，

所以由②－①得 $5d=15 \Rightarrow d=3$．

**3.** 數列 $a_1+2, \cdots, a_k+2k, \cdots, a_{10}+20$ 共有 **10** 項，且其和爲 **240**，則 $a_1+\cdots+a_k+\cdots+a_{10}$ 之值爲

**(1)** 31，**(2)** 120，**(3)** 130，**(4)** 185，**(5)** 218．　**【98 學測】**

Ans：(3)

【詳解】

$a_1+2$，……，$a_k+2k$，……$a_{10}+20$

$=(a_1+\cdots\cdots+a_k+\cdots\cdots+a_{10})+(2+4+6+8+10+12+14+16+18+20)$

$=(a_1+\cdots\cdots+a_k+\cdots\cdots+a_{10})+110=240$

故得 $a_1+\cdots\cdots+a_k+\cdots\cdots+a_{10}=130$。

**4.** **已知等差級數** $25+21+\cdots+a_n<0$**，求** $a_n$ **的最大值．**

Ans：$-27$

【詳解】

公差為 d＝$-4$，n ∈ N，

$25+21+\cdots\cdots+a_n=\dfrac{(25\times2-4(n-1))\times n}{2}<0$

$\Rightarrow 50n-4n(n-1)<0$

$\Rightarrow 2n2-27n>0$

$\Rightarrow n>\dfrac{27}{2}$

$\Rightarrow a_{14}=25-4\times13=-27$ 為最大。

**5.** **已知等比級數前 3 項的和是 8，前 6 項的和為 9，求首項與公比．**

Ans：首項為 $\dfrac{32}{7}$，公比為 $\dfrac{1}{2}$

【詳解】

設首項為 a，公比為 r，則

$a+ar+ar^2=a(1+r+r^2)=8$………①

$a+ar+ar^2+ar^3+ar^4+ar^5=9$……②，

② $-$ ② $\Rightarrow ar^3(1+r+r^2)=1$……③

③ ÷① $\Rightarrow r3=\dfrac{1}{8}$ $\Rightarrow r=\dfrac{1}{2}$，

代入① $\Rightarrow a(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4})=8 \Rightarrow a=8\times\dfrac{4}{7}=\dfrac{32}{7}$。

**6.** **求下列各級數的和：**

**(1)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}(2k+3)$

**(2)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}3\cdot(-1)^{k+1}$

**(3)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{12}k(k+1)$

**(4)** $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}2\cdot(-3)^{k-1}$ **.**

Ans：(1) 192，(2) 3，(3) 728，(4) $-364$

【詳解】

(1) $\sum_{k=1}^{12}(2k+3)=5+7+\ldots\ldots+27=\frac{1}{2}(5+27)\times 12=192$。

(2) $\sum_{k=1}^{9}3\cdot(-1)^{k+1}=3(1-1+1-1+1-1+1-1+1)=3$。

(3) $\sum_{k=1}^{12}k(k+1)=1\times 2+2\times 3+3\times 4+3\times 5+5\times 6+6\times 7+$

$7\times 8+8\times 9+9\times 10+10\times 11+11\times 12+12\times 13$

$=2+6+12+20+30+42+56+72+90+110+132+156$

$=728$。

| | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| k= | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
| k(k+1)= | 2 | 6 | 12 | 20 | 30 | 42 | 56 | 72 | 90 | 110 | 132 | 156 |
| S= | 2 | 8 | 20 | 40 | 70 | 112 | 168 | 240 | 330 | 440 | 572 | 728 |

【另解】

$\sum_{k=1}^{12}k(k+1)=\sum_{k=1}^{12}k^2+\sum_{k=1}^{12}k$

$=\frac{1}{6}\times 12\times 13\times 25+\frac{1}{2}\times 12\times 13=650+78=728$。

(4) $\sum_{k=1}^{6}2\cdot(-3)^{k-1}=2(1-3+9-27+81-243)=-364$。

**7.** **將正整數按下列規律排列，每一列比前一列多一個數，如下表所示：**

| | |
|---|---|
| 第 1 列 | 1 |
| 第 2 列 | 2, 3 |
| 第 3 列 | 4, 5, 6 |
| 第 4 列 | 7, 8, 9, 10 |
| 第 5 列 | 11, 12, 13, 14, 15 |
| …… | …… |

