

數學 1 進階講義

一次及二次不等式

景美女中・莊嘉銘老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\equiv$

2-4-2 一次及二次不等式

定理敘述

1. 一次不等式：

設 $f(x) = ax + b$ 為一次多項式，則 $f(x) > 0$ ($\geq 0, < 0, \leq 0$) 稱為一次不等式。

2. 二次不等式：

設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ 為二次多項式，則 $f(x) > 0$ ($\geq 0, < 0, \leq 0$) 稱為二次不等式。

定理證明或說明

一、設 $f(x) = ax + b$ ，其中 $a > 0$ ，則：

1. $ax + b > 0$ 為 $y = ax + b$ 圖形的右半平面（不含直線 $y = ax + b$ ）
2. $ax + b \geq 0$ 為 $y = ax + b$ 圖形的右半平面（含直線 $y = ax + b$ ）
3. $ax + b < 0$ 為 $y = ax + b$ 圖形的左半平面（不含直線 $y = ax + b$ ）
4. $ax + b \leq 0$ 為 $y = ax + b$ 圖形的左半平面（含直線 $y = ax + b$ ）

二、設 $f(x) = ax^2 + bx + c$ ， $a > 0$ （很重要），則：

1. 若 $D = b^2 - 4ac > 0$ ，表示 $f(x) = ax^2 + bx + c = 0$ 有兩相異實根 α, β

（其中 $\alpha < \beta$ ），即 $y = f(x)$ 的圖形與 x 軸交於 $(\alpha, 0), (\beta, 0)$ 兩點。如圖(一)

則求(1) $ax^2 + bx + c > 0$ ，即求當 y 坐標 > 0 時， x 的範圍

(2) $ax^2 + bx + c \geq 0$ ，即求當 y 坐標 ≥ 0 時， x 的範圍

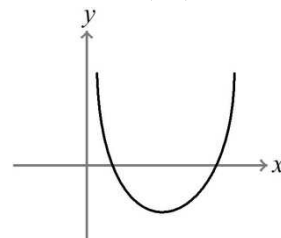
(3) $ax^2 + bx + c < 0$ ，即求當 y 坐標 < 0 時， x 的範圍

(4) $ax^2 + bx + c \leq 0$ ，即求當 y 坐標 ≤ 0 時， x 的範圍

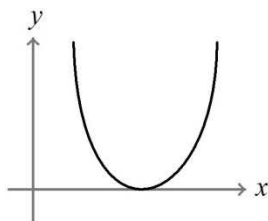
故整理得

類型	$ax^2 + bx + c > 0$	$ax^2 + bx + c \geq 0$	$ax^2 + bx + c < 0$	$ax^2 + bx + c \leq 0$
其解	$x < \alpha$ 或 $x > \beta$	$x \leq \alpha$ 或 $x \geq \beta$	$\alpha < x < \beta$	$\alpha \leq x \leq \beta$

圖(一)



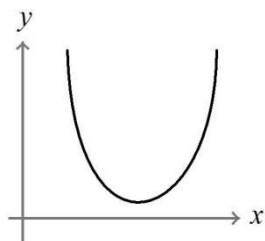
2. 若 $D=0$ ，表示 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 有重根 α ，即 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸僅交於一點 $(\alpha, 0)$ 。如右圖(二)



故整理得

類型	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
其解	x 不為 α 的實數	x 為任意實數	x 無解	$x=\alpha$

3. 若 $D<0$ ，表示 $f(x)=ax^2+bx+c=0$ 無實根，即 $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸無交點。如右圖(三)



故整理得

類型	$ax^2+bx+c>0$	$ax^2+bx+c\geq 0$	$ax^2+bx+c<0$	$ax^2+bx+c\leq 0$
其解	x 為任意實數	x 為任意實數	x 無解	x 無解

注意事項

二次不等式解題技巧：

1. 先試著因式分解成 $(x-\alpha)(x-\beta)>0$ ($\geq 0, < 0, \leq 0$ 只是符號不同，故解不同)
2. 若無法因式分解，計算判別式，若 $D>0$ ，則用公式解求實根；若 $D<0$ ，判斷是否恆正。
3. 畫數線
4. 由右至左，正負交錯
5. 判斷解的範圍

