

選修數學

進階

講義

上

正餘弦函數的疊合

大同高中·陳盈穎老師



信望愛文教基金會

$\frac{3}{4}$

@

$\equiv$

16-2-1 正餘弦函數的疊合



定理敘述

◆正弦疊合

若 $a, b \in R$ 且 $a^2 + b^2 \neq 0$ ，則

$$(1) y = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta) \quad (\text{常用})$$

$$\text{其中 } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$(2) y = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta)$$

$$\text{其中 } \cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



定理證明或說明

◆正餘弦疊合

pf.

$a, b \in R$ 且 $a^2 + b^2 \neq 0$

$$(1) y = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x + \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x \right)$$

$$(\text{令 } \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}})$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \sin x + \sin \theta \cos x) = \sqrt{a^2 + b^2} \sin(x + \theta)$$

另外，

$$\because -1 \leq \sin(x + \theta) \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{a^2 + b^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$(2) y = a \sin x + b \cos x = \sqrt{a^2 + b^2} \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \cos x + \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \sin x \right)$$

$$(\text{令 } \cos \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \sin \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}})$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2} (\cos \theta \cos x + \sin \theta \sin x) = \sqrt{a^2 + b^2} \cos(x - \theta)$$



關鍵字

正餘弦疊合

例題 1

$f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x$ 在 $x = a$ 時有最大值，則 a 之值為_____

Ans : 2

解： $f(x) = \sqrt{3} \sin x + \cos x = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x + \frac{1}{2} \cos x\right) = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$

故所求最大值為 2

例題 2

$y = 3 \sin x - 4 \cos x$ 之值域為_____

Ans : $-5 \leq y \leq 5$

解： $y = 3 \sin x - 4 \cos x = 5 \sin(x - \varphi)$ 其中 $\sin \varphi = \frac{4}{5}$, $\cos \varphi = \frac{3}{5}$

故所求值域為 $-5 \leq y \leq 5$

例題 3

若 $0 \leq x \leq \pi$ ，試解 $\sqrt{3} \sin x + \cos x = \sqrt{3}$

Ans : $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$

解： $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 2 \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\therefore x + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ 或 $x + \frac{\pi}{6} = \frac{2\pi}{3}$

故所求 $x = \frac{\pi}{6}$ 或 $x = \frac{\pi}{2}$

例題 4

若 $\frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}$ ，則 $\sqrt{3}\sin x + \cos x$ 的最大值為_____

Ans : 1

$$\text{解： } \sqrt{3}\sin x + \cos x = 2\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\text{因為 } \frac{2\pi}{3} \leq x \leq \frac{7\pi}{6}, \text{ 所以 } \frac{5\pi}{6} \leq x + \frac{\pi}{6} \leq \frac{4\pi}{3}$$

$$\text{故所求最大值為 } 2\sin\frac{5\pi}{6} = 1$$

例題 5

$$\frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \underline{\hspace{2cm}}$$

Ans : 4

$$\text{解： } \frac{1}{\cos 80^\circ} - \frac{\sqrt{3}}{\sin 80^\circ} = \frac{\sin 80^\circ - \sqrt{3}\cos 80^\circ}{\cos 80^\circ \sin 80^\circ} = \frac{2\sin(80^\circ - 60^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 160^\circ} = 4$$

例題 6

求函數 $y = f(x) = 3\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x$ 之最大值為_____

Ans : $\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \text{解： } & 3\cos^2 x + 2\sin x \cos x + \sin^2 x \\ &= (2\cos^2 x + \cos^2 x + \sin^2 x) + 2\sin x \cos x \\ &= (2\cos^2 x + 1) + 2\sin x \cos x \\ &= \cos 2x + \sin 2x = \sqrt{2}\left(\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)\right) \end{aligned}$$

故所求最大值為 $\sqrt{2}$



習題 1

求函數 $y = f(x) = 3\cos^2 x - 2\sin x \cos x + \sin^2 x$ 之最小值為_____

習題 2

已知 $f(x) = \sqrt{3}\sin x - \cos x$

(1) 若 $\frac{\pi}{5} \leq x \leq \frac{11\pi}{5}$ ，則 y 的最大值為_____ (2) 若 $0 \leq x \leq \pi$ ，則 y 的最大值為_____