**試問第 100 列第 3 個數是多少?**

Ans：4953

【詳解】

到第 99 列共有

$1+2+3+\cdots\cdots+99=\frac{1}{2}(1+99)\times 99=4950$，

故第 100 列第 3 個數是 4953。

**8.** 求級數 $\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+2)}+\cdots+\dfrac{1}{12\times14}$ 的和．

Ans： $\dfrac{123}{182}$

【詳解】

$\dfrac{1}{1\times3}+\dfrac{1}{2\times4}+\cdots+\dfrac{1}{k(k+2)}+\cdots+\dfrac{1}{12\times14}$

$=\dfrac{1}{2}(1-\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\cdots\cdots\cdots+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{13}+\dfrac{1}{12}-\dfrac{1}{14})$

$=\dfrac{1}{2}(1+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{13}-\dfrac{1}{14})$

$=\dfrac{123}{182}$。

## 進階題 ▶▶▶

**9.** 已知數列 $\langle a_n\rangle$ 之前 $n$ 項的和 $a_1+a_2+\cdots+a_n=2^{n+1}(n^2-2n)$，求此數列的第 $n$ 項 $a_n$．

Ans： $a_n=2^n(n^2-3)$

【詳解】

$a_n=S_n-S_{n-1}$

$=2^{n+1}(n^2-2n)-2^n[(n-1)^2-2(n-1)]$

$=2^n[2n^2-4n-(n^2-2n+1-2n+2]$

$=2^n(n^2-3)$。

**10.** 設兩等差數列，其首 $n$ 項和的比為：$(7n+2):(n+3)$，求此兩級數第 **5** 項的比．

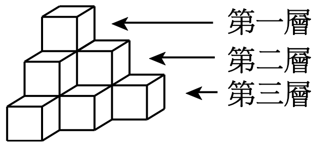
Ans： 65：12

【詳解】

$\dfrac{S_1}{S_2}=\dfrac{2a_1+(n-1)d_1}{2b_1+(n-1)d_2}=\dfrac{7n+2}{n+3}$，$n=9$ 代入得

$\dfrac{a_5}{b_5}=\dfrac{a_1+4d_1}{b_1+4d_2}=\dfrac{7\times9+2}{9+3}=\dfrac{65}{12}$

**11.** **將邊長爲 1 公分正立方體的小積木堆疊如圖所示．第一層用 1 個積木，第二層用 3 個積木，第三層用 6 個積木，以此類推．問：如果堆高 20 層，那麼這 20 層積木的總表面積爲何?**




Ans：9240 平方公分

【詳解】

設第 n 層有 $a_n$ 塊積木，則

$a_1 = 1$，

$a_2 = 3 = a_1 + 2$，

$a_3 = 6 = a_2 + 3$，

$a_4 = a_3 + 4$，

$a_n = a_{n-1} + n = a_{n-2} + (n-1) + n = \ldots\ldots$

$\quad = a_1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + (n-1) + n$，

即 $a_n = 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n = \frac{1}{2}n(n+1)$，

$$S_{20} = \sum_{k=1}^{20}\frac{1}{2}k(k+1) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{20}k^2 + \sum_{k=1}^{20}k\right)$$

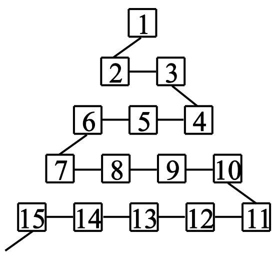
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{6}\times 20\times 21\times 41 + \frac{1}{2}\times 20\times 21\right]$$

$= 1540$。

總表面積爲 $1540\times 6 = 9240$ 平方公分。

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 |
| 55 | 66 | 78 | 91 | 105 | 120 | 136 | 153 | 171 | 190 | 210 |
| 220 | 286 | 364 | 455 | 560 | 680 | 816 | 969 | 1140 | 1330 | 1540 |

**11.** **下圖是從事網路工作者經常用來解釋網路運作的蛇形模型：數字 1 出現在第 1 列；數字** 2, 3**出現在第 2 列；數字** 6, 5, 4（**從左至右**）**出現在第 3 列；數字** 7, 8, 9, 10**出現在第 4 列；依此類推．試問第 99 列，從左至右算，第 67 個數字爲何?** **【94 指乙】**