關鍵字

恆正

例題 1

解不等式 $3x-1 < 5 < 4x+1$

Ans :

可將不等式拆成兩部分，其交集即為所求

$$\begin{cases} 3x-1 < 5 \\ 4x+1 > 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x < 2 \\ x > 1 \end{cases} \Rightarrow 1 < x < 2$$

例題 2

解不等式 $2x^2 - 4x - 6 < x^2 - x - 2$

Ans :

移項可得 $x^2 - 3x + 4 < 0$

因無法因式分解，故計算判別式 $D = (-3)^2 - 4 \times 1 \times 4 = -7 < 0$

又領導係數大於 0，所以 $x^2 - 3x + 4 = (x - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} > 0$

即對於所有實數 x ， $x^2 - 3x + 4$ 恆大於 0，故 $x^2 - 3x + 4 < 0$ 無實數解。

例題 3

【景美女中】

設 a 為實數，且 $a \neq 0$ ，若不等式 $ax^2 - 2ax + 2a - 3 < 0$ 無解，試求 a 之範圍為何？

Ans :

因為 $ax^2 - 2ax + 2a - 3 < 0$ 無解，表示對於所有實數 x 而言，

$ax^2 - 2ax + 2a - 3 \geq 0$ 恆成立。

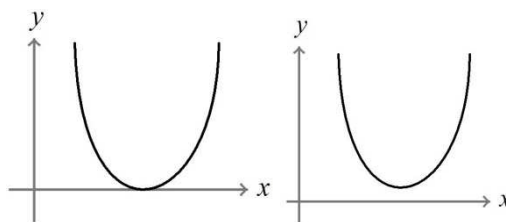
即如右圖所示，可知：

(1) 開口向上及 (2) 與 x 軸至多一交點

$\therefore$ (1) $a > 0$

$$(2) D = (-2a)^2 - 4 \times a \times (2a - 3) \leq 0$$

整理可得 $\begin{cases} a > 0 \\ a^2 - 3a \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a > 0 \\ a \geq 3 \text{ 或 } a \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \text{取交集得 } a \geq 3$



例題 4

【中一中】

$m \in R, y = (m-5)x^2 - 6x + m + 2$ 之圖形恆在直線 $y = 7$ 的上方，試求 m 之範圍為何？

Ans：

由題意可畫簡圖如右

可知二次多項式圖形開口向上且 y 坐標恆大於 7

即 $(m-5)x^2 - 6x + m + 2 > 7$ 恆成立

移項得 $(m-5)x^2 - 6x + m - 5 > 0$

$\therefore (1) \quad m - 5 > 0$

$(2) \quad D = (-6)^2 - 4(m-5)(m-5) < 0$

整理可得 $\begin{cases} m > 5 \\ (m-5)^2 > 9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 5 \\ m > 8 \text{ 或 } m < 2 \end{cases} \Rightarrow \text{取交集得 } m > 8$