習題 3

$y = -5\sin x - 12\cos x$ 之值域為_____

習題 4

下列選項中，有關 $y = 2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x - 1$ 的敘述，何者正確？

- (A) 其圖形對稱於直線 $x = \frac{\pi}{3}$ (B) y 的最大值為 3 (C) 圖形對稱於原點
 (D) $y = 2\sin x - 2\sqrt{3}\cos x - 1$ 之圖形在 $\frac{5\pi}{6} \leq x \leq \frac{11\pi}{6}$ 時為遞減
 (E) 其圖形週期為 π

習題 5

設 θ 為銳角， $-\sqrt{3}\sin \theta - \cos \theta = -2 \Rightarrow \theta =$ _____

習題 6

試化簡 $\csc 10^\circ - \sqrt{3}\csc 80^\circ =$ _____

習題 7

【指考甲 102】

考慮函數 $f(x) = |\sin x| + |\cos x|$ ，其中 x 為任意實數。請選出正確的選項。

- (1) $f(-x) = f(x)$ 對所有實數 x 均成立 (2) f 的最大值為 $\sqrt{2}$ (3) f 的最小值為 0
 (4) $f(\frac{\pi}{10}) > f(\frac{\pi}{9})$ (5) 函數 f 的（最小正）週期為 π

習題 8

【學測 99】

下列哪些方程式有實數解？

(1) $x^3 + x - 1 = 0$ (2) $2^x + 2^{-x} = 0$ (3) $\log_2 x + \log_x 2 = 1$

(4) $\sin x + \cos 2x = 3$ (5) $4\sin x + 3\cos x = \frac{9}{2}$

習題 9

【指考乙 96】

x 代表實數，請選出正確的選項。

(1) 當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時， $\cos 2x$ 之值恆為正 (2) 當 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 時， $\sin 2x$ 之值恆為正

(3) 不論 x 為何， $\cos^2 x - \sin^2 x \leq \frac{1}{2}$ 恆成立 (4) 不論 x 為何， $\sin x \cos x \leq \frac{1}{2}$ 恆成立

(5) 不論 x 為何， $\sin x + \cos x \leq \frac{3}{2}$ 恆成立

習題 10

【學測 95】

下列哪一個數值最接近 $\sqrt{2}$ ？

(1) $\sqrt{3} \cos 44^\circ + \sin 44^\circ$ (2) $\sqrt{3} \cos 54^\circ + \sin 54^\circ$ (3) $\sqrt{3} \cos 64^\circ + \sin 64^\circ$

(4) $\sqrt{3} \cos 74^\circ + \sin 74^\circ$ (5) $\sqrt{3} \cos 84^\circ + \sin 84^\circ$

習題 11

【指考甲 101】

設 $0 \leq \theta < 2\pi$ ，且方程式 $x^2 - a = 0$ 之兩根恰為 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ 。請選出正確的選項。

(1) $\tan \theta = 1$ (2) $\sin(\theta + \frac{\pi}{4}) = 0$ (3) $\sin 2\theta = -1$ (4) $a = \frac{1}{2}$ (5) 滿足題設的 θ 只有一個

習題 12

【學測 84】

設 $f(x) = (\sin x + \cos x)^2 + 4(\sin x + \cos x)$ ，則 $f(x)$ 的最小值為_____。

習題 13

【學測 93】

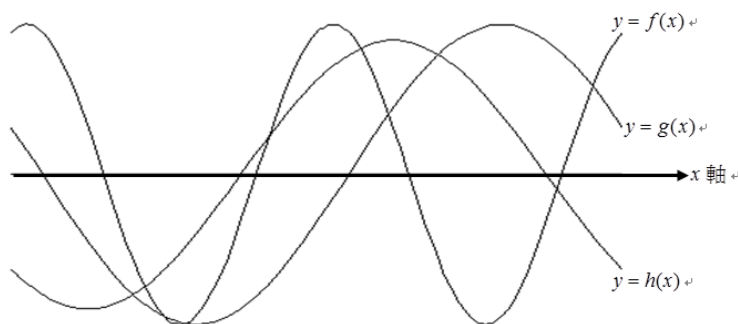
設 $270^\circ < A < 360^\circ$ 且 $\sqrt{3} \sin A + \cos A = 2 \sin 2004^\circ$ 。