Ans：4884

【詳解】

觀察其規則，第 n 列有 n 個數。

第 1，3，5，……，奇數列自右往左，

第 2，4，6，……，偶數列自左往右。

到第 98 列的最後一個數爲

$1+2+3+\cdots\cdots+98=\dfrac{1}{2}(1+98)\times 98=4851$。

第 99 列，從左至右算，第 67 個數字即爲從右至左算，

第 33 個數字爲 $4851+33=4884$。

**12.** **觀察右列 3×3 與 4×4 方格中的數字規律：**
**如果在 10×10 的方格上，仿上面的規則填入數字，**
**則所填入的 100 個數字之總和爲何？**

| | | |
|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 |
| 1 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 1 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 |
| 1 | 2 | 3 | 3 |
| 1 | 2 | 2 | 2 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |

Ans：385

【詳解】

所填入的 100 個數字之總和爲

$10\times1+9\times3+8\times5+7\times7+6\times9+5\times11+4\times13+3\times15+2\times17+1\times19$

$=\sum_{k=1}^{10}(11-k)(2k-1)$

$=-2\sum_{k=1}^{10}k^2+23\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}11$

$=-2\times\dfrac{1}{6}\times10\times11\times21+23\times\dfrac{1}{2}\times10\times11-11\times10$

$=-770+1265-110=385$。

【備註】

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 9 | 54 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 8 | 8 | 52 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 7 | 7 | 7 | 49 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 6 | 6 | 6 | 6 | 45 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 5 | 40 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 34 |
| 1 | 2 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 27 |
| 1 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 2 | 19 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 10 |
| | | | | | | | | | | 385 |

**13.** **證明：對於所有的正整數** $n$ **，** $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-(2n)^2+(2n+1)^2=(n+1)(2n+1)$ **都成立．**

【證明】

(1) n＝1 時，左式$=1^2-2^2+3^2=6$，

右式$=(1+1)(2+1)=6$，成立。

(2) 設 $1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-(2n)^2+(2n+1)^2=(n+1)(2n+1)$，則

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-(2n)^2+(2n+1)^2-[2(n+1)]^2+[2(n+1)+1]^2$

$=(n+1)(2n+1)-[2(n+1)]^2+[2(n+1)+1]^2$

$=(n+1)(2n+1)-4(n+1)^2+(2n+3)^2$

$=2n^2+7n+6$

$=(n+2)(2n+3)=[(n+1]+1][2(n+1)+1]$，

即 n＋1 也成立。

由(1)(2)，根據數學歸納法原理知對於所有的正整數 $n$，

$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots-(2n)^2+(2n+1)^2=(n+1)(2n+1)$ 都成立。

**14. 使用數學歸納法證明：**

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}.$$

【證明】

(1) n＝1 時，$\dfrac{1}{1\times2\times3}=\dfrac{1\times4}{4\times2\times3}$ 成立。

(2) 設 $\dfrac{1}{1\times2\times3}+\dfrac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}=\dfrac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$ 成立，則

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n(n+3)^2+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$$=\frac{n^3+6n^2+9n+4}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

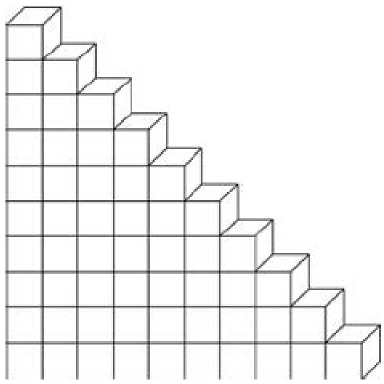
$$=\frac{(n+1)(n^2+5n+4)}{4(n+1)(n+2)(n+3)}$$

$=\dfrac{(n+1)(n+4)}{4(n+2)(n+3)}$，即 n＋1 也成立。

由(1)(2)，根據數學歸納法原理知對於所有的正整數 $n$，

$$\frac{1}{1\times2\times3}+\frac{1}{2\times3\times4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$ 都成立。

**15. 將邊長為 1 公分的正立方體堆疊成一階梯形立體，如下圖所示，其中第 1 層（最下層）有 10 塊，第 2 層有 9 塊，……，依此類推。當堆疊完 10 層時，該階梯形立體的表面積（即該立體的前、後、上、下、左、右各表面的面積總和）為多少？**



**(1) 75 平方公分**
**(2) 90 平方公分**
**(3) 110 平方公分**
**(4) 130 平方公分**
**(5) 150 平方公分** **[學測 101]**

Ans：(5)

【詳解】

$\underbrace{(1+2+3+\cdots+10)\times2}_{\text{（前後）}}+\underbrace{1\times10}_{\text{（左）}}+\underbrace{2\times10}_{\text{（右、上）}}+\underbrace{1\times10}_{\text{（下）}}$

$=110+10+20+10$

$=150$

故選(5)