例題 5

【華江】

若二次不等式 $f(x) > 0$ 的解為 $3 < x < 5$ ，試求 $f(3x) < 0$ 之解為何？

Ans：

【解 1】：若解為 $3 < x < 5 \Rightarrow (x-3)(x-5) < 0 \Rightarrow x^2 - 8x + 15 < 0$

但由題目可知二次不等式為 $f(x) > 0$ ，故將上式移項得 $-x^2 + 8x - 15 > 0$

即可令 $f(x) = -x^2 + 8x - 15$ ，

則 $f(3x) = -(3x)^2 + 8 \times (3x) - 15 = -9x^2 + 24x - 15$

所以 $f(3x) < 0 \Rightarrow -9x^2 + 24x - 15 < 0 \Rightarrow 3x^2 - 8x + 5 > 0$

$$\Rightarrow (3x-5)(x-1) > 0 \Rightarrow x > \frac{5}{3} \text{ 或 } x < 1$$

【解 2】： $\because f(x) > 0 \Rightarrow 3 < x < 5$

$$\therefore f(3x) > 0 \Rightarrow 3 < 3x < 5 \Rightarrow 1 < x < \frac{5}{3}$$

$$\therefore f(3x) < 0 \Rightarrow x > \frac{5}{3} \text{ 或 } x < 1$$



溫故知新

習題 1

求不等式 $\frac{3-x}{2} - x - 1 < 0$ 的解

習題 2

解下列不等式：

(1) $3x^2 - 8x - 3 > 0$ (2) $2x^2 + x - 2 < 0$

習題 3

若二次不等式 $f(x) > 0$ 的解為 $3 < x < 5$ ，則 $f(3x+2) < 0$ 之解為

習題 4

設對於所有實數 x 而言， $mx^2 - (2m+1)x + m < 0$ 恆成立，求 m 的範圍。

習題 5

【學測 84】

設 m 為實數，若二次函數 $y = mx^2 + 10x + m + 6$ 的圖形在直線 $y = 2$ 的上方，則 m 的範圍為何？

習題 6

【指考乙 97】

請問對於下列哪些選項，可以找到實數 a ，使得選項裡面所有的數都同

時滿足一元二次不等式 $x^2 + (2-a)x - 2a < 0$ ？

(1) $-1, 0$ (2) $1, 2, 3, \dots$ （所有的正整數）

(3) $-3, -4, -5, \dots$ （所有小於 -2 的整數）

(4) $97, 2008$ (5) $-\pi, \pi$ （ π 是圓周率）

習題 7

【學測 97】

設 a, b 為正整數。若 $b^2 = 9a$ ，且 $a + 2b > 280$ ，則 a 的最小可能值為_____



習題 1 : $x > \frac{1}{3}$

習題 2 : (1) $x > 3$ 或 $x < -\frac{1}{3}$ (2) $\frac{-1-\sqrt{17}}{4} < x < \frac{-1+\sqrt{17}}{4}$

習題 3 : $x > 1$ 或 $x < \frac{1}{3}$

習題 4 : $m < -\frac{1}{4}$

習題 5 : 由題意可知二次多項式圖形開口向上且 y 坐標恆大於 2

即 $mx^2 + 10x + m + 6 > 2$ 恆成立

移項得 $mx^2 + 10x + m + 4 > 0$

$\therefore$ (1) $m > 0$

(2) $D = 10^2 - 4m(m+4) < 0$

整理可得 $\begin{cases} m > 0 \\ m^2 + 4m - 25 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m > 0 \\ m > -2 + \sqrt{29} \text{ 或 } m < -2 - \sqrt{29} \end{cases}$

$\therefore$ 取交集得 $m > -2 + \sqrt{29}$

習題 6 : 因為 $x^2 + (2-a)x - 2a < 0 \Rightarrow (x+2)(x-a) < 0$

① 若 $a > -2 \Rightarrow -2 < x < a$

② 若 $a < -2 \Rightarrow a < x < -2$

此題即判斷選項中各數是否能完全落在同一個範圍內

(1) $-1, 0$ 可落在 $-2 < x < a$ 內，取 $a = 1$ 即可

(2) $1, 2, 3, \dots$ (所有的正整數) 無法落在 $-2 < x < a$ 中

(3) $-3, -4, -5, \dots$ (所有小於 -2 的整數) 無法落在 $a < x < -2$ 中

(4) $97, 2008$ 可落在 $-2 < x < a$ 內，取 $a = 2009$ 即可

(5) $-\pi, \pi$ 無法同時落在 $-2 < x < a$ 或 $a < x < -2$ 中

故選(1)(4)

習題 7 : 因為 $b^2 = 9a$ ，所以 $a = \frac{b^2}{9}$ 代入 $a + 2b > 280$ ，得 $\frac{b^2}{9} + 2b > 280$

同乘 9 並移項得 $b^2 + 18b - 2520 > 0$ ，因式分解得 $(b - 42)(b + 60) > 0$

所以 $b < -60$ （不合，因為 b 為正整數）或 $b > 42$ ，故 $b > 42$

又 $b^2 = 9a$ ，表示 b 必為 3 的倍數，所以 b 最小為 45，

所以 a 最小為 $\frac{45^2}{9} = 225$