若 $A = m^\circ$ ，則 $m =$ _____。

習題 14

【學測 87】

將函數 $y = 3\sin x - \cos x$ 、 $y = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $y = 2\sin x + 2\cos x$ 的圖形繪於同一坐標平面上，其與 x 軸的相關位置如下圖：



試問圖中的圖形 $y = f(x)$ 、 $y = g(x)$ 、 $y = h(x)$ 所代表的函數應為下列哪一個選項？

- (1) $f(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $g(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $h(x) = 2\sin x + 2\cos x$
- (2) $f(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $h(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $g(x) = 2\sin x + 2\cos x$
- (3) $g(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $f(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $h(x) = 2\sin x + 2\cos x$
- (4) $g(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $h(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $f(x) = 2\sin x + 2\cos x$
- (5) $h(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $f(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $g(x) = 2\sin x + 2\cos x$



解答與解析

習題 1： $-\sqrt{2}$

習題 2：(1) 2；(2) 2

習題 3： $-13 \leq y \leq 13$

習題 4：(B)(D)

習題 5： $\frac{\pi}{3}$

習題 6：4

習題 7：(1)(2)

解： $f(-x) = |\sin(-x)| + |\cos(-x)| = f(x)$

$$f\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left|\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| + \left|\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right| = |\cos x| + |-\sin x| = |\sin x| + |\cos x| = f(x)$$



所以僅考慮 $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ，此時 $f(x) = \sin x + \cos x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

故值域為 $1 \leq f(x) \leq \sqrt{2}$ ，即最大值為 $\sqrt{2}$ ，最小值為 1

最後， $f\left(\frac{\pi}{10}\right) = \sqrt{2} \sin\left(\frac{7\pi}{20}\right) < \sqrt{2} \sin\left(\frac{13\pi}{36}\right) = f\left(\frac{\pi}{9}\right)$

故選(1)(2)

習題 8 : (1)(5)

習題 9 : (2)(4)(5)

習題 10 : (4)

解： $\sqrt{3} \cos x + \sin x = 2 \sin(x + 60^\circ)$ 且 $2 \sin 135^\circ = \sqrt{2}$

故選(4)

習題 11 : (2)(4)

解：因為 $x^2 - a = 0$ 之兩根恰為 $\sin \theta$ 與 $\cos \theta$ (一正一負)，即 $\sin^2 \theta = a$ 且 $\cos^2 \theta = a$

$$\Rightarrow \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 2a \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

兩根可能為 $\sin \frac{3\pi}{4}$ 與 $\cos \frac{3\pi}{4}$ ，或是 $\sin \frac{7\pi}{4}$ 與 $\cos \frac{7\pi}{4}$

故選(2)(4)

習題 12 : $2 - 4\sqrt{2}$

解：設 $t = \sin x + \cos x \Rightarrow -\sqrt{2} \leq t \leq \sqrt{2}$

$$f(x) = t^2 + 4t = (t + 2)^2 - 4$$

則當 $t = -\sqrt{2}$ 時有最小值為 $2 - 4\sqrt{2}$

習題 13 : 306

解： $\sin 2004^\circ = \sin 204^\circ = \sin(180 + 24)^\circ = \sin(360 - 24)^\circ = \sin 336^\circ$

$$\sqrt{3} \sin A + \cos A = 2 \sin(A + 30^\circ) = 2 \sin 336^\circ$$

故所求 $m = 306$

習題 14 : (3)

解：

函數	週期	振幅
$y = 3\sin x - \cos x$	2π	$\sqrt{10}$
$y = \sin(2x) + 3\cos(2x)$	π	$\sqrt{10}$
$y = 2\sin x + 2\cos x$	2π	$\sqrt{8}$

得 $g(x) = 3\sin x - \cos x$ 、 $f(x) = \sin(2x) + 3\cos(2x)$ 、 $h(x) = 2\sin x + 2\cos x$

故選(3)